

非高斯噪声对惯性棘轮中粒子负迁移率的影响*

杨波 梅冬成†

(云南大学物理系, 昆明 650091)

(2012年9月28日收到)

利用随机模拟方法研究了惯性棘轮中非高斯噪声对负迁移率的影响. 分别模拟了绝对负迁移率 (ANM), 非线性迁移率 (NNM) 和负微分迁移率 (NDM) 等三种反常运输现象. 计算结果表明: 1) 在不同的参数空间里, 非高斯噪声参数 q 能够增强或者削弱 ANM, 诱导 NNM 和 NDM; 2) 当 q 较大时, 反常运输现象转化为正常运输; 3) 随着 q 逐渐增大, 平均速度 - 关联时间特性曲线朝着关联时间较小的方向移动并且其峰值逐渐减小.

关键词: 反常运输, 负迁移率, 非高斯噪声

PACS: 05.40.-a, 02.50.-r

DOI: 10.7498/aps.62.110502

1 引言

近年来, 远离平衡态的反常运输现象受到越来越多的关注. 负迁移率现象是最重要的现象之一. 当运动粒子受到外力作用时, 粒子朝着这个作用力相反的方向运动^[1]. 它似乎违背了热力学第二定律和勒夏特列原理, 但在惯性棘轮系统中粒子的负迁移率现象已经被观察到^[1-9]. 粒子发生定向运输需要具备两个基本条件: 系统处于非平衡态和系统的对称性发生破缺^[10]. 对于受到外部常力作用下的惯性棘轮系统, 负迁移率能够出现, 主要是由于共存吸引子, 噪声诱导吸引子的亚稳态和瞬态混沌三者之间稳定的相互作用所引起的^[3,4]. 最初的研究工作, 仅考虑了在一个空间对称周期势中, 外部偏置力、高斯白噪声和对称时间周期驱动共同影响下的阻尼系统^[2]. 后来的研究, 空间非对称势^[5,6], 色噪声涨落^[1]以及时间非对称驱动^[8]被分别讨论. 但是非高斯噪声对该系统负迁移率现象所产生的影响仍未研究.

在以前的许多研究中随机涨落都被假定为高斯噪声^[1-9], 然而在神经网络^[11], 生物系统^[12]以及感官系统^[13,14]中出现的涨落却为非高斯型涨落. 近年来, 非高斯噪声对随机系统的影响已经受到了广泛的关注, 如非高斯噪声作用下双稳系统的

随机共振现象^[15], 非高斯噪声作用下双稳系统粒子扩散的平均首通时间^[16], 和非高斯噪声驱动下分子马达的统计性质^[17,18], 非高斯噪声和时间延迟的共同影响等方面的研究工作^[19,20]. 这些研究表明非高斯噪声能给系统带来很多新奇的现象.

本文将分析讨论以下三种反常运输现象. 绝对负迁移率 (ANM) 现象: 对于一个很小的外力, 粒子运动方向与外力方向相反; 负非线性迁移率 (NNM) 现象: 当外力很小时, 粒子的运输方向与外力相同, 随着外力的增大, 粒子运动方向与外力相反; 负微分迁移率 (NDM) 现象: 粒子的运输方向与外力相同, 但是粒子运输速度随外力的增加而减小. 在这三种现象中 ANM 和 NNM 可以同时共存, 但是诱导机理完全不同, ANM 由噪声诱导, NNM 则由瞬态混沌控制^[3,4]. 需要特别说明的是相应的理论结果已经在约瑟夫森结中得到证实, 相应的反常运输现象包括绝对负阻抗 (ANC), 负非线性阻抗 (NNC) 和负微分阻抗 (NDC)^[22]. 此外, 在其他实验中负迁移率现象也得到了证实^[23-25], 并且能够应用于粒子分离技术^[26,27].

本文考虑在空间对称周期系统中, 外部偏置力、非高斯噪声和空间对称驱动共同作用下的阻尼系统. 主要目的是研究非高斯噪声参数 q 对负迁移率现象所产生的影响.

* 国家自然科学基金(批准号: 11165016)资助的课题.

† 通讯作者. E-mail: meidch@ynu.edu.cn

2 粒子输运模型

惯性布朗粒子在对称的一维空间周期势中, 同时受到时间周期信号, 外部常力和非高斯噪声的作用. 该模型为一维广义朗之万方程^[1], 无量纲化后得到

$$\begin{aligned} \ddot{x} + \int_0^t K(t-s)\dot{x}(s)ds \\ = -V'(x) + a\cos(\omega t) + f + \eta(t), \end{aligned} \quad (1)$$

其中 $x = x(t)$ 是布朗粒子在 t 时刻的位置, 变量上方点和撇分别表示对时间 t 和位置 x 的微分. 参数 γ 表示摩擦系数, $V(x) = V(x+1) = \sin(2\pi x)$ 表示空间周期势, 势垒高度为 $\Delta V = 2$. a 和 ω 分别表示时间周期信号 $a\cos(\omega t)$ 的振幅和频率; f 为外部常力. 随机变量 $\eta(t)$ 表示非高斯噪声, 满足下面的方程^[12,21]:

$$\frac{d\eta}{dt} = \frac{1}{\tau} \left(-\frac{\eta}{1 - \frac{\tau(1-q)\eta^2}{D}} + \sqrt{\gamma}\xi(t) \right), \quad (2)$$

其中 D 表示噪声强度, τ 表示关联时间, q 是非高斯参数 (当 $q = 1$ 时, 非高斯噪声转化为高斯色噪声), $\xi(t)$ 表示高斯白噪声, 统计性质如下:

$$\langle \xi(t) \rangle = 0, \quad (3)$$

$$\langle \xi(t)\xi(t') \rangle = 2D\delta(t-t'). \quad (4)$$

本文主要分析区域 $|q-1| \ll 1$, 在这一区域非高斯噪声非常接近于高斯色噪声, 能够表现出 $q = 1$ 附近的统计性质, 对高斯色噪声具有一定的修正作用^[21]. 在这种条件下, 方程 (2) 能够简化为

$$\frac{d\eta}{dt} = -\frac{1}{\tau_{\text{eff}}}\eta + \frac{1}{\tau_{\text{eff}}}\sqrt{2\gamma D_{\text{eff}}}\xi(t), \quad (5)$$

其中

$$\tau_{\text{eff}} = \frac{2(2-q)}{5-3q}\tau, \quad D_{\text{eff}} = \left[\frac{2(2-q)}{5-3q} \right]^2 D.$$

在上述条件下, $\eta(t)$ 具有下面的统计性质:

$$\langle \eta(t)\eta(t') \rangle = D_{\text{eff}}K|t-s| = \frac{\gamma D_{\text{eff}}}{\tau_{\text{eff}}} e^{-\frac{|t-s|}{\tau_{\text{eff}}}}. \quad (6)$$

需要特别说明的是, 方程 (1) 所显示的模型中, 惯性项 \ddot{x} 对负迁移率的出现起到重要的作用, 它能提供产生负迁移率所需的非线性条件 (包括混沌吸引子、混沌排斥子和瞬态混沌等), 一旦缺少, 负迁移率真将无法获得; 外部驱动周期信号 $a\cos(\omega t)$ 确保系统处于非平衡态条件下; 常数偏置力的引入破坏了系统的对称性. 当噪声项不存在时, 系统称之为

确定性系统, 确定性系统的流反转及其物理性质已经被广泛的研究. 本文主要讨论非高斯噪声对负迁移的影响, 但是确定性系统仍然会给噪声系统带来巨大的影响^[2].

通过引入新变量 $z(t)$, 方程 (1) 可以转化为下面的微分方程组^[1]:

$$\dot{x}(t) = v(t), \quad (7)$$

$$\dot{v}(t) = -V'(x) + a\cos(\omega t) + f + z(t), \quad (8)$$

$$\dot{z}(t) = -\frac{1}{\tau_{\text{eff}}}z(t) - \frac{\gamma}{\tau_{\text{eff}}}v(t) + \frac{1}{\tau_{\text{eff}}}\sqrt{2\gamma D_{\text{eff}}}\xi(t). \quad (9)$$

$z(t)$ 表示无量纲的随机力.

3 数值模拟结果

负迁移率通常用粒子对时间和系综的平均速度进行描述^[28]. 也就是说, 此处的平均速度涉及到两次平均: 第一次称为系综平均, 取系综数量 $M = 1000$ 相当于不同初始条件下的 1000 条轨道. 初始位置取 (0,1) 之间均匀分布的随机数, 初始速度取 (2,-2) 区间均匀分布的随机数^[1,2]. 对于一个固定的时间 t_j , 系综平均能够表示为 $v_j = \frac{1}{M}\sum_i^M \dot{x}_i(t_j)$. 第二次称为时间平均, 我们选取 $N = 10^7$ 个离散的时间点 (其中时间步长选为 $dt = 0.001$), 从而时间平均的表达式为 $\langle v \rangle = \frac{1}{N}\sum_j^N v_j$. 通过二阶龙格库塔算法^[29,30] 模拟随机微分方程组 (7), (8) 和 (9) 得到计算结果.

在文献 [1] 中, 分别讨论振幅 $a = 4.1293$ 和 $a = 4.578$ 时, 不同关联时间条件下, 平均速度随偏置力 f 的变化曲线. 结果显示, 当 $a = 4.578$ 时, 关联时间能够弱化 ANM, 当 $a = 4.1293$ 时关联时间能够增强 ANM 并且诱导 NNM 和 NDM^[1]. 为了与文献 [1] 中的结果进行比较, 本文仍选取 $a = 4.1298$ 和 $a = 4.578$ 两点进行计算分析.

在图 1 中 $\langle v \rangle$ 作为 f 的函数, 固定 $a = 4.1293$ 和 $\tau = 0.0985$. 当 q 值较小时, 只有 ANM 现象出现; 当 q 逐渐增大到 $q = 1$ 附近时 ANM 和 NNM 能够同时被观察到; 当 $q = 1$ 继续增大时, ANM 消失只有 NNM 存在; 随着 q 继续增大到 $q = 1.2$ 时, NNM 转化为 NDM; 最后当 q 足够大时, NDM 也消失, 整个过程完全转化为正常输运. 也就是说在 q 的整个变化过程中伴随着 ANM 逐渐消失, NNM 和 NDM 在一定区域被诱导, q 足够大时候反常输运完全消失. 此外在图 1 中, 当 f 较小和 f 处于 $f = 0.3$ 附近时, 曲线呈现出非线性变化, 为了进一步研究曲线

的变化规律, 分别作 $f = 0.05$ 和 $f = 0.3$ 两点处的 $\langle v \rangle$ - q 特性曲线, 如图 2 所示. 图 2(a) 显示 ANM 现象 (取 $f = 0.05$) 随着 q 的增加逐渐消失, 当转化为

正常输运时曲线呈现非线性变化. 对于图 2(b), 在 q 的一个取值区间内能够看到 NNM 现象, 适当的选取 q 值, 能够获得较大的 NNM 值.

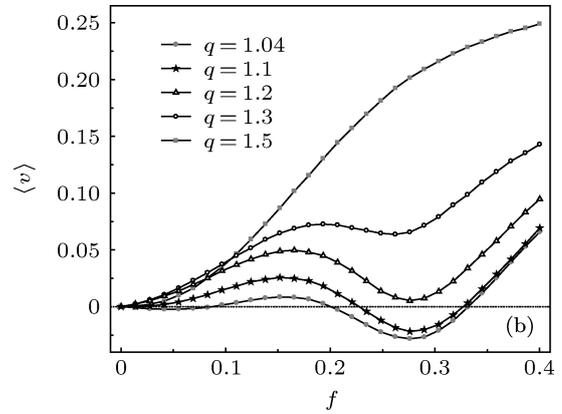
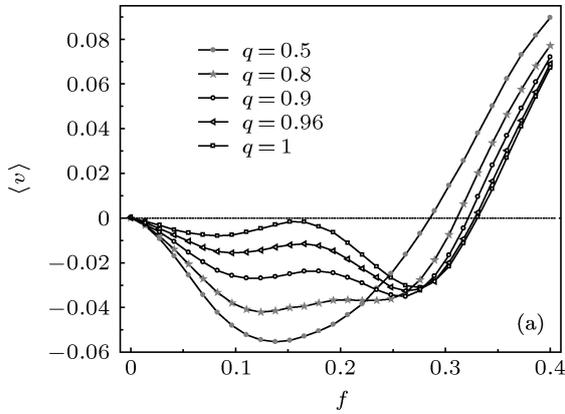


图 1 $a = 4.1293$ 时平均速度随偏置力 f 变化的曲线 (其他参数为 $\omega = 4.9, \tau = 0.0985, \gamma = 0.9, D = 0.001$)

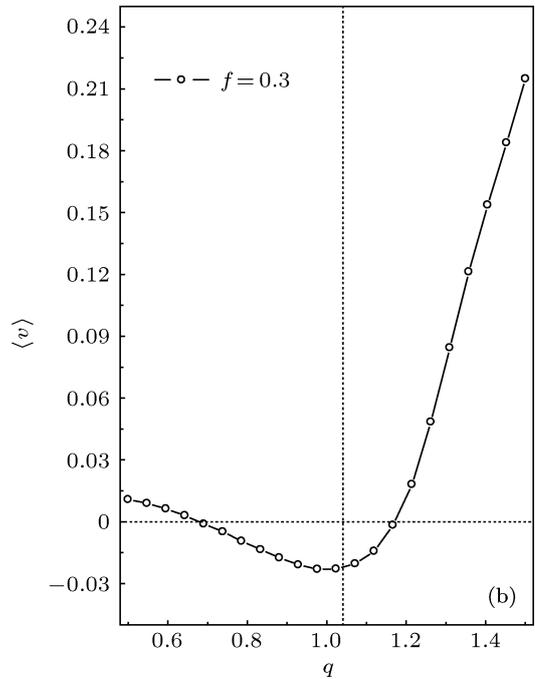
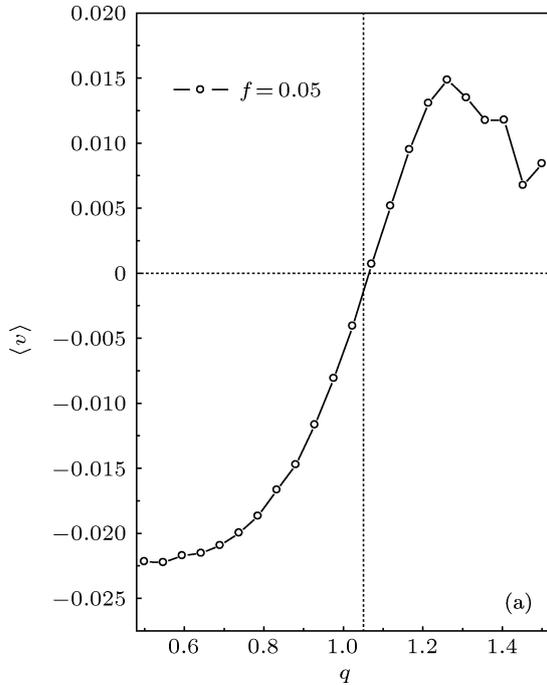


图 2 平均速度作为非对称参数 q 的函数 (其他参数为 $a = 4.1293, \omega = 4.9, \tau = 0.0985, \gamma = 0.9, D = 0.001$)

图 3 显示 $a = 4.578$ 时的 $\langle v \rangle$ - q 曲线 $\tau = 0.01$. 在参数空间里, ANM 明显的存在, 当 q 足够大的时候反常输运仍然会转化为正常输运, 但是随着参数 q 的增加, ANM 在 f 较小时并不呈现出单调变化而是存在一个增强 ANM 的小区间如图 4(a) 所示. 图 4(b) 则显示当 f 较大 (取 $f = 0.1$) 时为单调增函数. 从而当 $a = 4.578$ 时, 模拟结果表明: 在一定的参数空间中, 随着参数 q 的增加, ANM 不仅能够被消除也能够被增强.

为了进一步探究负迁移率随参数 q 变化的规律, 图 5 和图 6 表示不同 q 值条件下的 $\langle v \rangle$ - τ 曲线.

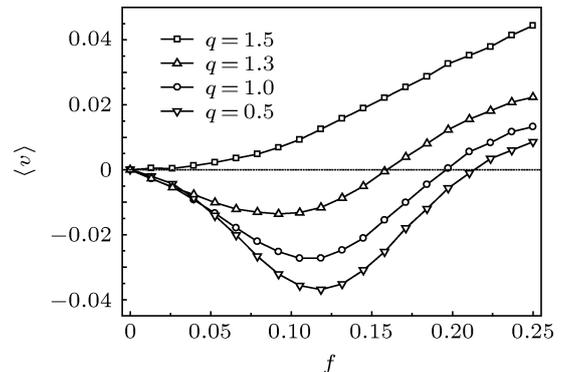


图 3 $a = 4.578$ 时平均速度作为偏置力 f 的函数 (其他参数为 $\omega = 4.9, \tau = 0.01, \gamma = 0.9, D = 0.001$)

由图 5 和图 6 可以观察到, $\langle v \rangle$ - τ 曲线呈现出振荡的波形图. 当 q 值逐渐增加的时候, $\langle v \rangle$ - τ 曲线朝着 τ 值较小的方向移动并且曲线极值的绝对值逐渐减小. 对比图 5 和图 6 发现, 在 $a = 4.1293$ 处, 负运动区域大面积存在, 而 $a = 4.578$ 时, 只有在 τ 较小

的情况下能够获得负迁移率. 这一结论与参考文献 [1] 中的结论相符合. 振幅的大小能够影响吸引子的分布, 是负迁移率能够出现的重要参量 [2-4], 合理的选取相应的振幅和频率值, 对获取较大的负迁移率具有相当重要的现实意义.

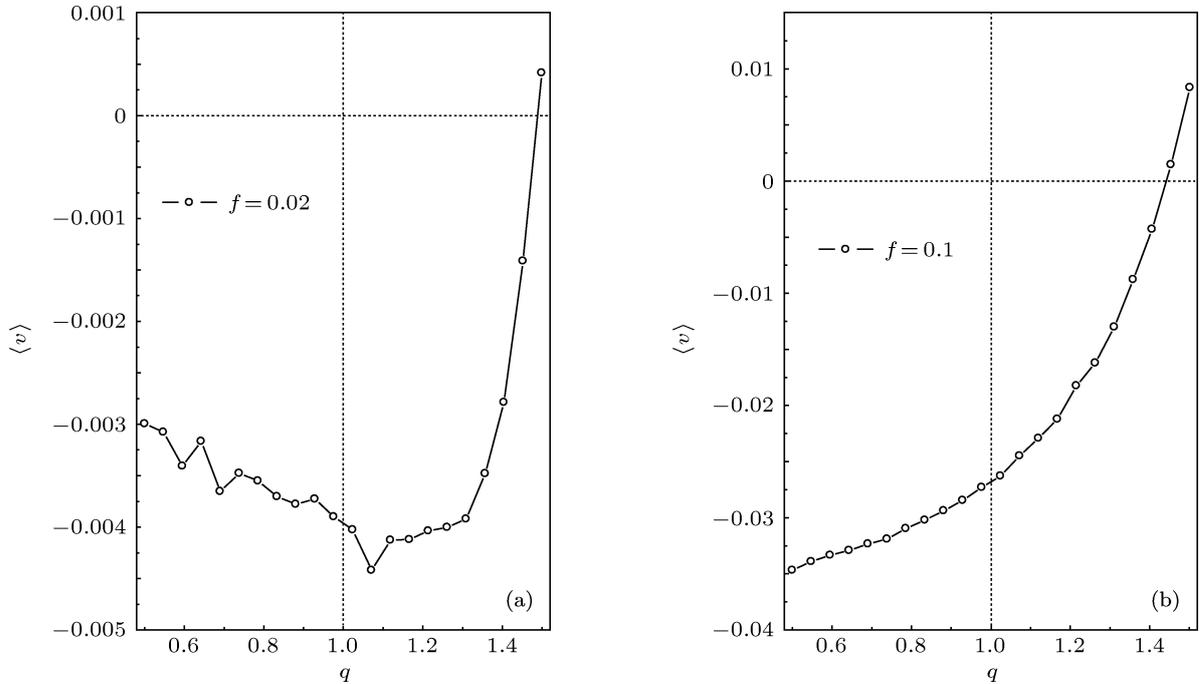


图 4 平均速度作为非对称参数 q 的函数 (其他参数为 $a = 4.578, \omega = 4.9, \tau = 0.01, \gamma = 0.9, D = 0.001$)

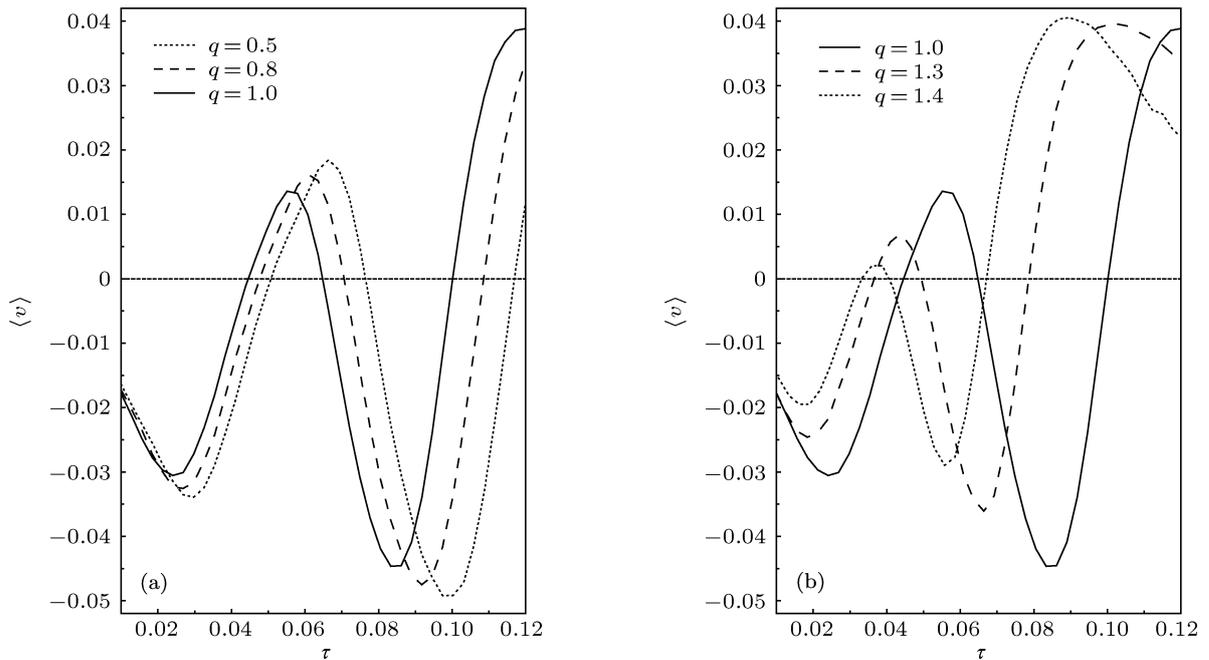


图 5 $a = 4.1293$ 时平均速度作为关联时间 τ 的函数 (其他参数为 $\omega = 4.9, f = 0.1, \gamma = 0.9, D = 0.001$)

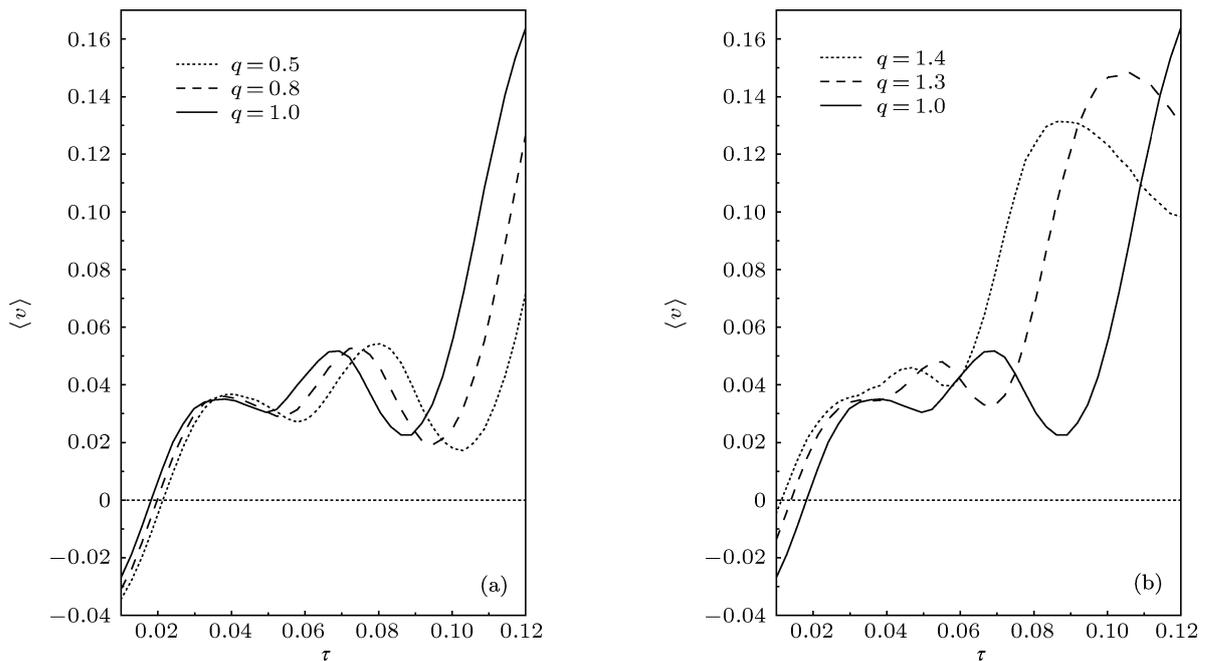


图6 $a = 4.578$ 平均速度作为关联时间 τ 的函数 (其他参数为 $\omega = 4.9, f = 0.1, \gamma = 0.9, D = 0.001$)

4 结论

通过数值模拟研究了非高斯噪声对负迁移率的影响. 计算结果显示: 在某些特定的参数空间下, 非高斯参数 q 不仅能够消除 ANM 而且还能够增强 ANM. 当 q 达到一定程度时, 能够诱导 NNM, 继续增大 q 值, NNM 将会转化成为 NDM, 当 q 足够大时, 将不再出现反常输运现象. 从而说明, 反常输

运现象 (ANM, NNM, NDM) 只能在特定的参数空间中获得. 这些结果可以为粒子分流技术提供理论依据. 反常输运能够在惯性棘轮中存在主要是由于共存吸引子, 噪声诱导吸引子的亚稳态和瞬态混沌三者之间存在稳定的相互作用, 控制和调制速度的变化仍具有较大难度, 深入研究非高斯噪声对负迁移率的影响将为控制负运动提供一定的参考理论依据.

[1] Kostur M, Luczka J, Hanggi P 2009 *Phys. Rev. E* **80** 051121
 [2] Machura L, Kostur M, Talkner P, Luczka J, Hanggi P 2007 *Phys. Rev. Lett.* **98** 040601
 [3] Speer D, Eichhorn R, Reimann P 2007 *Euro Phys. Lett.* **79** 10005
 [4] Speer D, Eichhorn R, Reimann P 2007 *Phys. Rev. E* **76** 051110
 [5] Ai B Q, Liu L G 2007 *Phys. Rev. E* **76** 042103
 [6] Du L C, Mei D C 2011 *J. Stat. Mech.* **2011** P11016
 [7] Du L C, Mei D C 2012 *Phys. Rev. E* **85** 011148
 [8] Machura L, Luczka J 2010 *Phys. Rev. E* **82** 031133
 [9] Li J H, Luczka J 2010 *Phys. Rev. E* **82** 041104
 [10] Cubero D, Lebedev V, Renzoni F 2009 *Phys. Rev. E* **82** 041116
 [11] Mato G 1999 *Phys. Rev. E* **59** 3339
 [12] d' Onofrio A 2010 *Phys. Rev. E* **81** 021923
 [13] Wiesenfeld K, Pierson D, Pantazelou E, Dames C, Moss F 1994 *Phys. Rev. Lett.* **72** 2125
 [14] Nozaki D, Mar D J, Grigg P, Collins J J 1999 *Phys. Rev. Lett.* **82** 2402
 [15] Fuentes M A, Toral R, Wio H S 2001 *Physica A* **295** 114
 [16] Fuentes M A, Wio H S, Toral R 2002 *Physica A* **303** 91
 [17] Bouzat S, Wio H S 2004 *Eur. Phys. J. B* **41** 97
 [18] Bouzat S, Wio H S 2005 *Physica A* **351** 69
 [19] Wu D, Zhu S Q 2007 *Phys. Lett. A* **363** 202
 [20] Wu D, Luo X Q, Zhu S Q 2007 *Physica A* **373** 203
 [21] Wio H S, Toral R 2004 *Physica D* **193** 161
 [22] Kostur M, Machura L, Talkner P, Hanggi P, Luczka J 2008 *Phys. Rev. B* **77** 104509
 [23] Ros A, Eichhorn R, Regtmeier J, Duong T T, Reimann P, Anselmetti D 2005 *Nature (London)* **436** 928
 [24] Nagel J, Speer D, Gaber T, Sterck A, Eichhorn R, Reimann P, Ilin K, Siegel M, Koelle D, Kleiner R 2008 *Phys. Rev. Lett.* **100** 217001
 [25] Arzola A, Volke-Sepulveda K, Mateos J 2011 *Phys. Rev. Lett.* **106** 168104
 [26] Masoller C 2002 *Phys. Rev. Lett.* **88** 034102
 [27] Reguera D, Luquel A, Burada P S, Schmid G, Rubi J M, Hanggi P 2012 *Phys. Rev. Lett.* **108** 020604
 [28] Kenfack A, Sweetnam S M, Pattanayak A K 2007 *Phys. Rev. E* **75** 056215
 [29] Honeycutt R L 1992 *Phys. Rev. A* **45** 600
 [30] Honeycutt R L 1992 *Phys. Rev. A* **45** 604

Effect of non-Gaussian noise on negative mobility*

Yang Bo Mei Dong-Cheng[†]

(Department of Physics, Yunnan University, Kunming 650091, China)

(Received 28 September 2012)

Abstract

Effects of non-Gaussian noise on negative mobility in an inertial ratchet were investigated by means of stochastic simulation method. The absolute negative mobility (ANM), negative nonlinear mobility (NDM), and negative differential mobility (NNM) were simulated, separately. Results indicate that: (i) non-Gaussian noise can either enhance or diminish the phenomena of ANM, and non-Gaussian noise also can induce NDM and NNM in regions of parameter space. (ii) The average velocity-correlation time characteristics shift towards small value of correlation time. (iii) The absolute value of negative-valued minima decreases as the non-Gaussian noise parameter q increases.

Keywords: negative mobility, non-Gaussian noise, anomalous transport

PACS: 05.40.-a, 02.50.-r

DOI: 10.7498/aps.62.110502

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 11165016).

[†] Corresponding author. E-mail: meidch@ynu.edu.cn