# 非线性系统的非对角 Berry 相

杨志安†

(济南大学物理科学与技术学院, 济南 250022)

(2012 年 12 月 4 日收到; 2013 年 1 月 10 日收到修改稿)

研究了非线性系统中非对角情况的 Berry 相位, 给出了非线性非对角 Berry 相位的计算公式. 结果表明, 在非线性非对角情况下, 总相位包含有动力学相位, 通常意义的 Berry 相位, 以及非线性引起的附加相位. 此外, 还包含有非对角情况时所特有的新的附加项. 这新的一项表示, 当系统哈密顿慢变时产生的 Bogoliubov 涨落, 与另一个瞬时本征态之间的交叉效应, 进而对总的 Berry 相位产生影响. 作为应用, 对二能级玻色爱因斯坦凝聚体系, 具体计算了非线性非对角的 Berry 相位.

**关键词**: Berry 相位, 非对角, 绝热演化, 玻色爱因斯坦凝聚

**PACS:** 03.65.Vf, 03.75.Kk, 03.65.Ge **DOI:** 10.7498/aps.62.110302

## 1 引 言

近年来, 非线性量子力学在物理学中的作用正在逐渐增加. 例如对玻色 - 爱因斯坦凝聚 (BEC) 现象 [1−5], 其动力学方程是非线性的 Gross-Pitaevskii 方程; 又例如光束在非线性光子晶格中传播时, 其方程是含有饱和非线性的薛定谔方程 [6,7], 等等. 在线性系统中, 有关对角和非对角 Berry 相位问题引起了人们很大兴趣, 对其研究的热情延续至今 [8−12]. 在非线性系统中, 如何计算对角 Berry 相位, 已有讨论 [13−15]. 在此基础上, 文献 [16] 给出了 Berry 相与 Hannay 角之间的解析表达式, 文献 [17] 讨论了绝热几何相在临界点处的跃变. 但如何计算非线性非对角的 Berry 相位, 仍需进一步讨论.

## 2 非线性量子力学的非对角 Berry 相

### 2.1 非线性量子力学和非对角几何相

设系统的状态由波函数 $|\Phi\rangle$ 描述, 系统的哈密顿量是厄米的, 为

$$H^{+}+G^{+}(\Phi,\Phi^{*})=H+G(\Phi,\Phi^{*}), \tag{1}$$

式中 $H$ 是不含非线性项的哈密顿量, $G(\Phi,\Phi^{*})$ 是宗量为 $\Phi$ 和 $\Phi^{*}$ 的函数, 描述系统中的非线性行为. 系统的哈密顿量依赖一组外参数 $R(R_1,R_2,\cdots)$, 系统的动力学演化由无量纲非线性 Schrödinger方程 [3−5]

$$\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t}|\Phi\rangle=[H+G(\Phi,\Phi^{*})]|\Phi\rangle \tag{2}$$

支配, 方程 (2) 在第一类规范变换 $|\Phi\rangle\to\mathrm{e}^{\mathrm{i}\eta}|\Phi\rangle$ 下具有不变性, $\eta$ 为一常数. 规范对称意味着总粒子数守恒, 即 $\langle\Phi|\Phi\rangle=1$.

为讨论非对角的 Berry 相位, 需考虑系统的另一个状态 $\langle\Psi|$ 的影响, $\langle\Psi|$ 满足无量纲非线性 Schrödinger 方程

$$-\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t}\langle\Psi|=\langle\Psi|[H+G(\Psi,\Psi^{*})]. \tag{3}$$

设状态 $|\Phi\rangle$ 的投影空间矢量为 $|\varphi\rangle$, 状态 $\langle\Psi|$ 的投影空间矢量为 $\langle\psi|$, 系统的非对角 Berry 相位是 $\beta(\psi,\varphi)$, 把 $|\Phi\rangle=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\beta(\psi,\varphi)}|\varphi\rangle$ 和 $\langle\Psi|=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta(\psi,\varphi)}\langle\psi|$, 分别代入 (2), (3) 式得

$$\frac{\mathrm{d}\beta(\psi,\varphi)}{\mathrm{d}t}|\varphi\rangle=[H+G(\varphi,\varphi^{*})]|\varphi\rangle-\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t}|\varphi\rangle, \tag{4}$$

$$\frac{\mathrm{d}\beta(\psi,\varphi)}{\mathrm{d}t}\langle\psi|=\langle\psi|[H+G(\psi,\psi^{*})]$$

† 通讯作者. E-mail: ss_yangza@ujn.edu.cn

 

$$+\left(\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t}\langle\psi|\right). \tag{5}$$

为计算系统的非线性非对角 Berry 相 $\beta(\psi,\varphi)$, 对 (4) 式左乘 $\langle\psi|$, 对 (5) 式右乘 $|\varphi\rangle$, 考虑到当系统存在非线性时, $\langle\psi|\varphi\rangle$ 不一定为 0. 当 $\langle\psi|\varphi\rangle\neq 0$ 时, 对结果相加, 然后相再加上结果的厄米共轭, 得

$$\begin{aligned}&2\frac{\mathrm{d}\beta(\psi,\varphi)}{\mathrm{d}t}(\langle\psi|\varphi\rangle+\langle\varphi|\psi\rangle)\\ =&\langle\psi|[H+G(\varphi,\varphi^*)]|\varphi\rangle+\langle\psi|[H+G(\psi,\psi^*)]|\varphi\rangle\\ &+\langle\varphi|[H+G(\varphi,\varphi^*)]|\psi\rangle+\langle\varphi|[H+G(\psi,\psi^*)]|\psi\rangle\\ &-\mathrm{i}\left\langle\psi\left|\frac{\partial}{\partial t}\right|\varphi\right\rangle+\mathrm{i}\left(\frac{\partial}{\partial t}\left\langle\varphi\right|\right)|\psi\rangle\\ &-\mathrm{i}\left\langle\varphi\left|\frac{\partial}{\partial t}\right|\psi\right\rangle+\left(\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t}\left\langle\psi\right|\right)|\varphi\rangle,\end{aligned} \tag{6}$$

在 (6) 式的计算中要用到两个状态 $\psi$ 和 $\varphi$.

## 2.2 绝热近似和非对角 Berry 相

现在考虑外参数 $\boldsymbol{R}(R_1,R_2,\cdots)$ 经历一个绝热过程, 初始时刻处于本征态上的系统经过绝热演化后, 仍回到同一个本征态上, 仅在相位上发生改变, 这表明对 Berry 相的计算可在本征态上进行. 对非线性系统, 瞬时本征方程为

$$[H+G(\bar{\varphi},\bar{\varphi}^*)]|\bar{\varphi}\rangle=\mu(\bar{\varphi},\bar{\varphi}^*)|\bar{\varphi}\rangle. \tag{7}$$

方程 (7) 定义了非线性系统的瞬时本征函数 $|\bar{\varphi}\rangle$ 和本征值 $\mu(\bar{\varphi},\bar{\varphi}^*)$, 它们都是参数 $\boldsymbol{R}$ 的函数. 对另一个本征值 $\mu(\bar{\psi},\bar{\psi}^*)$ 和对应的本征态 $|\bar{\psi}\rangle$, 满足瞬时本征方程

$$[H+G(\bar{\psi},\bar{\psi})]|\bar{\psi}\rangle=\mu(\bar{\psi},\bar{\psi}^*)|\bar{\psi}\rangle. \tag{8}$$

对于非线性量子力学情况, 当 $\mu(\bar{\psi},\bar{\psi}^*)\neq\mu(\bar{\varphi},\bar{\varphi}^*)$ 时, $\langle\bar{\psi}|\bar{\varphi}\rangle$ 不一定为零.

在绝热近似下, 考虑参数矢量 $R$ 随时间缓慢变化, 且在参数空间形成闭合回路. 按文献 [15] 的方法, 引入量纲为一的绝热参数 $\varepsilon\approx\left|\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t}\right|$ 作为衡量参数变化快慢的尺度. 当绝热参数趋于零时, 可将波函数在瞬时本征态附近做绝热微扰展开 [15]:

$$|\varphi\rangle=|\bar{\varphi}\rangle+|\delta\varphi\rangle,\quad |\psi\rangle=|\bar{\psi}\rangle+|\delta\psi\rangle.$$

忽略掉高阶项, 即令

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\delta\varphi\rangle=0,\quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\delta\psi\rangle=0;$$
$$\frac{\mathrm{d}\beta(\psi,\varphi)}{\mathrm{d}t}|\delta\varphi\rangle=0,\quad \frac{\mathrm{d}\beta(\psi,\varphi)}{\mathrm{d}t}|\delta\psi\rangle=0.$$

当 $\langle\bar{\psi}|\bar{\varphi}\rangle\neq 0$ 时, 令 $C=\langle\bar{\psi}|\bar{\varphi}\rangle+\langle\bar{\varphi}|\bar{\psi}\rangle$. 利用本征方程 (7) 式和 (8) 式, (6) 式成为

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\beta(\bar{\psi},\bar{\varphi})}{\mathrm{d}t}=&\lambda_{\mathrm{D}}(\varepsilon^0)+\lambda_{\mathrm{B}}(\varepsilon^1)+\lambda_{\mathrm{BD}}(\varepsilon^1)\\ &+\lambda_{\mathrm{NL}}(\varepsilon^1)+o(\varepsilon^2).\end{aligned} \tag{9}$$

(9) 式中各项的意义如下, 等式右边第一项

$$\lambda_{\mathrm{D}}(\varepsilon^0)=\frac{1}{2}[\mu(\bar{\psi},\bar{\psi}^*)+\mu(\bar{\varphi},\bar{\varphi}^*)] \tag{10}$$

对应着动力学相位, 在非对角情况下, 与两个态 $\bar{\psi}$ 和 $\bar{\varphi}$ 的本征值有关. 等式右边第二项

$$\begin{aligned}\lambda_{\mathrm{B}}(\varepsilon^1)=&-\frac{\mathrm{i}}{2C}\mathrm{i}\left[\langle\bar{\psi}|\frac{\partial}{\partial t}|\bar{\varphi}\rangle-\left(\frac{\partial}{\partial t}\langle\bar{\varphi}|\right)|\bar{\psi}\rangle\right.\\ &\left.+\langle\bar{\varphi}|\frac{\partial}{\partial t}|\bar{\psi}\rangle-\left(\frac{\partial}{\partial t}\langle\bar{\psi}|\right)|\bar{\varphi}\rangle\right]\end{aligned} \tag{11}$$

是非对角情况下的 Berry 联络, 在线性情况下回到通常的 Berry 联络. 等式右边第三项为

$$\begin{aligned}\lambda_{\mathrm{BD}}(\varepsilon^1)=&\frac{1}{2C}\Big\{\mu(\bar{\varphi},\bar{\varphi}^*)\big(\langle\delta\psi|\bar{\varphi}\rangle+\langle\bar{\varphi}|\delta\psi\rangle\big)\\ &+\mu(\bar{\psi},\bar{\psi}^*)(\langle\bar{\psi}|\delta\varphi\rangle+\langle\delta\varphi|\bar{\psi}\rangle)\\ &+\langle\bar{\psi}|[H+G(\bar{\varphi},\bar{\varphi}^*)]|\delta\varphi\rangle\\ &+\langle\bar{\varphi}|[H+G(\bar{\psi},\bar{\psi}^*)]|\delta\psi\rangle\\ &+\langle\delta\psi|[H+G(\bar{\psi},\bar{\psi}^*)]|\bar{\varphi}\rangle\\ &+\langle\delta\varphi|[H+G(\bar{\varphi},\bar{\varphi}^*)]|\bar{\psi}\rangle\Big\},\end{aligned} \tag{12}$$

这一项是非对角情况所特有的, 不管系统是线性的或非线性的, 这一项都存在. 它表示在非对角情况下, 系统哈密顿慢变时产生的涨落不断积累, 引起系统中一个瞬时本征态与另一个本征态附近的涨落之间的交叉效应, 进而对总的 Berry 联络产生影响. 等式右边第四项为

$$\begin{aligned}\lambda_{\mathrm{NL}}(\varepsilon^1)=&\frac{1}{2C}\Big\{\langle\bar{\psi}|\Big[\frac{\partial G(\varphi,\varphi^*)}{\partial\varphi}\delta\varphi+\frac{\partial G(\varphi,\varphi^*)}{\partial\varphi^*}\delta\varphi^*\\ &+\frac{\partial G(\psi,\psi^*)}{\partial\psi}\delta\psi+\frac{\partial G(\psi,\psi^*)}{\partial\psi^*}\delta\psi^*\Big]|\bar{\varphi}\rangle\\ &+\langle\bar{\varphi}|\Big[\frac{\partial G(\varphi,\varphi^*)}{\partial\varphi}\delta\varphi+\frac{\partial G(\varphi,\varphi^*)}{\partial\varphi^*}\delta\varphi^*\\ &+\frac{\partial G(\psi,\psi^*)}{\partial\psi}\delta\psi\\ &+\frac{\partial G(\psi,\psi^*)}{\partial\psi^*}\delta\psi^*\Big]|\bar{\psi}\rangle\Big\},\end{aligned} \tag{13}$$

这一项是非线性系统所特有的, 这是因为非线性系统的哈密顿量显含瞬时波函数, 以至于本征态附近的 Bogoliubov 涨落能够反馈给哈密顿量, 并贡献出

一个具有几何性质的相位因子, 附加到总的 Berry 联络上. 在 (12) 和 (13) 式的计算中, 需要考虑涨落 $|\delta\psi\rangle$ 和 $|\delta\varphi\rangle$ 的影响.

当 $|\bar{\psi}\rangle$ 与 $|\bar{\varphi}\rangle$ 正交时, 即当 $\langle\bar{\psi}|\bar{\varphi}\rangle = 0$ 时, 将 (6) 式经在本征态附近展开, 展开式左边为

$$\frac{\mathrm{d}\beta(\bar{\psi},\bar{\varphi})}{\mathrm{d}t}(\langle\bar{\psi}|\bar{\varphi}\rangle + \langle\bar{\varphi}|\bar{\psi}\rangle) = \frac{\mathrm{d}\beta(\bar{\psi},\bar{\varphi})}{\mathrm{d}t} \times 0,$$

右边第一项为 $\lambda_{\mathrm{D}}(\varepsilon^0)(\langle\bar{\psi}|\bar{\varphi}\rangle + \langle\bar{\varphi}|\bar{\psi}\rangle) = \lambda_{\mathrm{D}}(\varepsilon^0) \times 0$, 因此不能计算 $\frac{\mathrm{d}\beta(\bar{\psi},\bar{\varphi})}{\mathrm{d}t}$ 和 $\lambda_{\mathrm{D}}(\varepsilon^0)$. 由于 (6) 式的右边相当于加了两遍, 来源于 (6) 式的 (13) 式右边也相当于加了两遍, 在 $\langle\bar{\psi}|\bar{\varphi}\rangle = 0$ 的情况下, (13) 式右边应除以 2, 所以这时取 $C = 2$. 可分别计算出联络 $\lambda_{\mathrm{B}}(\varepsilon^1)$, $\lambda_{\mathrm{BD}}(\varepsilon^1)$ 和 $\lambda_{\mathrm{NL}}(\varepsilon^1)$, 但其和仍为零, 即

$$\lambda_{\mathrm{B}}(\varepsilon^1) + \lambda_{\mathrm{BD}}(\varepsilon^1) + \lambda_{\mathrm{NL}}(\varepsilon^1) = 0.$$

结 论: 当 $\langle\bar{\psi}|\bar{\varphi}\rangle = 0$ 时, 总 的 非 对 角 Berry 相 位不存在.

### 2.3 对角 Berry 联络

在对角情况下, 只用到一个状态, 令 $\psi(\boldsymbol{R}) = \varphi(\boldsymbol{R})$. 瞬时本征波函数 $\bar{\psi}(\boldsymbol{R})$ 是归一化的 $\langle\bar{\psi}|\bar{\psi}\rangle = 1$, 这时常数 $C = \langle\bar{\psi}|\bar{\psi}\rangle + \langle\bar{\psi}|\bar{\psi}\rangle = 2$. 由归一化性质

$$\begin{aligned}1 =&\langle\psi|\psi\rangle = \langle\bar{\psi}+\delta\psi|\bar{\psi}+\delta\psi\rangle\\ =&1 + \langle\bar{\psi}|\delta\psi\rangle + \langle\delta\psi|\bar{\psi}\rangle + o(\langle\delta\psi|\delta\psi\rangle),\end{aligned}$$

忽略掉上式中的高阶项, 比较两边得

$$\langle\bar{\psi}|\delta\psi\rangle + \langle\delta\psi|\bar{\psi}\rangle = 0. \tag{14}$$

(14) 式表明瞬时本征波函数 $|\bar{\psi}\rangle$ 与该瞬时本征波函数附近的涨落 $|\delta\psi\rangle$ 之间是正交的. 由此易证 $\lambda_{\mathrm{BD}}(\varepsilon^1) = 0$, 这意味着在对角情况下, 在瞬时本征态附近涨落的积累对该瞬时本征态的反馈效应, 对总的 Berry 联络不产生影响. 我们得到对角情况下的 Berry 联络计算公式

$$\frac{\mathrm{d}\beta(\bar{\psi},\bar{\varphi})}{\mathrm{d}t} = \lambda_{\mathrm{D}}(\varepsilon^0) + \lambda_{\mathrm{B}}(\varepsilon^1) + \lambda_{\mathrm{NL}}(\varepsilon^1), \tag{15}$$

式中 $\lambda_{\mathrm{D}}(\varepsilon^0) = \mu(\bar{\psi},\bar{\psi}^*)$ 对应于动力学联络,

$$\begin{aligned}\lambda_{\mathrm{B}}(\varepsilon^1) =& -\frac{i}{2}\big[\langle\bar{\psi}(\boldsymbol{R})|\nabla_R|\bar{\psi}(\boldsymbol{R})\rangle\\ &- (\nabla_R\langle\bar{\psi}(\boldsymbol{R})|)|\bar{\psi}(\boldsymbol{R})\rangle\big]\end{aligned}$$

与线性时的 Berry 联络在形式上相同, 符号 $\nabla_R = \frac{\partial}{\partial\boldsymbol{R}}$; (15) 式中等式右边第 3 项联络 $\lambda_{\mathrm{NL}}(\varepsilon^1)$ 表达式为

$$\begin{aligned}\lambda_{\mathrm{NL}}(\varepsilon^1) =&\langle\bar{\psi}|\bigg[\frac{\partial G(\psi,\psi^*)}{\partial\psi}\delta\psi\\ &+ \frac{\partial G(\psi,\psi^*)}{\partial\psi^*}\delta\psi^*\bigg]|\bar{\psi}\rangle\end{aligned}$$

表示非线性效应对几何相的影响.

## 3 非线性系统非对角 Berry 相的正则变量表示

### 3.1 量子态的正则变量表示

为了定量计算出 Berry 相, 我们引入正交基矢 $|j\rangle$, 用 $\varphi_j$ 表示态矢 $|\varphi\rangle$ 的第 $j$ 个分量的概率幅, 即 $\varphi_j = \langle j|\varphi\rangle$, 用 $\psi_j$ 表示另一个波函数 $|\psi\rangle$ 的第 $j$ 个分量的概率幅, 即 $\psi_j = \langle j|\psi\rangle$, 波函数可写成列向量

$$\begin{aligned}|\varphi\rangle &= (\varphi_1,\varphi_2,\cdots\varphi_N)^\tau \equiv \varphi,\\ |\psi\rangle &= (\psi_1,\psi_2,\cdots\psi_N)^\tau \equiv \psi.\end{aligned}$$

在矩阵形式下, 系统的哈密顿量为 $H_{jk} + G_{jk}(\varphi,\varphi^*)$ 和 $H_{jk} + G_{jk}(\psi,\psi^*)$.

对量子力学系统, 又可用经典形式的哈密顿系统表示. 令量子态 $|\varphi\rangle$ 的第 $j$ 个分量为 $\varphi_j = \sqrt{n_j}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_j}$, 可取 $(n_j,\theta_j)$ 为经典形式的正则变量. 定义矢量 $(n,\theta)^{\mathrm{T}} = (n_1,\theta_1,n_2,\theta_2,\cdots n_N,\theta_N)^{\mathrm{T}}$, 代入方程 (2), 令实部与虚部分别相等, 并考虑归一化条件 $\sum_{j=1}^{N} n_j = 1$, 得到

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}n_j}{\mathrm{d}t} =&f_j(n,\theta) = 2\sqrt{n_j}\sum_{k=l}^{N}\sqrt{n_k}\mathrm{Im}\big\{[H_{jk}\\ &+ G_{jk}(n,\theta)]\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_k-\theta_j)}\big\},\end{aligned} \tag{16}$$

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\theta_j}{\mathrm{d}t} =&h_j(n,\theta) = \frac{-1}{\sqrt{n_j}}\sum_{k=l}^{N}\sqrt{n_k}\mathrm{Im}\big\{[H_{jk}\\ &+ G_{jk}(n,\theta)]\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_k-\theta_j)}\big\}.\end{aligned} \tag{17}$$

方程 (16) 和 (17) 是非线性 Schrödinger 方程 (2) 的经典哈密顿正则形式. 不论 Schrödinger 方程是否是非线性的, 都可得到这种正则形式. 本征方程对应于经典哈密顿正则方程 (16) 和 (17) 的不动点, 即

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}n_j}{\mathrm{d}t} &= 0 \Longrightarrow f_j(\bar{n},\bar{\theta}) = 0;\\ \frac{\mathrm{d}\theta_j}{\mathrm{d}t} &= 0 \Longrightarrow h_j(\bar{n},\bar{\theta}) = 0.\end{aligned} \tag{18}$$

通过求解不动点方程 (18), 可以得到本征态 $(\bar{n},\bar{\theta})$.

## 3.2 涨落的计算

为了给出涨落的计算公式, 可在本征态 $(\bar{n},\bar{\theta})$ 附近做绝热近似展开 [15]

$$n_j=\bar{n}_j(\boldsymbol{R})+\delta n_j,\quad \theta_j=\bar{\theta}_j(\boldsymbol{R})+\delta\theta_j, \tag{19}$$

式中 $(\bar{n}_j(\boldsymbol{R},\bar{\theta}_j(\boldsymbol{R}))$, 是随参数 $\boldsymbol{R}$ 绝热演化的瞬时本征态, $[\delta n_j(\boldsymbol{R}),\delta\theta_j(\boldsymbol{R})]$ 是依赖于绝热参数 $\boldsymbol{R}$ 且量级为 $\varepsilon\approx\left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{R}}{\mathrm{d}t}\right|$ 的涨落. 将展开 (19) 式代入方程 (16) 和 (17), 忽略高阶小量 $\frac{\mathrm{d}\delta n_j}{\mathrm{d}t},\frac{\mathrm{d}\delta\theta_j}{\mathrm{d}t}$, 得到

$$\begin{pmatrix}\frac{\mathrm{d}\bar{n}_k}{\mathrm{d}\boldsymbol{R}}\\ \frac{\mathrm{d}\bar{\theta}_k}{\mathrm{d}\boldsymbol{R}}\end{pmatrix}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{R}}{\mathrm{d}t}=\sum_{k=1}^{N}L_{jk}\begin{pmatrix}\delta n_j\\ \delta\theta_j\end{pmatrix},$$

$$L_{jk}=\begin{pmatrix}\frac{\partial f_j}{\partial n_k} & \frac{\partial f_j}{\partial\theta_k}\\ \frac{\partial h_j}{\partial n_k} & \frac{\partial h_j}{\partial\theta_k}\end{pmatrix}. \tag{20}$$

取 (20) 式的逆运算, 涨落就表示成

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}\delta n_j\\ \delta\theta_j\end{pmatrix}&=\sum_{k=1}^{N}L_{jk}^{-1}\begin{pmatrix}\frac{\mathrm{d}\bar{n}_k}{\mathrm{d}\boldsymbol{R}}\\ \frac{\mathrm{d}\bar{\theta}_k}{\mathrm{d}\boldsymbol{R}}\end{pmatrix}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{R}}{\mathrm{d}t}\\ &=\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{|L_{jk}|}\begin{pmatrix}\frac{\partial h_j}{\partial\theta_k} & -\frac{\partial f_j}{\partial\theta_k}\\ -\frac{\partial h_j}{\partial n_k} & \frac{\partial f_j}{\partial n_k}\end{pmatrix}\\ &\quad\times\begin{pmatrix}\frac{\mathrm{d}\bar{n}_k}{\mathrm{d}\boldsymbol{R}}\\ \frac{\mathrm{d}\bar{\theta}_k}{\mathrm{d}\boldsymbol{R}}\end{pmatrix}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{R}}{\mathrm{d}t},\end{aligned} \tag{21}$$

式中 $|L_{jk}|$ 是矩阵 $L_{jk}$ 的行列式, $L_{jk}^{-1}$ 是矩阵 $L_{jk}$ 的逆.

为讨论非对角几何相, 可取满足方程 (18) 的另一个本征态 $(\bar{m}_j,\bar{\alpha}_j)$. 定义矢量 $(\bar{m},\bar{\alpha})^{\mathrm{T}}=(\bar{m}_1,\bar{\alpha}_1,\bar{m}_2,\bar{\alpha}_2,\cdots,\bar{m}_N,\bar{\alpha}_N)^{\mathrm{T}}$, 得到常数 $C$ 为

$$\begin{aligned}C&=\langle\bar{\psi}|\bar{\varphi}\rangle+\langle\bar{\varphi}|\bar{\psi}\rangle=\sum_j(\bar{\psi}_j^*\bar{\varphi}_j+\bar{\psi}_j\bar{\varphi}_j^*)\\ &=2\sum_j\sqrt{\bar{m}_j\bar{n}_j}\cos(\bar{\theta}_j-\bar{\alpha}_j),\end{aligned} \tag{22}$$

代入 (9)—(13) 式, 我们得到由经典正则变量 $(\bar{n}_j,\bar{\theta}_j)$ 和 $(\bar{m}_j,\bar{\alpha}_j)$ 表示的 Berry 联络的计算公式

$$\begin{aligned}\lambda_{\mathrm{B}}(\varepsilon^1)=&\frac{1}{2C}\sum_{j=1}^{N}\bigg[\sin(\bar{\theta}_j-\bar{\alpha}_j)\bigg(\sqrt{\bar{m}_j}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\boldsymbol{R}}\sqrt{\bar{n}_j}\\ &-\sqrt{\bar{n}_j}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\boldsymbol{R}}\sqrt{\bar{m}_j}\bigg)+2\sqrt{\bar{m}_j\bar{n}_j}\\ &\times\cos(\bar{\theta}_j-\bar{\alpha}_j)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\boldsymbol{R}}(\bar{\alpha}_j+\bar{\theta}_j)\bigg]\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{R}}{\mathrm{d}t}.\end{aligned} \tag{23}$$

动力学与 Berry 相之间的交叉效应的 (12) 式变成

$$\begin{aligned}\lambda_{\mathrm{BD}}(\varepsilon^1)=&\frac{1}{2C}\bigg\{\mu(\bar{n},\bar{\theta})\sum_{j=1}^{N}\bigg[\sqrt{\frac{\bar{n}_j}{\bar{m}_j}}\cos(\bar{\theta}_j-\bar{\alpha}_j)\delta m_j\\ &+\sqrt{\bar{m}_j\bar{n}_j}\sin(\bar{\theta}_j-\bar{\alpha}_j)\delta\alpha_j\bigg]\\ &+\mu(\bar{m},\bar{\alpha})\sum_{j=1}^{N}\bigg[\sqrt{\frac{\bar{m}_j}{\bar{n}_j}}\cos(\bar{\theta}_j-\bar{\alpha}_j)\delta n_j\\ &-\sqrt{\bar{m}_j\bar{n}_j}\sin(\bar{\theta}_j-\bar{\alpha}_j)\delta\theta_j\bigg]\\ &+\sum_{j,k=1}^{N}\bigg[\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\bar{m}_j}{\bar{n}_k}}\delta n_k\\ &+\mathrm{i}\sqrt{\bar{m}_j\bar{n}_k}\delta\theta_k\bigg]\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\bar{\theta}_k-\bar{\alpha}_j)}\\ &+\bigg[\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\bar{m}_k}{\bar{n}_j}}\delta n_j-\mathrm{i}\sqrt{\bar{m}_k\bar{n}_j}\delta\theta_j\bigg]\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\bar{\theta}_j-\bar{\alpha}_k)}\\ &\times[(H_{jk}+G_{jk}(\bar{n},\bar{\theta})]\\ &+\sum_{j,k,l=1}^{N}\bigg[\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\bar{n}_j}{\bar{m}_k}}\delta m_k\\ &+\mathrm{i}\sqrt{\bar{m}_k\bar{n}_j}\delta\alpha_k\bigg]\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\bar{\theta}_j-\bar{\alpha}_k)}\\ &+\bigg[\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\bar{n}_k}{\bar{m}_j}}\delta m_j-\mathrm{i}\sqrt{\bar{m}_j\bar{n}_k}\delta\alpha_j\bigg]\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\bar{\theta}_j-\bar{\alpha}_k)}\\ &\times[(H_{jk}+G_{jk}(\bar{m},\bar{\alpha})]\bigg\}.\end{aligned} \tag{24}$$

非线性效应对总的 Berry 联络的影响 (13) 式可改写为

$$\begin{aligned}\lambda_{\mathrm{NL}}(\varepsilon^1)=&\frac{1}{2C}\sum_{j,k,l,v=1}^{N}\Big[\sqrt{\bar{m}_j\bar{n}_k}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\bar{\theta}_k-\bar{\alpha}_j)}\\ &+\sqrt{\bar{m}_k\bar{n}_j}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\bar{\theta}_j-\bar{\alpha}_k)}\Big]\\ &\times\bigg[\frac{\partial G_{jk}(\bar{n},\bar{\theta})}{\partial n_l}\delta n_l+\frac{\partial G_{jk}(\bar{n},\bar{\theta})}{\partial\theta_l}\delta\theta_l\\ &+\frac{\partial G_{jk}(\bar{m},\bar{\alpha})}{\partial m_l}\delta m_l\\ &+\frac{\partial G_{jk}(\bar{m},\bar{\alpha})}{\partial\alpha_l}\delta\alpha_l\bigg].\end{aligned} \tag{25}$$

(24) 和 (25) 式中的涨落 $\delta n_l,\delta\theta_l,\delta m_l$ 和 $\delta\alpha_l$ 由 (21) 式确定.

### 3.3 非线性对角 Berry 联络的正则变量表示

在对角情况下, 取 $\bar{m}_j=\bar{n}_j$, $\bar{\alpha}_j=\bar{\theta}_j$, 本征值 $\mu(\bar{r},\bar{\alpha})=\mu(\bar{s},\bar{\theta})$, 并且瞬时本征波函数 $\bar{\varphi}(\boldsymbol{R})$ 是归一化的 $\int\bar{\varphi}^*(\boldsymbol{R})\bar{\varphi}(\boldsymbol{R})\mathrm{d}\tau=1$, 波函数与涨落之间满足正交关系 (14) 式, 得到非线性对角 Berry 相位 $\beta=\beta_{\mathrm{D}}+\beta_{\mathrm{B}}+\beta_{\mathrm{NL}}$, 式中 $\beta_{\mathrm{D}}=\mu$ 是动力学相位, $\beta_{\mathrm{B}}=\sum\limits_{j=1}^{N}\oint\left(\bar{n}_j\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\boldsymbol{R}}\bar{\theta}_j\right)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{R}$ 与通常的 Berry 相位对应, 非线性引起的附加相位为

$$\beta_{\mathrm{NL}}=\frac{1}{2}\int\sum_{j,k,l=1}^{N}\sqrt{\bar{n}_j\bar{n}_k}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\bar{\theta}_k-\bar{\theta}_j)}\times\left[\frac{\partial G_{jk}(v)}{\partial n_l}\delta n_l+\frac{\partial G_{jk}(v)}{\partial\theta_l}\delta\theta_l\right]\mathrm{d}t,$$

这里的表达式与已有的结果 [15] 相同.

## 4 二能级系统的非线性非对角 Berry相

### 4.1 二能级系统方程的经典正则形式

为了对以上的理论有一个明确的结果, 我们以 2 能级系统为例进行讨论. 对 2 能级系统, 因为 $N=2$, $n_1+n_2=1$, 方程 (16) 和 (17) 中, 只有两个是独立的, 令 $s=n_2-n_1$, $\theta_1=0$, $\theta=\theta_2$, 并令 $=f_2-f_1$, $h(s,\theta)=h_2-h_1$ 得到

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}&=f(s,\theta)\\&=\sqrt{1-s^2}\Big\{\mathrm{Im}[(H_{21}+G_{21}(s,\theta))\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}]\\&\quad-\mathrm{Im}[(h_{12}+G_{12}(s,\theta))\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}]\Big\},\end{aligned}\tag{26}$$

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}&=h(s,\theta)\\&=-[H_{22}+G_{22}(s,\theta)-H_{11}-G_{11}(s,\theta)]\\&\quad-\sqrt{\frac{1-s}{1+s}}\mathrm{Re}\big\{[H_{21}+G_{21}(s,\theta)]\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\big\}\\&\quad+\sqrt{\frac{1+s}{1-s}}\mathrm{Re}\big\{[H_{21}+G_{21}(s,\theta)]\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\big\}.\end{aligned}\tag{27}$$

方程 (26), (27) 是二能级系统方程的经典正则形式.

### 4.2 二能级系统本征态和涨落的正则变量表示

对二能级系统, 设本征态用 $(\bar{s},\bar{\theta})$ 表示. 本征态对应于经典正则方程 (26) 和 (27) 的不动点. 在不动点 $(\bar{s},\bar{\theta})$ 处的线性化方程是

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix}\bar{s}\\ \bar{\theta}\end{pmatrix}&=\begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial s}&\frac{\partial f}{\partial\theta}\\ \frac{\partial h}{\partial s}&\frac{\partial h}{\partial\theta}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\delta s\\ \delta\theta\end{pmatrix}\\&=L\begin{pmatrix}\delta s\\ \delta\theta\end{pmatrix},\end{aligned}\tag{28}$$

式中 $L$ 是线性化方程在不动点 $(\bar{s},\bar{\theta})$ 处的雅可比矩阵, 由此求出涨落为

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}\delta s\\ \delta\theta\end{pmatrix}&=L^{-1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix}\bar{s}\\ \bar{\theta}\end{pmatrix}\\&=\frac{1}{|L|}\begin{pmatrix}\frac{\partial h}{\partial\theta}&-\frac{\partial f}{\partial\theta}\\ -\frac{\partial h}{\partial s}&\frac{\partial f}{\partial s}\end{pmatrix}\\&\quad\times\begin{pmatrix}\frac{\mathrm{d}\bar{s}}{\mathrm{d}\boldsymbol{R}}\\ \frac{\mathrm{d}\bar{\theta}}{\mathrm{d}\boldsymbol{R}}\end{pmatrix}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{R}}{\mathrm{d}t},\end{aligned}\tag{29}$$

式中 $L^{-1}$ 是矩阵 $L$ 的逆,$|L|$ 是矩阵 $L$ 的行列式. 同理可以得到在不动点 $(\bar{r},\bar{\alpha})$ 处的线性化方程和涨落, 此处省略.

### 4.3 二能级系统非线性非对角 Berry 联络的正则变量表示

在正则变量下, 当 $\langle\bar{\psi}|\bar{\varphi}\rangle\neq0$ 时, 常数

$$\begin{aligned}C(\bar{r},\bar{s})=&\sqrt{(1-\bar{r})(1-\bar{s})}\\&+\sqrt{(1+\bar{r})(1+\bar{s})}\cos(\bar{\theta}-\bar{\alpha})\neq0;\end{aligned}$$

当 $\langle\bar{\psi}|\bar{\varphi}\rangle=0$ 时, 取 $C(\bar{r},\bar{s})=2$. Berry 相位计算公式为

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\beta(\bar{r},\bar{s})}{\mathrm{d}t}=&\lambda_{\mathrm{D}}(\bar{r},\bar{s})+\lambda_{\mathrm{B}}(\bar{r},\bar{s})\\&+\lambda_{\mathrm{BD}}(\bar{r},\bar{s})+\lambda_{\mathrm{NL}}(\bar{r},\bar{s}),\end{aligned}\tag{30}$$

式中

$$\lambda_{\mathrm{D}}(\bar{r},\bar{s})=\frac{1}{2}[\mu(\bar{s},\bar{\theta})+\mu(\bar{r},\bar{\alpha})],\tag{31}$$

$\lambda_{\mathrm{D}}(\bar{r},\bar{s})$ 的积分给出动力学相位; (30) 式右边第二项为

$$\begin{aligned}\lambda_{\mathrm{B}}(\bar{r},\bar{s})=&\frac{1}{2C}\left[\frac{1}{2}\sin(\bar{\theta}-\bar{\alpha})\left(\sqrt{\frac{1+\bar{r}}{1+\bar{s}}}\frac{\mathrm{d}\bar{s}}{\mathrm{d}\boldsymbol{R}}\right.\right.\\&\left.-\sqrt{\frac{1+\bar{s}}{1+\bar{r}}}\frac{\mathrm{d}\bar{r}}{\mathrm{d}\boldsymbol{R}}\right)+\sqrt{(1+\bar{r})(1+\bar{s})}\\&\left.\times\cos(\bar{\theta}-\bar{\alpha})\frac{\mathrm{d}(\bar{\theta}+\bar{\alpha})}{\mathrm{d}t}\right]\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{R}}{\mathrm{d}t}.\end{aligned}\tag{32}$$

$\lambda_{\mathrm{B}}(\bar{r},\bar{s})$ 是二能级系统的 Berry 联络, 其在参数空间上的积分给出通常意义上的 Berry 相位; (30) 式右边第 3 项为

$$\begin{aligned}\lambda_{\mathrm{B}}(\bar{s},\bar{r}) =& \frac{1}{4C}\mu(\bar{s},\bar{\theta})\left[\sqrt{\frac{1+\bar{s}}{1+\bar{r}}}\cos(\bar{\theta}-\bar{\alpha})\delta r\right.\\ &-\sqrt{\frac{1-\bar{s}}{1-\bar{r}}}\delta r+2\sqrt{(1+\bar{r})(1+\bar{s})}\\ &\left.\times\sin(\bar{\theta}-\bar{\alpha})\delta\alpha\right]+\frac{1}{4C}\mu(\bar{r},\bar{\alpha})\\ &\times\left[\sqrt{\frac{1+\bar{r}}{1+\bar{s}}}\cos(\bar{\theta}-\bar{\alpha})\delta s-\sqrt{\frac{1-\bar{r}}{1-\bar{s}}}\delta s\right.\\ &\left.-2\sqrt{(1+\bar{r})(1+\bar{s})}\sin(\bar{\theta}-\bar{\alpha})\delta\theta\right]\\ &-\frac{1}{4C}\sqrt{\frac{1-\bar{s}}{1-\bar{r}}}[H_{11}+G_{11}(\bar{r}\bar{\alpha})]\delta r\\ &+\frac{1}{8C}\left\{\left(\sqrt{\frac{1-\bar{s}}{1+\bar{r}}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\bar{\alpha}}-\sqrt{\frac{1+\bar{s}}{1-\bar{r}}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\bar{\theta}}\right)\right.\\ &\times[H_{12}+G_{12}(\bar{r}\bar{\alpha})]\\ &+\left(\sqrt{\frac{1+\bar{s}}{1-\bar{r}}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\bar{\alpha}}-\sqrt{\frac{1-\bar{s}}{1+\bar{r}}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\bar{\theta}}\right)\\ &\left.\times[H_{21}+G_{21}(\bar{r}\bar{\alpha})]\right\}\delta r\\ &+\frac{\mathrm{i}}{4C}\sqrt{(1+\bar{r})(1-\bar{s})}\left\{[H_{12}+G_{12}(\bar{r}\bar{\alpha})]\mathrm{e}^{\mathrm{i}\bar{\alpha}}\right.\\ &\left.-[H_{21}+G_{21}(\bar{r}\bar{\alpha})]\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\bar{\alpha}}\right\}\delta\alpha\\ &\frac{1}{4C}\left[\left(\sqrt{\frac{1+\bar{s}}{1+\bar{r}}}\cos(\bar{\theta}-\bar{\alpha})\delta r\right.\right.\\ &\left.+2\sqrt{(1+\bar{r})(1+\bar{s})}\sin(\bar{\theta}-\bar{\alpha})\delta\alpha\right]\\ &\left.\times[H_{22}+G_{22}(\bar{r},\bar{\alpha})]\right\}\\ &-\frac{1}{4C}\sqrt{\frac{1-\bar{r}}{1-\bar{s}}}[H_{11}+G_{11}(\bar{s},\bar{\theta})]\delta s\\ &+\frac{1}{8C}\left\{\left(\sqrt{\frac{1-\bar{r}}{1+\bar{s}}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\bar{\theta}}-\sqrt{\frac{1+\bar{r}}{1-\bar{s}}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\bar{\alpha}}\right)\right.\\ &\times[H_{12}+G_{12}(\bar{s},\bar{\theta})]\\ &+\left(\sqrt{\frac{1-\bar{r}}{1+\bar{s}}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\bar{\theta}}-\sqrt{\frac{1+\bar{r}}{1-\bar{s}}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\bar{\alpha}}\right)\\ &\left.\times[H_{21}+G_{21}(\bar{s},\bar{\theta})]\right\}\delta s\\ &+\frac{\mathrm{i}}{4C}\left\{\sqrt{(1-\bar{r})(1+\bar{s})}\right.\\ &\times\left\{[H_{12}+G_{12}(\bar{s},\bar{\theta})]\mathrm{e}^{\mathrm{i}\bar{\theta}}\right.\\ &\left.-[H_{21}+G_{21}(\bar{s},\bar{\theta})]\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\bar{\theta}}\right\}\delta\theta\\ &+\frac{1}{4C}\left[\left(\sqrt{\frac{1+\bar{r}}{1+\bar{s}}}\cos(\bar{\theta}-\bar{\alpha})\delta s\right.\right.\\ &\left.-2\sqrt{(1+\bar{r})(1+\bar{s})}\sin(\bar{\theta}-\bar{\alpha})\delta\theta\right]\\ &\left.\times[H_{22}+G_{22}(\bar{s},\bar{\theta})]\right\}.\end{aligned}\tag{33}$$

这一项是非线性非对角情况所特有的, 它反映了系统哈密顿慢变时, 在一个瞬时本征态附近产生的涨落, 与另一个瞬时本征态之间产生的交叉效应, 进而对总的 Berry 联络所产生的影响. (30) 式右边第 4 项为

$$\begin{aligned}\lambda_{\mathrm{NL}}(\varepsilon^1) =& \frac{1}{2C}\sqrt{(1-\bar{r})(1-\bar{s})}\\ &\times\left[\frac{\partial G_{11}(\bar{s},\bar{\theta})}{\partial s}\delta s+\frac{\partial G_{11}(\bar{s},\bar{\theta})}{\partial\theta}\delta\theta\right.\\ &\left.+\frac{\partial G_{11}(\bar{r},\bar{\alpha})}{\partial r}\delta r+\frac{\partial G_{11}(\bar{r},\bar{\alpha})}{\partial\alpha}\delta\alpha\right]\\ &+\frac{1}{2}\left[\sqrt{(1-\bar{r})(1+\bar{s})}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\bar{\theta}}\right.\\ &\left.+\sqrt{(1+\bar{r})(1-\bar{s})}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\bar{\alpha}}\right]\\ &\times\left[\frac{\partial G_{12}(\bar{s},\bar{\theta})}{\partial s}\delta s+\frac{\partial G_{12}(\bar{s},\bar{\theta})}{\partial\theta}\delta\theta\right.\\ &\left.+\frac{\partial G_{12}(\bar{r},\bar{\alpha})}{\partial r}\delta r+\frac{\partial G_{12}(\bar{r},\bar{\alpha})}{\partial\alpha}\delta\alpha\right]\\ &+\frac{1}{2}\left[\sqrt{(1-\bar{r})(1+\bar{s})}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\bar{\theta}}\right.\\ &\left.+\sqrt{(1+\bar{r})(1-\bar{s})}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\bar{\alpha}}\right]\\ &\times\left[\frac{\partial G_{21}(\bar{s},\bar{\theta})}{\partial s}\delta s+\frac{\partial G_{21}(\bar{s},\bar{\theta})}{\partial\theta}\delta\theta\right.\\ &\left.+\frac{\partial G_{21}(\bar{r},\bar{\alpha})}{\partial r}\delta r+\frac{\partial G_{21}(\bar{r},\bar{\alpha})}{\partial\alpha}\delta\alpha\right]\\ &\left[\sqrt{(1+\bar{r})(1+\bar{s})}\cos(\bar{\theta}-\bar{\alpha})\right]\\ &\times\left[\frac{\partial G_{22}(\bar{s},\bar{\theta})}{\partial s}\delta s+\frac{\partial G_{22}(\bar{s},\bar{\theta})}{\partial\theta}\delta\theta\right.\\ &\left.+\frac{\partial G_{22}(\bar{r},\bar{\alpha})}{\partial r}\delta r+\frac{\partial G_{22}(\bar{r},\bar{\alpha})}{\partial\alpha}\delta\alpha\right],\end{aligned}\tag{34}$$

这一项表示系统的非线性效应对 Berry 联络的影响.

# 5 应 用

## 5.1 二能级 BEC 的方程和本征值

二能级 BEC 的哈密顿 [5,6,9,15−20]

$$H(s,\theta)=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-gs & \sigma\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}\\ \sigma\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} & gs\end{pmatrix}. \tag{35}$$

外参量为 $\boldsymbol{R}=(\sigma,\varphi,g)$, 其中 $g$ 描述系统非线性效应的强度, $\sigma$ 是二能级之间的耦合强度, $\varphi$ 是外场在 $x$-$y$ 平面上的投影与 $x$ 轴之间的夹角. 二能级 BEC 方程的正则变量形式为 [5,6,9,15−20]

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=-\sigma\sqrt{1-s^2}\sin(\theta-\varphi), \tag{36}$$

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=-gs+\frac{\sigma s}{\sqrt{1-s^2}}\cos(\theta-\varphi). \tag{37}$$

令方程 (36) 和 (37) 等于 0 得不动点 (本征态) 方程

$$f(s,\theta)=-\sigma\sqrt{1-s^2}\sin(\theta-\varphi)=0, \tag{38}$$

$$h(s,\theta)=-gs+\frac{s}{\sqrt{1-s^2}}\cos(\theta-\varphi)=0. \tag{39}$$

本征值方程为

$$\mu^2-g\mu+\frac{1}{4}g^2(1-\bar{s}^2)-\frac{1}{4}\sigma^2=0,$$

可解出本征值

$$\mu_{\pm}=\frac{1}{2}(g\pm\sqrt{\sigma^2+g^2\bar{s}^2}).$$

与线性方程不同的是, 求解本征值时, 需要知道不动点 $\bar{s}$ 的取值.

对线性情况, 令 $g=0$, 可解出 2 个本征值 $\mu_{1,2}=\mp\frac{1}{2}\sigma$. 对本征值 $\mu_1=-\frac{1}{2}\sigma$, 对应于稳定的椭圆不动点 $(\bar{s}_1=0,\bar{\theta}_1=\varphi+\pi)$, 不动点的指数为 1; 对本征值 $\mu_2=\frac{1}{2}\sigma$, 对应于稳定的椭圆不动点 $(\bar{s}_2=0,\bar{\theta}_2=\varphi)$, 不动点的指数为 1. 不动点的指数和为欧拉示性数 $\chi=1+1=2$.

为讨论非线性非对角的 Berry 相位, 考虑较强的非线性情况, 即 $g\geqslant\sigma$. 可解出 4 个本征值 $\mu_{1,2}=\mp\frac{1}{2}\sigma$ 和 $\mu_{\pm}=\pm\frac{1}{2}g$. 对本征值 $\mu_1=-\frac{1}{2}\sigma$, 对应于稳定的椭圆不动点 $(\bar{s}_1=0,\bar{\theta}_1=\varphi+\pi)$, 不动点的指数为 1; 对本征值 $\mu_2=\frac{1}{2}\sigma$, 对应于不稳定的双曲不动点 $(\bar{s}_2=0,\bar{\theta}_2=\varphi)$, 不动点的指数为 1, 这个不动点不满足绝热性要求, 计算时不考虑; 对本征值 $\mu_+=\frac{1}{2}g$, 对应有两个稳定的椭圆不动点 $\left(\bar{s}_{3,4}=\pm\sqrt{1-\frac{\sigma^2}{g^2}},\ \bar{\theta}_{3,4}=\varphi\right)$, 这两个态简併, 不动点的指数分别为 1. 对本征值 $\mu_-=-\frac{1}{2}g$, 系统中无相应的本征态对应, 不再考虑. 不动点的指数和为 $\chi=1-1+1+1=2$, 可见随参数改变, 不动点的个数和性质都发生了改变, 但欧拉示性数不变.

在不动点处 $(\bar{s},\bar{\theta})$ 的线性化方程 (29) 的雅可比矩阵的矩阵元可写成

$$\frac{\partial f}{\partial s}=0,\quad \frac{\partial h}{\partial\theta}=0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial\theta}=-\sigma\sqrt{1-\bar{s}^2}\cos(\bar{\theta}-\varphi),$$

$$\frac{\partial h}{\partial s}=-g+\frac{\rho}{\sqrt{(1-\bar{s}^2)^3}}\cos(\bar{\theta}-\varphi),$$

式中已利用了 $\bar{\theta}=\varphi$ 或 $\bar{\theta}=\varphi+\pi$, $\sin(\bar{\theta}-\varphi)=0$. 将这些结果代入 (29) 式, 可求出涨落 $\delta s,\delta\theta$.

## 5.2 玻色爱因斯坦凝聚的线性非对角 Berry 相

当系统随外参量作绝热循回演化时, 设仅参量 $\varphi$ 缓慢变化一个周期 $\varphi\in(0,2\pi)$, 下面的计算都取 $\boldsymbol{R}\to\varphi=\omega t$, 因此对外参量的微分变成 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\boldsymbol{R}}\to\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varphi}$.

对线性情况, $g=0,\lambda_{\mathrm{NL}}(\bar{s}_1,\bar{s}_2)=0$. 将两个正交的稳定不动点 $\left(\mu_1=-\frac{\sigma}{2},\bar{s}_1=0,\ \bar{\theta}_1=\varphi+\pi\right)$ 和 $(\mu_2=\frac{\sigma}{2},\ \bar{s}_2=0,\ \bar{\theta}_2=\varphi)$ 代入计算公式. 正交性给出 $C(\bar{s}_1,\bar{s}_2)=0$. 因

$$\frac{\mathrm{d}\beta(\bar{s}_1,\bar{s}_2)}{\mathrm{d}t}C(\bar{s}_1,\bar{s}_2)=\frac{\mathrm{d}\beta(\bar{s}_1,\bar{s}_2)}{\mathrm{d}t}\times 0$$

和 $\lambda_{\mathrm{D}}(\bar{s}_1,\bar{s}_2)C(\bar{s}_1,\bar{s}_2)=\lambda_{\mathrm{D}}(\bar{s}_1,\bar{s}_2)\times 0$, 不能计算出总联络 $\frac{\mathrm{d}\beta(\bar{s}_1,\bar{s}_2)}{\mathrm{d}t}$ 和动力学联络 $\lambda_{\mathrm{D}}(\bar{s}_1,\bar{s}_2)$, 但仍可计算出非对角联络 $\lambda_{\mathrm{B}}(\bar{s}_1,\bar{s}_2)=-\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}$, 这个结果与已有的结果一致. 考虑到涨落的影响, 可计算出非对角联络

$$\lambda_{\mathrm{BD}}(\bar{s}_1,\bar{s}_2)=\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t},$$

使得 $\lambda_{\mathrm{B}}(\bar{s}_1,\bar{s}_2)+\lambda_{\mathrm{BD}}(\bar{s}_1,\bar{s}_2)=0$, 所以总的非对角 Berry 相位为零.

结论: 在线性情况下, 不同本征值的本征态总是正交的. 因此尽管对一些系统可计算出非对角的 Berry 联络 $\lambda_{\mathrm{B}}(\bar{r},\bar{s})\neq 0$, 但仅计算出非对角的 Berry 联络 $\lambda_{\mathrm{B}}(\bar{r},\bar{s})$ 是不够的, 还需要考虑到涨落的影响, 当考虑了涨落的影响后, 线性系统总的非对角 Berry 相位总是为零的.

### 5.3 玻色爱因斯坦凝聚的非线性非对角 Berry 相

在非线性情况下, $g>\sigma$. 由于不动点 $(\bar{s}_2=0,\bar{\theta}_2=\varphi)$ 是不稳定的双曲不动点, 不满足绝热定理要求, 计算时不考虑. 可选择两个稳定不动点 $\left(\mu_1=-\frac{\sigma}{2},\ \bar{s}_1=0,\ \bar{\theta}_1=\varphi+\pi\right)$ 和 $\left(\mu_3=\frac{g}{2},\ \bar{s}_3=\sqrt{1-\frac{\sigma^2}{g^2}},\ \bar{\theta}_3=\varphi\right)$ 进行计算. 经计算得

$$C(\bar{s}_1,\bar{s}_3)=\sqrt{1-\bar{s}_3}-\sqrt{1+\bar{s}_3}\neq 0,$$

$$\delta r=\frac{-1}{g+\sigma}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}$$

和

$$\delta s=\frac{\sigma^2}{g(g^2-\sigma^2)}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}=\frac{\sigma^2}{g^3\bar{s}_3^2}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}.$$

分别得到非线性非对角情况下的动力学相位

$$\beta_{\mathrm{D}}(\bar{s}_1,\bar{s}_3)=\frac{\pi}{2}(g-\sigma),$$

Berry 相位

$$\beta_{\mathrm{B}}(\bar{s}_1,\bar{s}_3)=\frac{\pi(g+\sigma+\sqrt{g^2-\sigma^2})}{\sqrt{g^2-\sigma^2}},$$

交叉效应的影响

$$\beta_{\mathrm{BD}}(\bar{s}_1,\bar{s}_3)=\frac{-\pi g\sqrt{g^2-\sigma^2}}{4(g^2-\sigma^2)^2},$$

和非线性的影响

$$\beta_{\mathrm{NL}}(\bar{s}_1,\bar{s}_3)=\frac{\pi(\sigma^2+\sigma g-g^2)}{2(g-\sigma)\sqrt{g^2-\sigma^2}}.$$

总的 Berry 相位为

$$\beta(\bar{s}_1,\bar{s}_3)=\beta_{\mathrm{D}}(\bar{s}_1,\bar{s}_3)+\beta_{\mathrm{B}}(\bar{s}_1,\bar{s}_3)+\beta_{\mathrm{BD}}(\bar{s}_1,\bar{s}_3)+\beta_{\mathrm{NL}}(\bar{s}_1,\bar{s}_3).$$

同理可计算出非对角 Berry 相 $\beta(\bar{s}_1,\bar{s}_4)$ 和 $\beta(\bar{s}_2,\bar{s}_3)$.

通过以上讨论, 我们计算出了二能级 BEC 系统的线性和非线性非对角 Berry 相位. 与已有的结果不同的是, 我们的计算结果除了含有动力学相位、通常的几何相位、非线性效应引起的附加影响以外, 还包括非对角情况所特有的贡献, 它表示在非线性非对角情况下, 系统哈密顿慢变时产生的涨落不断积累, 并反馈到本征方程和本征态, 引起一个本征态与另一个本征态附近的涨落之间的交叉效应, 进而对总的非对角 Berry 联络产生影响.

## 6 结 论

本文研究了绝热条件下, 非线性量子态的非对角 Berry 相问题. 借助非线性 Schrödinger 方程推导出非线性系统的非对角相位, 并在非线性绝热近似条件下, 推导出非线性非对角的 Berry 相位的计算公式. 我们的结果表明在非线性非对角情况下, Berry 相位包含有新的一个交叉项这一项反映了一个本征态附近的动力学涨落与另一个本征态之间的相互影响. 作为例子, 我们对二能级 BEC 系统具体计算出了非线性非对角的 Berry 相位.


[1] Smerzi A, Fantoni S, Giovanazzi S, Shenoy S R 1997 *Phys. Rev. Lett.* **79** 4950

[2] Milburn G J, Corney J 1997 *Phys. Rev.* A **55** 4318

[3] Mewes M O, Andrews M R, Kurn D M, Durfee D S, Townsend C G, Ketterle W 1997 *Phys. Rev. Lett.* **78** 582

[4] Dalfovo F, Giorgini S, PitaevskiiL P 1999 *Rev. Mod. Phys.* **71** 463

[5] Liu J, Fu L B, Ou B Y, Chen S G, Choi D I, Wu B, Niu Q 2002 *Phys. Rev.* A **66** 023404

[6] Wang S, Yang Z A 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 3699 (in Chinese) [王沙, 杨志安 2009 物理学报 **58** 3699]

[7] Feldmann J, Leo K, Shah J, Miller D A B 1992 *Phys. Rev.* B **46** 7252

[8] Berry M V 1984 *Proc. R. Soc. London* A **45** 392

[9] Simon B 1983 *Phys. Rev. Lett.* **51** 2167

[10] Li H Z 1998 *Global Properties Simple Physical Systems* (Shanghai: Shanghai Scientific & Technical Publishers) (in Chinese) [李华钟 1998 简单物理的整体性贝里相位及其他 (上海: 上海科技出版社)]

[11] Bohm A, Mostafazadeh A, Koizumi H 2003 *The GeometricPhase in Quantum Systems* (New York: Sp ringer)

[12] Manini N, Pistolesi F, 2000 *Phys. Rev. Lett.* **85** 3067

[13] Liu J, Wu B, Niu Q 2003 *Phys. Rev. Lett.* **90** 170404

[14] Wu B, Liu J, Niu Q 2005 *Phys. Rev. Lett.* **94** 140402

[15] Liu J, Fu L B, 2010 *Phys. Rev.* A **81** 052112

[16] Li S C, Liu J, Fu L B 2011 *Phys. Rev.* A **83** 042107

[17] Li S C, Fu L B, Liu J 2011 *Phys. Rev.* A **84** 053610

[18] Pethick C J, Smith H 2002 *Bose-Einstein Condensation in Dilute Gases* (London: Cambridge University Press)

[19] Fang Y C, Yang Z A, Yang L Y 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 661 (in Chinese) [房永翠, 杨志安, 杨丽云 2009 物理学报 **57** 661]

[20] Wang G F, Fu L B, Zhao H, Liu J 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 5003 (in Chinese) [王冠芳, 傅立斌, 赵鸿, 刘杰 2005 物理学报 **54** 5003]

# Off-diagonal Berry phase in nonlinear systems

Yang Zhi-An†

( *School of Physics and Technology, University of Jinan, Jinan* 250022, *China* )

( Received 4 December 2012; revised manuscript received 10 January 2013 )

**Abstract**

In this paper, we have investigated the off-diagonal Berry phase of nonlinear systems and presented its explicit expression. The results show that, for nonlinear systems, the off-diagonal berry phase contains a new term in addition to the dynamical phase, the geometric phase and the nonlinear phase. This new term can describe a cross effect between the Bogoliubov excitation around one eigenstate and another instantaneous eigenstate, while the Bogoliubov excitations are found to be accumulated during the adiabatic evolution and contribute a finite phase of geometric nature. As an application, the off-diagonal Berry phase of a two-well trapped Bose-Einstein condensate system is calculated.

**Keywords:** Berry phase, off-diagonal, adiabatic evolution, Bose-Einstein condensates

**PACS:** 03.65.Vf, 03.75.Kk, 03.65.Ge **DOI:** 10.7498/aps.62.110302

† Corresponding author. E-mail: ss_yangza@ujn.edu.cn