

基于压缩传感的纯相位物体相位恢复*

杨振亚 郑楚君[†]

(华南师范大学物理与电信工程学院, 广州 510006)

(2012年10月26日收到; 2012年12月7日收到修改稿)

传统的相位恢复算法通过双强度或者单强度测量的数据进行迭代运算以恢复丢失的相位信息, 它要求采样数据必须满足香农采样定理. 当成像的分辨率较高时, 大量的测量数据势必会对数据采样设备提出更多的要求. 因此, 为减少采样负担, 本文提出了一种基于压缩传感的相位恢复算法, 通过在傅里叶面的少量单强度测量数据, 应用改进的混合输入输出算法来恢复纯相位物体的相位分布. 在采样数据远小于采样定理所需的条件时, 该算法仍能精确地恢复相位分布具有分块均匀特征的纯相位物体. 数值仿真实验表明该算法具有良好的收敛性能.

关键词: 相位恢复, 压缩传感

PACS: 42.30.Rx, 42.30.Wb

DOI: 10.7498/aps.62.104203

1 引言

物体衍射场的相位通常携带着关于物体结构的重要的信息, 在许多物理和生物学的研究中, 一般通过物体在某种射线照射下的衍射光传播到探测器面上的数据来推测物体的结构信息. 然而在大部分这类应用之中, 探测器仅是强度探测器, 衍射场波前分布由一个强度探测器所测量收集, 随之带来的主要问题便是衍射场相位的丢失. 为了解决这种相位丢失的问题, Gerchberg 和 Saxton^[1] 于 1972 年提出了 GS 相位恢复算法, 该算法是第一种被广泛接受的波前传播迭代相位恢复算法, 奠定了数值相位恢复的衍射迭代基本模式, 并迅速成为相位恢复数值领域的经典算法. 其基本思路是, 将波前交替地在物面以及成像面上来回传播, 并在两个面上分别施加其振幅所满足的约束, 从而逐步地收敛于实际复振幅. 然而 GS 算法在实际应用中存在诸如迭代次数过多、收敛性不好、依赖双强度测量等诸多缺点, 限制了其实际应用. 针对 GS 算法的这些突出问题, 一系列改进算法被陆续提出, 如误差减少算法 (ER)、输入输出算法 (IO)、混合输入输出

算法 (HIO)^[2] 以及杨顾算法^[3] 等. 其中, Fienup 的 HIO 在迭代过程中引入支撑域约束, 具有收敛性能好、迭代运算简单等优点, 在实际中尤其是针对实值非负的物体的相位恢复中应用最为广泛.

近些年来, 压缩传感 (compressed sensing) 成为了各个领域的研究热点, 受到越来越多的关注, 主要在于这个理论提供了一种可能: 通过少量适当的采样, 稀疏信号可以通过求解 l_1 范数最优化的问题来精确重构^[4-6], 这个特点所要求的采样数量可以远小于传统信号重建所需的条件, 大大降低设备的存储与采样的复杂度与成本^[7]. 因为压缩传感具有这类优点, 将压缩传感理论引入硬件要求较高的成像领域便具有相当的实用价值. 在成像领域, 最典型的线性测量便是衍射场模式测量或者傅里叶测量, 然而这种测量在绝大多数的应用中都将遭遇前面所述的相位问题. 因此, 若能引入一种基于压缩传感的相位恢复算法, 将极大拓展压缩传感在成像领域的应用. 除此以外, 在相位恢复方面, 引入压缩传感中的信号稀疏约束, 并在迭代算法中应用压缩传感的 l_1 范数最优算法, 将有助于提高相位迭代算法的收敛速度, 解决一部分收敛停滞问题, 并改善算法的鲁棒性. 在 2007 年, Moravec 等^[8,9] 提

* 国家自然科学基金 (批准号: 10504008) 资助的课题.

[†] 通讯作者. E-mail: cjzheng@sncu.edu.cn

出了压缩传感相位恢复 (compressed sensing phase retrieval), 通过借助于已知的信号 l_1 范数约束, 从信号的一个傅里叶强度采样子集, 恢复出纯振幅物体的分布. 该方法需要获知信号确切的 l_1 范数, 而信号 l_1 范数的信息通常是未知的, 这限制了其实际的应用. Newton^[10] 于 2012 年提出 HIO 算法的压缩传感改进恢复算法 CSHIO, 在实值物体上有不错的效果. 不过, 这两种算法都针对实值分布的物体. 本文的算法主要针对纯相位物体, 在实际的应用中, 纯相位物体一般都满足分段平滑的相位分布, 因此有限差分算符为描述其相位稀疏性的理想算符. 迭代算法的基本思路为: 每一次迭代过程中都对物面应用相位上的最小全变差进行优化, 然后对结果按照 HIO 算法进行交替传播迭代, 将这两部分重复下去, 最终便可实现由给定的傅里叶强度测量数据子集重建相位物体分布的算法. 与普通 HIO 算法相比, 本文的算法可以在采样非常少的情况下依然精确重建物面复振幅分布, 而 HIO 算法在这种情况下的重建一般是失败的. 除此之外, 本文的算法在收敛速度上亦具有一定优势.

2 基本原理

相位恢复长期以来一直是国际国内研究工作者关注的重要研究问题^[3,11-17]. 归纳起来, 传统的单强度相位恢复问题可以这样描述: 考虑一个典型的傅里叶变换光路, 具有一定相位分布的样品放置在物面上, 如图 1 所示, 在平面相干波照明条件下, 其透射光具有复振幅分布 U . 经由透镜的傅里叶变换, 在傅里叶面上将获得 U 的傅里叶变换, 记为 V .

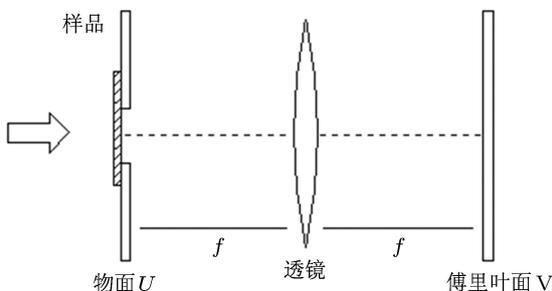


图 1 傅里叶变换光路图

如何由傅里叶上的振幅记录 $Y = |V|$ 来恢复出 U 的信息, 这个问题被称为单强度相位恢复问题. 在此简要介绍 Fienup 提出的 HIO, 其迭代过程可扼

要概括如下:

$$u_{n+1} = \begin{cases} P(u_n), & \text{如果 } t \in D \\ u_n - \beta P(u_n), & \text{其他} \end{cases}, \quad (1)$$

这里, u_n, u_{n+1} 分别是这一次与下一次迭代的物面分布, 实际运算时, u_0 可取随机初始值. 算符 $P(u)$ 的作用可具体描述如下: 先对 u 取傅里叶变换, 变换后的结果设为 m , 保持相位不变并将振幅修改为测量的 $|V|$ 分布, 然后求取傅里叶逆变换, 如图 2 所示. D 代表物面上的支撑域, 它限制着物面分布的边界范围, $\beta < 1$ 是一个抑制系数, 控制着迭代过程中支撑域外分布的抑制情况, 一般可取经验值 0.9. 算法从随机初始值开始, 经由不断的交替投影迭代, 最终收敛于同时满足物面支撑域约束与给定傅里叶振幅约束的结果.

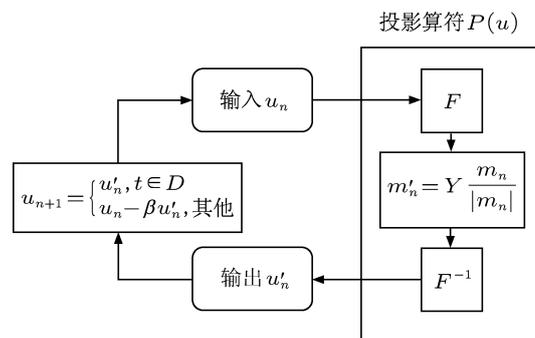


图 2 HIO 迭代算法流程

在此引入压缩传感理论. 从探测器所采集的数据仅是 $|V|$ 的一个子集 $|V_s|$. 此时由 $Y = |V_s|$ 恢复出 U 的分布, 如果用传统的 HIO 方法, 迭代结果将无法趋于稳定, 同时也无法保证算法收敛性. 然而, 压缩传感理论告诉我们, 如果将信号自身的结构信息纳入考虑范围, 则少量采样子集依然存在无失真重建的可能.

如前所述, 压缩传感理论并不要求满足采样定理的采样数据, 而且这个理论是建立在信号的可稀疏表达性之上. 以一长度为 M 的 K 稀疏信号为例, 当采样矩阵满足约束等距条件时^[18], 理论给出了重建信号所需的采样数量的下限为 $O(K \ln M)$ ^[5]. 信号的稀疏可以表现在空域, 也可以表现在变换域, 或者表现在与算符的作用之下, 比如梯度算符 ∇ . 在成像领域, 由于相位物体的相位分布一般具有缓变性以及分块均匀性, 因此相位的梯度可以满足稀疏性. 设二维信号为 $U, \nabla U$ 的 l_1 范数被称为全变

差 (total variation, TV)^[19]. 由给定的采样数据, 可以通过求解最优化问题, 使得结果具有最小全变差:

$$\bar{U} = \arg \min |\nabla U'|_1 \text{ s.t. } \|MU' - Y\|^2 \leq \xi, \quad (2)$$

其中, M 是采样算符, Y 是采样数据, $\|\cdots\|$ 为取模运算, $|\cdots|_1$ 表示 l_1 范数, ξ 代表重构偏差, 表示重构结果重新采样后与采样数据的差值, 一般用来抑制实际采样所带来的噪声. 在这个式子里, \bar{U} 为满足测量式 $\|MU' - Y\|^2 \leq \xi$ 的解里面具有最小 $|\nabla U'|_1$ 即全变差的最优解, 这个最优化问题则被称为最小 TV 重构法. 求解过程可以引入两步迭代, 先从初始值 $U_0 = 0$ 开始, 第一步把 U_n 投影到 $MU = Y$ 的解集上得到 a , 第二步对投影结果 a 求解最优化问题 $U_{n+1} = \arg \min |\nabla U'|_1 \text{ s.t. } \|U' - a\|^2 \leq \xi$, 第二步是一个 TV 稀疏逼近问题, 可扼要描述为求取 a 在偏差为 ξ 的一个全变差稀疏逼近. 在本文中, TV 稀疏逼近所用的迭代算法为 Chambolle 所提出的算法^[20].

现在将 HIO 与压缩传感的 TV 重构算法进行结合. 在本文中仅考虑纯相位物体: 振幅透过率为 1, 仅有相位透过率变化的物体. 设 Y 是观测到的傅里叶振幅数据, 所用测量算符为 M , 由观测的振幅

数据重构信号 f 为求解最优化问题:

$$\begin{aligned} \bar{f} &= \arg \min |\nabla \text{ang}(f')|_1 \\ \text{s.t. } \{ &\|M(f')\| - Y\|^2 \leq \xi, \\ &|f'| = 1, \quad f' \in D\}, \end{aligned} \quad (3)$$

其中, $\text{ang}()$ 代表取相角, $\|\cdots\|$ 为取模运算, D 为支撑域. 我们所设计的迭代算法类似于 HIO 算法, 傅里叶数据被交替地在物面和像面上投影, 并使之满足物面纯相位限制和支撑域限制以及傅里叶面幅度约束. 如图 3 所示, 算法由 u_0 取随机值开始, 输入投影算符 $P(u)$ 当中, 与 HIO 算法相比, 傅里叶变换 F 改为部分傅里叶变换 F_s , 仅获取子集 s 位置的系数, 逆变换 F^{-1} 变为 F_s 的共轭算子 F_s^* , 其作用相当于将获得的系数返回 s 的位置, 其他补 0 并做逆变换. 在每一次迭代中, 对支撑域 D 外的部分与 HIO 算法进行相同的抑制, 支撑域 D 内的部分约束为纯相位, 之后取出支撑域内的相位, 应用 Chambolle 算法计算一个当前相位的 TV 稀疏逼近, 然后作为下一次的输入 u_{n+1} . 不断重复这两步, 结果将逐渐收敛在满足所有约束, 同时满足相位的全变差最小的解之上.

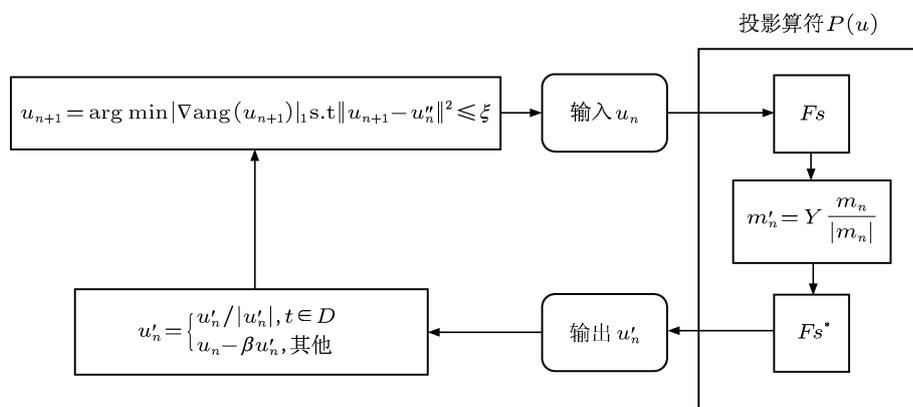


图 3 本文的算法流程

3 数值仿真

我们模拟一个 256×256 像素的相位物体, 尺寸为 20 mm, 振幅透过为 1, 复透过率为 $\exp(j\pi/2 \cdot I)$, 其相位 I 由归一化 Shepp-Logan phantom 图调制, 最大相角变化为 $\pi/2$. phantom 图 (图 4(b)) 有明显的边界, 而且是块状均匀分布, 用来做最小全变分优化是非常理想的. 波长为 632.8 nm 的激光照射在相位物体之上, 光斑为圆形, 透射光被傅里叶透

镜变换, 在傅里叶面上形成频谱. 对傅里叶面上的频谱强度施加采样模板, 获得所需的采样子集. 在标准的压缩传感做法当中, 采样矩阵一般为随机测量矩阵, 不过使用随机测量矩阵, 主要的问题一是计算存储量大, 二是没有很好的物理实现方法. 文献 [6] 中也建议用置乱傅里叶变换达到相同效果, 不过置乱傅里叶仅在信号为空域稀疏时才有很好的效果, 在变换域或者 TV 算符下效果不是很好. 为了继续应用傅里叶变换在光学采样中的优势, 就

需要构造特殊的采样模板, 根据傅里叶变换的特点, 适量多采集靠近中心的数据. 本文使用的采样模板如图 4(a) 所示, 由自中心向四周的 20 条等角度辐射线构成, 包括 3782 个采样点, 大约是 7.6% 的采样数据. 这种采样方式在中心处比其他地方的采样数据更多, 符合一般图像频谱的分布规律, 并且易于物理实现 [21].

图 4(c) 表示激光光斑的形状和位置, 这同时也代表着支撑集. 图 4(d) 表示对振幅数据直接逆投影重建的相位, 图 4(e) 为直接对采样数据应用 HIO 算法返回的相位, 都已经约束在支撑域范围, 从图中可见重建完全失败了. 使用本文的压缩传感相位恢复算法的结果相位图 4(f), 可以发现除了一些细节上的小偏差, 重建相位与图 4(b) 几乎一致, 这验证

了本文算法的可行性.

将最大相角变化增大到 0.8π , 1.6π , 以及 2π , 采用本文算法, 迭代结果在图 5 中给出.

由图 5 中可以看出, 当相位变化超过 2π 时, 超过的部分 (2π , phantom 的边缘部分) 被映射到了主值区间, 相角为 0. 因为本文的算法假定相角总是在 $0-2\pi$ 区间上.

迭代过程中的误差用下式表示:

$$\text{Error} = \frac{\sum ||Ua_k| - y|}{\sum y}, \quad (4)$$

式中 a_k 代表第 k 次迭代的中间结果, U 为采样算子, y 为实际观测到的傅里叶振幅采样. 在不同的相角范围下, 该数值随着迭代次数的变化如图 6 所示, 可以看出收敛速度是令人满意的.

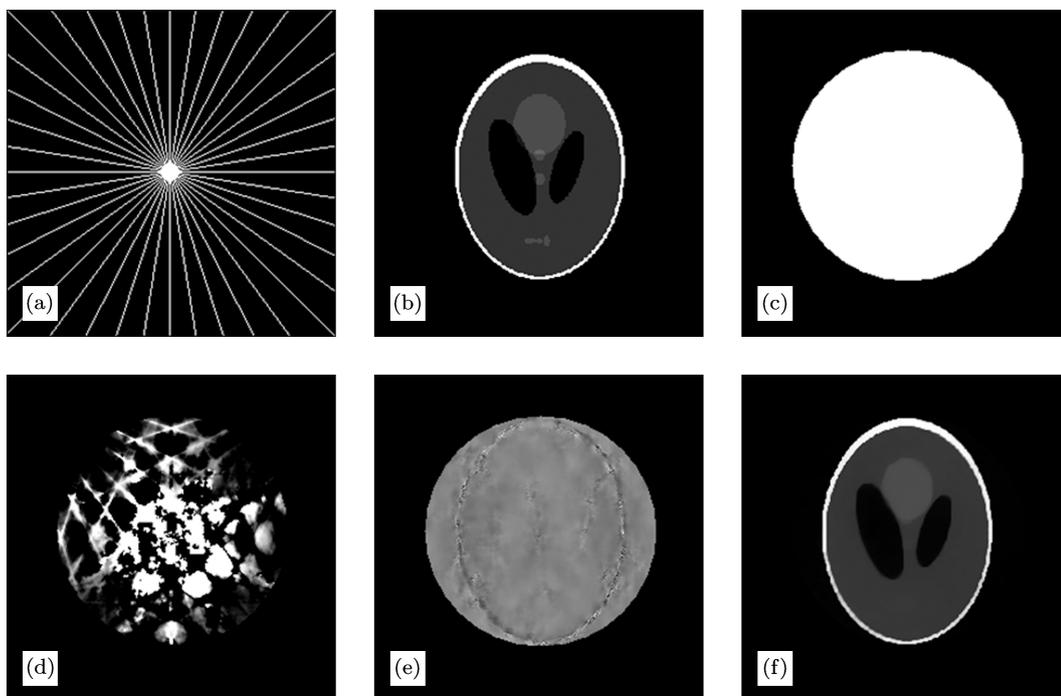


图 4 (a) 傅里叶面的采样模板; (b) 相位物体所调制的相位; (c) 激光光斑; (d) 直接逆投影重建相位; (e) 对采样直接使用 HIO 算法的结果相位; (f) 使用本文方法的结果相位

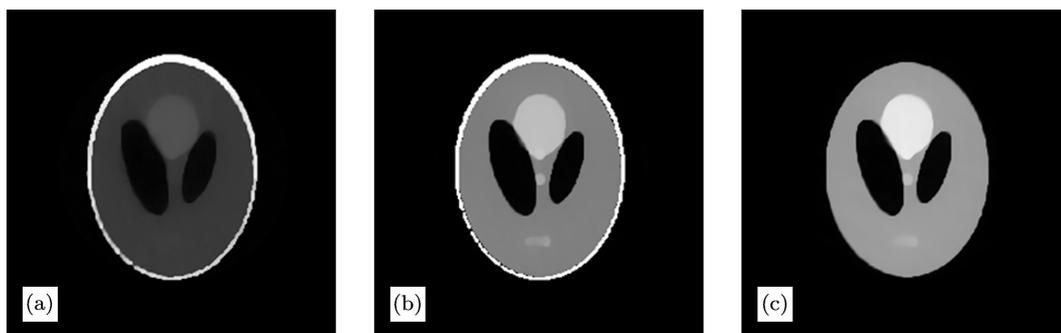


图 5 本文算法 (a) 最大相角变化 0.8π ; (b) 最大相角变化 1.6π ; (c) 最大相角变化 2π

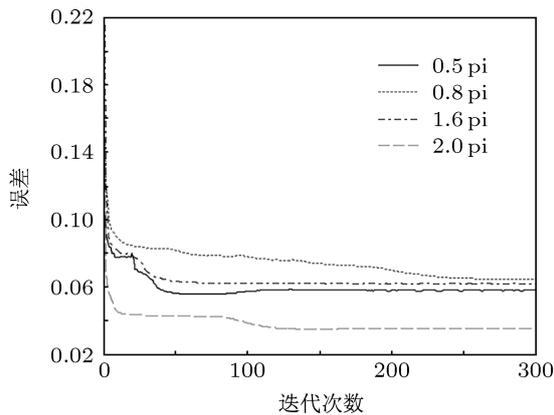


图6 不同相角范围下的误差曲线

4 小结

本文讨论了一种将压缩传感与相位恢复理论

相结合的方法,通过远小于传统相位恢复所需的采样来精确重建纯相位物体的相位分布.在给定的傅里叶采样之下,本文的迭代算法寻找满足傅里叶面幅值约束、物面支撑约束与纯相位约束的交叉约束集中,具有最小全变差的解.算法由传统的HIO算法变化而来,参照压缩传感最小全变差算法的两步迭代进行CS化改进,并在本文的仿真结果上显示出良好的效果和性能.压缩传感是一门新兴不久的理论,目前关于压缩传感在相位恢复领域以及其他光学领域的结合研究还不多,但是其潜在价值是显著的,在某些实时要求性很强的成像领域,不仅可大幅度降低衍射成像仪器的采样系统的复杂性与成本,同时也可以为光学重建算法开辟新的路径.本文算法主要考虑的是纯相位物体,实际应用中更一般的情况是具有复值分布的物体,这将是我们将进一步研究的问题.

-
- [1] Gerchberg R W, Saxton W O 1972 *Optik* **35** 237
 - [2] Fienup J R 1982 *Appl. Opt.* **21** 2758
 - [3] Yang G Z, Gu B Y 1981 *Acta Phys. Sin.* **30** 410 (in Chinese) [杨国桢, 顾本源 1981 物理学报 **30** 410]
 - [4] Candes E, Romberg J, Tao T 2006 *IEEE Trans. Info. Theory* **52** 489
 - [5] Donoho D 2006 *IEEE Trans. Info. Theory* **52** 1289
 - [6] Candes E, Tao T 2006 *IEEE Trans. Info. Theory* **52** 5406
 - [7] Gehm M E, John R, Brady D J, Willett R M, Schulz T J 2007 *Opt. Express* **15** 14013
 - [8] Moravec M L, Romberg J, Baraniuk R G 2007 *Proc. SPIE* **6701** 670120
 - [9] Chan W, Moravec M, Baraniuk R G, Mittleman D 2008 *Opt. Lett.* **33** 974
 - [10] Newton M C 2012 *Phys. Rev. E* **85** 056706
 - [11] Roman P, Marathay A S 1963 *Nuovo Cimento* **30** 1452
 - [12] Walther A 1963 *Opt. Acta* **10** 41
 - [13] Wolf E 1962 *Proc. Phys. Soc. London* **80** 1269
 - [14] Yu B, Peng X, Tian J D, Niu H B 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 2034 (in Chinese) [于斌, 彭翔, 田劲东, 牛憨笨 2005 物理学报 **54** 2034]
 - [15] Liao T H, Gao Q 2006 *Chin. Phys.* **15** 347
 - [16] Cong W X, Chen N X, Gu B Y 1998 *Chin. Phys. Lett.* **15** 24
 - [17] Zhou G Z, Dong Y J, Chen C, Ren Y Q, Wang Y D, Xiao T Q 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 028701 (in Chinese) [周光照, 佟亚军, 陈灿, 任玉琦, 王玉丹, 肖体乔 2011 物理学报 **60** 028701]
 - [18] Candes E, Tao T 2005 *IEEE Trans. Info. Theory* **51** 4203
 - [19] Rudin L I, Osher S, Fatemi E 1992 *Physica D* **60** 259
 - [20] Chambolle A 2004 *J. Math. Imaging. Vis.* **20** 89
 - [21] Stern A 2007 *Opt. Lett.* **32** 3077

Phase retrieval of pure phase object based on compressed sensing^{*}

Yang Zhen-Ya Zheng Chu-Jun[†]

(School of Physics and Telecommunication Engineering, South China Normal University, Guangzhou 510006, China)

(Received 26 October 2012; revised manuscript received 7 December 2012)

Abstract

Traditional phase retrieval algorithm, which iteratively reconstructs the phase from 2-intensity measurement or 1-intensity measurement, requires Shannon sampling theorem to be satisfied. This could lead to more requirements for data storage when high resolution imaging is concerned. In order to lower the sampling budget, in this paper we propose a compressed sensing based phase retrieval algorithm. Through 1-intensity measurement in Fourier plane, our improved Hybrid I/O algorithm is used to reconstruct the exact phase retribution of pure phase object. The algorithm proposed in this paper can reconstruct piecewise regular phase distributed pure phase object from far less amplitude measurements than ones for which the sampling theorem requires to be satisfied. The simulated data indicate that the algorithm has a good converge performance.

Keywords: phase retrieval, compressed sensing

PACS: 42.30.Rx, 42.30.Wb

DOI: 10.7498/aps.62.104203

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 10504008).

[†] Corresponding author. E-mail: cjzheng@scnu.edu.cn