

方势阱中凝聚体的孤子动力学行为*

张波¹⁾ 王登龙^{1)†} 余彦超¹⁾²⁾ 张蔚曦²⁾

1) (湘潭大学物理系, 湘潭 411105)

2) (铜仁学院物理与电子科学系, 铜仁 554300)

(2012年12月18日收到; 2013年2月3日收到修改稿)

利用多重尺度法, 解析地研究了方势阱中玻色-爱因斯坦凝聚体的孤子动力学行为. 结果表明, 方势阱对凝聚体中的孤子动力学有重要的影响. 进入方势阱时孤子作加速运动, 逃逸出势阱时孤子作减速运动; 且随着势阱深度的增加, 孤子的速度增加、幅度增加、宽度减小. 这为实验操控孤子的动力学行为提供一定的参考价值.

关键词: 玻色-爱因斯坦凝聚体, 孤子, 方势阱

PACS: 05.30.Jp, 02.90.+p, 11.10.Lm

DOI: 10.7498/aps.62.110501

1 引言

玻色-爱因斯坦凝聚体 (Bose-Einstein condensate, BEC) 的实验成功观察^[1-4], 极大地激励了科学家对物质波非线性性质的研究. 尤其是, 原子物质波中许多非线性现象的成功观测, 如 BEC 中的亮孤子、暗孤子和四波混频等, 大大促进了非线性原子光学的形成和发展^[5-33]. 众所周知, 孤子是由系统的色散效应和非线性效应相互平衡后实现的一种特殊的相干结构, 因而有关 BEC 中的孤子研究对当前许多高新技术领域, 如原子激发、原子光刻技术及新一代原子钟等具有重要的意义^[8,9].

理论上, 刻画 BEC 物理性质是基于平均场近似下的 Gross-Pitaevskii (GP) 方程^[8,9]. 对于 GP 方程, 有实验可调控的两个宏观物理量: 外部势阱和粒子间的相互作用^[8,9]. 研究表明, 不同的外部势阱和粒子间的相互作用形式对 BEC 中孤子的形成及特性有着非常重要的影响^[16-21]. 如, 对于局限于谐振外部势阱中的 BEC, 当粒子间相互作用为排斥时, BEC 中出现暗孤子^[1,2]; 当相互作用为吸引时, 其中出现亮孤子^[3,4]; 若相互作用非常弱, 则凝聚体中的孤子在传播过程中传播速度会变慢并且宽度

变宽^[26]. 对于囚禁于恒定外部势阱中的 BEC, 当相互排斥作用相当强时, BEC 中只会存在亮孤子; 当相互排斥作用相当弱 (小于某一临界值) 时, BEC 中会出现暗、亮孤子交替演化^[27]. 对于排斥抛物势中的 BEC, 当相互作用随时间增加时, 凝聚体中的亮孤子被挤压出现非常高的局域物质密度, 且亮孤子中的原子数目呈动力学平衡状态^[26]. 对于准一维谐振势中的 BEC, 当粒子间的相互作用随时间增加时, 凝聚体中的黑孤子会演化成稳定的灰孤子; 当粒子间的相互作用随时间减少时, 凝聚体中的灰孤子将向黑孤子演化^[16]. 值得一提的是即使粒子之间的相互作用形式相同, 如果 BEC 局限于不同的外部势阱, 其所体现的孤子动力学性质完全不同. 如粒子间的相互作用为排斥势, 局限于谐振外部势阱中的 BEC 中产生暗孤子^[8-11], 而局限于光晶格势阱中的 BEC 却产生亮孤子^[12,22]; 当然这两种孤子的动力学性质也完全不同.

近来, 实验已成功地将 BEC 装载入方势阱^[34]. 局限于双方势阱的 BEC 考虑粒子间的吸引相互作用能产生 Josephson 现象, 也就是双方势阱及其中间势垒相当构建成 Josephson 结^[35,36]; 而考虑 BEC 粒子间的相互排斥作用时, 由于排斥效应使局限在双方势阱的 BEC 最终出现在其中的一个方势阱

* 国家自然科学基金 (批准号: 51032002)、湖南省教育厅科研项目 (批准号: 12A140) 和贵州省自然科学基金 (批准号: J20112219, J20122314) 资助的课题.

† 通讯作者. E-mail: dlwang@xtu.edu.cn

中而产生对称破损 (symmetry breaking) 的局域现象 [37]. Matuszewski 等 [38] 发现局限于双方势阱 BEC 中的孤子也会出现自发对称破损现象. 然而, 目前涉及研究方势阱中 BEC 中的孤子动力学性质的文献较少, 有关囚禁于方势阱中的 BEC 孤子的动力学行为还不甚清晰. 在此, 我们利用多重尺度法, 解析地研究了方势阱中 BEC 的孤子动力学行为. 结果表明, 进入方势阱时孤子作加速运动, 逃逸出势阱时孤子作减速运动; 且随着势阱深度的增加, 孤子的速度增加、幅度增加、宽度减少.

2 方势阱模型及其孤子解

一般, 描述方势阱中的 BEC 的动力学行为可以通过无量纲化后有效的一维 GP 方程 [8,9]

$$i \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + V(x) \Psi + g_{1D} |\Psi|^2 \Psi, \quad (1)$$

其中, $x = X/a_{\perp}$, $t = T\omega_{\perp}/2$; 此处 X 和 T 分别为物质波的坐标和时间, $a_{\perp} = \sqrt{\hbar/m\omega_{\perp}}$ 为谐振长度 (m 是原子质量), ω_{\perp} 是径向 (二维强局限) 方向的频率. $g_{1D} = 2|a_s|/a_{\perp}$, 其中 a_s 是描述粒子间相互作用的 s 波散射长度. 凝聚体的波函数 $\Psi(X, R, T)$ 与归一化波函数 $\psi(x, t)$ 的关系为 $\Psi(X, R, T) = \sqrt{m\omega_{\perp}/(4\pi a_s \hbar)} \psi(x, t) \exp(-R^2/2)$, R 是径向坐标. 一维方势阱势可描述为 [37,38]

$$V(x) = \begin{cases} -U_0, & |x| < \frac{1}{2}L, \\ 0, & |x| > \frac{1}{2}L, \end{cases} \quad (2)$$

其中 U_0 和 L 分别是方势阱的深度和宽度 (如图 1 所示).

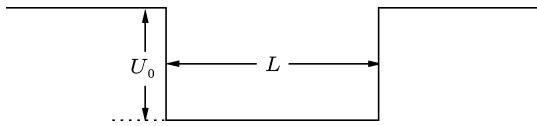


图 1 一维方势阱示意图

令 $\psi(x, t) = A(x, t) \exp[i\phi(x, t)]$, 代入方程 (1) 分离其实、虚部有

$$\frac{\partial A}{\partial t} + A \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial A}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0, \quad (3)$$

$$A \frac{\partial \phi}{\partial t} - \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + A \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + gA^3 + V(x)A = 0. \quad (4)$$

由于方程 (3) 和 (4) 是不可积的, 在此利用多重尺度法对其解析求解. 可令 $A = u_0 + \varepsilon^2 a_0 + \varepsilon^4 a_1 \dots$,

$\phi = -\mu t + \varepsilon(\phi_0 + \varepsilon^2 \phi_1 + \dots)$, 其中 u_0 和 μ 分别表示凝聚体基态和系统的化学势; ε 是描述凝聚体相关幅度的小参数. 引入慢变量 $\xi = \varepsilon(x - V_g t)$ 和 $\tau = \varepsilon^3 t$ 表示孤子动力学的慢变化, 快变量 $x_0 = x$ 为波包的传播方向. 随后将其代入方程 (3) 和 (4), 根据 ε 的各次幂分开. 比较 ε^0 次幂有 $\mu = gu_0^2 + V(x)$. 随后比较 ε 的其他次幂, 从方程 (3) 有

$$V_g \frac{\partial a_0}{\partial \xi} - u_0 \frac{\partial^2 \phi_0}{\partial \xi^2} = 0, \quad (5)$$

$$V_g \frac{\partial a_1}{\partial \xi} - u_0 \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial \xi^2} = \frac{\partial a_0}{\partial \tau} + a_0 \frac{\partial^2 \phi_0}{\partial \xi^2} + 2 \frac{\partial a_0}{\partial \xi} \frac{\partial \phi_0}{\partial \xi}. \quad (6)$$

从方程 (4) 可得

$$V_g u_0 \frac{\partial \phi_0}{\partial \xi} - 2gu_0^2 a_0 = 0, \quad (7)$$

$$V_g u_0 \frac{\partial \phi_1}{\partial \xi} - 2gu_0^2 a_1 = -V_g a_0 \frac{\partial \phi_0}{\partial \xi} + u_0 \frac{\partial \phi_0}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 a_0}{\partial \xi^2} + u_0 \left(\frac{\partial \phi_0}{\partial \xi} \right)^2 + 3gu_0 a_0^2. \quad (8)$$

比较方程 (5) 和 (7) 得 $V_g = \sqrt{2}gu_0$. 从方程 (6) 和 (8) 可得

$$\frac{\partial a_0}{\partial \tau} + \frac{3V_g}{u_0} a_0 \frac{\partial a_0}{\partial \xi} - \frac{1}{2V_g} \frac{\partial^3 a_0}{\partial \xi^3} = 0. \quad (9)$$

令 $w = \varepsilon^2 a_0$, $X = x - V_g t$, 则 $\xi = \varepsilon(x - V_g t) = \varepsilon X$, 且 $\tau = \varepsilon^3 t$, 上式化为

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{3V_g}{u_0} w \frac{\partial w}{\partial X} - \frac{1}{2V_g} \frac{\partial^3 w}{\partial X^3} = 0. \quad (10)$$

方程 (10) 是常见的 KdV 方程, 其单孤子解 [16] 为 $w = -c_0 \text{sech}^2[\sqrt{gu_0 c_0}(x - \sqrt{2}gu_0 t + k)]$, 其中 $k = \sqrt{2}gc_0 t - x_{00}$, 此处 c_0 为常数, x_{00} 为孤子的初始位置. 最后我们获得凝聚体的波函数是

$$\psi(x, t) = [u_0 - c_0 \text{sech}^2(\theta)] \exp \left[-i(gu_0^2 + V(x))t + i \sqrt{\frac{2c_0}{u_0}} \tanh(\theta) \right], \quad (11)$$

其中, $\theta = \sqrt{gu_0 c_0}(x - \sqrt{2}gu_0 t + k)$.

3 方势阱中凝聚体的孤子特征

作为典型的事例, 我们在此数值计算方势阱 $V(x)$ 对 ^{87}Rb 凝聚体中孤子动力学的影响. 基于相关实验 [1], 原子质量 $m = 1.44 \times 10^{-25}$ kg, 径向和轴向频率分别是 $\omega_{\perp} = 2\pi \times 425$ Hz 和 $\omega_x = 2\pi \times 14$ Hz,

因此,无量纲的单位时间和空间分别对应于实验中的数值时 0.75 ms 和 0.52 μm . 由于实验中的原子密度数量级是 $(10^{12}\text{--}10^{14})\text{cm}^{-3}$, 在此我们选取为 $2.5 \times 10^{13} \text{cm}^{-3}$, 从而相关无量纲参数分别选取为 $c = 1, g = 1$ 和 $\mu = 3$. 方程 (11) 简化为

$$\psi(x,t) = [\sqrt{3-V(x)} - \text{sech}^2(\theta)] \times \exp \left[-3it + i \sqrt{\frac{2}{\sqrt{3-V(x)}}} \tanh(\theta) \right],$$

其中

$$\theta = 4 \sqrt{(3-V(x))(x - \sqrt{2(3-V(x))}t + \sqrt{2}t - x_{00})}.$$

首先,我们探索凝聚体中孤子传播的稳定性,选取方势阱的宽度 $L = 3$, 深度 $U_0 = 2$, 得到凝聚体的概率密度分布如图 2 所示 (图中实线为不同时刻凝聚体的概率密度分布; 虚线是凝聚体所局域的方势阱曲线). 从图 2(a) 中,发现在初始时刻凝聚体密度分布的幅度上有一个凹陷部分,凝聚体中出现暗孤子. 随着时间的推移,暗孤子到达方势阱之前既不改变波形也不衰减地稳定向右传播如图 2(b) 所示. 这说明暗孤子在凝聚体中能稳定地传播,主要是系统的色散效应和非线性效应相平衡的结果. 随着时间的进一步增加 (如图 2(c)), 暗孤子传播到达方势阱中,且它的幅度增大. 暗孤子的幅度增加主要是由于方势阱的准“局限”所造成. 当时间在 $t=7$ 时,暗孤子中心位置已经离开了方势阱,且它的幅度又恢复到局限势阱之前的传播状态 (如图 2(d) 所示).

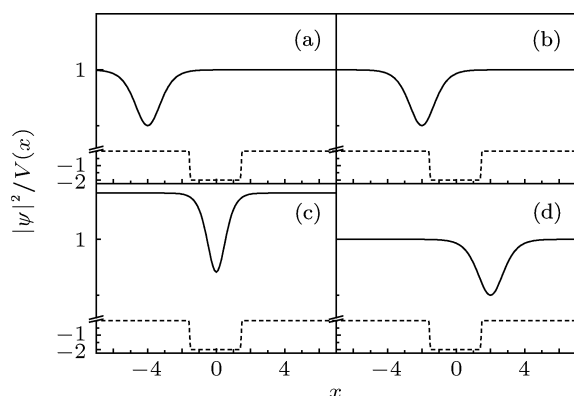


图 2 局限于方势阱中的玻色-爱因斯坦凝聚体在不同时刻的概率密度空间分布 (其他参数选取为 $c_0 = 1, g = 1, \mu = 3, L = 3, U_0 = 2$) (a) $t = 0$; (b) $t = 2$; (c) $t = 5$; (d) $t = 7$

随后,为了获得方势阱深度对凝聚体中孤子速度的影响,图 3 示出暗孤子速度的空间分布.可以

看出孤子的速度只有两个值,在 $-1.5 < x < 1.5$ 区域 (即方势阱内) 速度大约是 1.75, 其余的无势阱区域孤子的速度大约是 1.03. 尤其是在方势阱边沿 $x = -1.5$ 处孤子的速度跳跃性的增加. 这说明暗孤子进行方势阱时,作加速运动,这可能是方势阱对孤子的准“局限”所造成. 在 $x = 1.5$ 处,孤子的速度急剧地减少,说明孤子离开方势阱时作减速运动,此时是由于孤子被方势阱释放而速度减小.

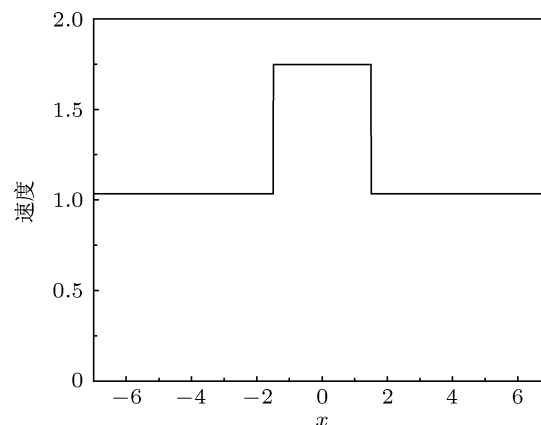


图 3 暗孤子的速度随空间的变化情况 (所用参数与图 2 一致)

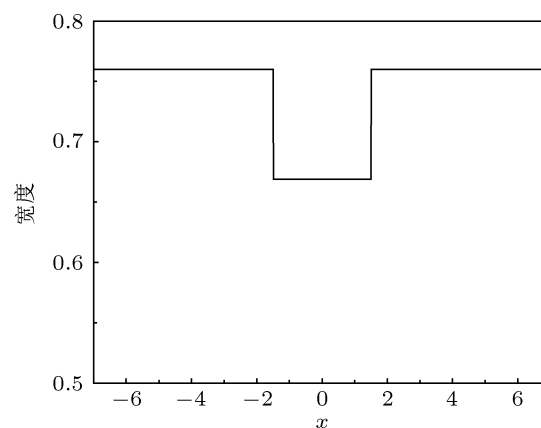


图 4 暗孤子的宽度随空间的变化情况 (所用参数与图 2 一致)

最后,为了得到方势阱对孤子宽度的影响,图 4 给出孤子宽度在空间的分布.可以看出孤子的宽度分布也只有两个值,在方势阱外孤子的宽度大致是 0.76, 方势阱中孤子的宽度大约为 0.67. 这说明由于方势阱的“局限”使孤子的宽度变小.

综上所述,凝聚体中的孤子的幅度、速度和宽度均可通过方势阱进行调控.随着势阱深度的增加,孤子的速度增加、幅度增加、宽度减少.这为实验操控孤子的动力学行为提供一定的参考价值.

4 结论

总之, 我们利用多重尺度法解析地研究了方势阱对准一维玻色-爱因斯坦凝聚体中的孤子动力学行为的影响. 发现方势阱中的玻色-爱因斯坦凝聚体的波函数的振幅和相位可由 KdV 方程来描述. 通过解 KdV 方程, 我们获得体系波函数的孤子解. 随

后, 数值计算了方势阱中玻色-爱因斯坦凝聚体的孤子动力学性质, 发现凝聚体中的孤子的幅度、速度和宽度均可通过方势阱进行调控. 进入方势阱时孤子作加速运动, 逃逸出势阱时孤子作减速运动; 且随着势阱深度的增加, 孤子的速度增加、幅度增加、宽度减小. 这为实验操控孤子的动力学行为提供一定的参考价值.

- [1] Burger S, Bongs K, Dettmer S, Ertmer W, Sengstock K 1999 *Phys. Rev. Lett.* **83** 5198
- [2] Denschlag J, Simsarian J E, Feder D L, Clark C W, Collins L A, Cubizolles J, Deng L, Hagley E W, Helmerson K, Reinhardt W P, Rolston S L, Schneider B I, Phillips W D 2000 *Science* **287** 97
- [3] Khaykovich L, Schreck F, Ferrari G, Bourdel T, Cubizolles J, Carr L D, Castin Y, Salomon C 2002 *Science* **296** 1290
- [4] Strecker K E, Partridge G B, Truscott A G, Hulet R G 2002 *Nature* **417** 150
- [5] Song S W, Wang D S, Wang H Q, Liu W M 2012 *Phys. Rev. A* **85** 063617
- [6] Li J, Wang D S, Yu Z Y, Yu Y M, Liu W M 2012 *Phys. Rev. A* **86** 023628
- [7] Luo X Q, Wang D L, Zhang Z Q, Ding J W, Liu W M 2011 *Phys. Rev. A* **84** 033803
- [8] Pethick C J, Smith H 2002 *Bose-Einstein Condensation in Dilute Gases* (Cambridge University Press, Cambridge, England)
- [9] Dalfovo E, Giorgini S, Pitaevskii L P, Stringari S 1999 *Rev. Mod. Phys.* **71** 463
- [10] Ji A C, Sun Q, Xie X C, Liu W M 2009 *Phys. Rev. Lett.* **102** 023602
- [11] Li Z D, Li Q Y, Li L, Liu W M 2007 *Phys. Rev. E* **76** 026605
- [12] Wang D L, Yan X H, Liu W M 2008 *Phys. Rev. E* **78** 026606
- [13] Huang G X, Velarde M G, Makarov V A 2001 *Phys. Rev. A* **64** 013617
- [14] Huang G X, Szeftel J, Zhu S H 2002 *Phys. Rev. A* **65** 053605
- [15] Huang G X 2004 *Chin. Phys.* **13** 1866
- [16] Zhang W X, Wang D L, He Z M, Wang F J, Ding J W 2008 *Phys. Lett. A* **372** 4407
- [17] Zhang X F, Yang Q, Zhang J F, Chen X Z, Liu W M 2008 *Phys. Rev. A* **77** 023613
- [18] Wang D S, Hu X H, Hu J P, Liu W M 2010 *Phys. Rev. A* **81** 025604
- [19] Li Q Y, Li Z D, Yao S F, Li L, Fu G S 2010 *Chin. Phys. B* **19** 080501
- [20] Song W W, Li Q Y, Li Z D, Fu G S 2010 *Chin. Phys. B* **19** 070503
- [21] He Z M, Wang D L, Zhang W X, Wang F J, Ding J W 2008 *Chin. Phys. B* **17** 3640
- [22] Xi Y D, Wang D L, He Z M, Ding J W 2009 *Chin. Phys. B* **18** 0939
- [23] Xi Y D, Wang D L, She Y C, Wang F J, Ding J W 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 3720 (in Chinese) [奚玉东, 王登龙, 余彦超, 王凤姣, 丁建文 2010 物理学报 **59** 3720]
- [24] Li Z D, Li Q Y, He P B, Liang J Q, Liu W M, Fu G S 2010 *Phys. Rev. A* **81** 015602
- [25] Zhang W X, Wang D L, Ding J W 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 6786 (in Chinese) [张蔚曦, 王登龙, 丁建文 2008 物理学报 **57** 6786]
- [26] Liang Z X, Zhang Z D, Liu W M 2005 *Phys. Rev. Lett.* **94** 050402
- [27] He Z M, Wang D L 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 3088 (in Chinese) [何章明, 王登龙 2007 物理学报 **56** 3088]
- [28] Zhang H, Duan W S 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 044703 (in Chinese) [张恒, 段文山 2013 物理学报 **62** 044703]
- [29] Teng F, Xie Z W 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 026701 (in Chinese) [滕斐, 谢征微 2013 物理学报 **62** 026701]
- [30] He Z M, Wang D L, Ding J W, Yan X H 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 230508 (in Chinese) [何章明, 王登龙, 丁建文, 颜晓红 2012 物理学报 **61** 230508]
- [31] Fang Y C, Yang Z A 2007 *Acta Phys. Sin.* **57** 7438 (in Chinese) [房永翠, 杨志安 2007 物理学报 **57** 7438]
- [32] Zhang X F, Hu X H, Liu X X, Liu W M 2009 *Phys. Rev. A* **79** 033630
- [33] Zhang X F, Zhang P, Yang Q 2008 *Commun. Theo. Phys.* **50** 1323
- [34] Mahmud K W, Kutz J N, Reinhardt W P 2002 *Phys. Rev. A* **66** 063607
- [35] Albiez M, Gati R, Fölling J, Hunsmann S, Cristiani M, Oberthaler M K 2005 *Phys. Rev. Lett.* **95** 010402
- [36] Ziñ P, Infeld E, Matuszewski M, Rowlands G, Trippenbach M 2006 *Phys. Rev. A* **73** 022105
- [37] Infeld E, Ziñ P, Gocalek J, Trippenbach M 2006 *Phys. Rev. E* **74** 026610
- [38] Matuszewski M, Malomed B A, Trippenbach M 2007 *Phys. Rev. A* **75** 063621

Soliton dynamical behavior of the condensates trapped in a square-well potential*

Zhang Bo¹⁾ Wang Deng-Long^{1)†} She Yan-Chao¹⁾²⁾ Zhang Wei-Xi²⁾

1) (*Department of Physics, Xiangtan University, Xiangtan 411105, China*)

2) (*Department of Physics and Electronic Science, Tongren University, Tongren 554300, China*)

(Received 18 December 2012; revised manuscript received 3 February 2013)

Abstract

Using multiple-scale method, we study analytically the soliton dynamical behaviors of the Bose-Einstein condensates trapped in a square-well potential. It is found that the square-well potential has important effects on the soliton dynamics. When the soliton goes into the square-well potential, its movement is accelerated; while it leaves the square-well potential, the soliton is decelerated. With the increase in depth of the square-well potential, the velocity of the soliton increases, and its amplitude becomes larger and its width decreases. This may serve as a reference effect for controlling the dynamical characteristics of the soliton in experiments.

Keywords: Bose-Einstein condensates, solitons, square-well potential

PACS: 05.30.Jp, 02.90.+p, 11.10.Lm

DOI: 10.7498/aps.62.110501

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 11074212), the Scientific Research Fund of Hunan Provincial Education Department, China (Grant No. 12A140), and the Science and Technology Foundation of Guizhou Province, China (Grant Nos. J20112219, J20122314).

† Corresponding author. E-mail: dlwang@xtu.edu.cn