一类混沌系统同步时间可控的自适应投影同步*

王春华† 胡燕 余飞 徐浩

(湖南大学信息科学与工程学院, 长沙 410082)

(2012 年 12 月 19 日收到; 2013 年 1 月 17 日收到修改稿)

基于自适应的方法, 提出了一种同步时间可控的混沌投影同步方法. 该方法针对一类不同的混沌系统设计了通用的同步控制器和参数自适应律, 使驱动系统的状态变量和响应系统的状态变量按照给定比例矩阵达到同步, 同步误差按预设的指数速率收敛. 由于比例矩阵和指数速率不为第三方所知, 可提高信息的抗破译能力. 同时, 通过调节相关控制器参数, 可在有限时间内达到投影同步, 并实现对同步时间的有效控制. 数值模拟结果的对比和分析验证了所提方法是有效的和鲁棒的.

关键词: 混沌, 自适应控制, 投影同步, 时间可控

PACS: 05.45.Xt **DOI:** 10.7498/aps.62.110509

1 引 言

由于混沌通信具有保密性强、抗破译、抗干扰、低功率和低成本等特点, 近年来, 研究如何利用混沌系统进行保密通信越来越受到人们的关注. 其中, 混沌同步作为混沌通信的重要环节, 激发了科学家们的研究热情. 1990 年, Pecora 和 Carroll 在电子线路上实现了混沌同步 [1], 之后国际上混沌同步方法及其实验的研究迅速发展, 驱动-响应同步法 [2]、耦合同步法 [3,4]、反馈控制法 [5]、状态观测器法 [6]、滑模控制法 [7]、自适应同步法 [8] 以及很多基于现代控制理论的新方法相继被提出, 其中, 由于自适应控制法具有稳定性高、鲁棒性强等特点而广泛使用. 至今, 混沌同步在理论研究和实际实验中逐步形成了许多不同的同步类型, 如完全同步 [9]、广义同步 [10]、滞后同步 [11,12]、相同步 [13]、Q-S 同步 [14] 和投影同步 [15−17] 等. 在这些扩展的同步类型中, 由于其同步过程中依赖的参数不为第三方所知, 例如利用广义同步和投影同步的比例因子作为密钥, 在一定程度上可以增强通信的保密性.

随着现代通信效率的提高, 研究如何对同步时间可控逐渐成为国内外学者研究的热点 [18−23]. 文献 [18,19] 采用反馈控制方法分别实现了有限时间完全同步; 文献 [20] 利用滑模控制的方法实现了不同混沌系统的有限时间完全同步; 文献 [21] 实现了一类非自治混沌系统的驱动 - 响应耦合有限时间同步; 文献 [22, 23] 实现了特定混沌系统的有限时间完全同步. 上述文献所提出的控制法虽然都易于实现, 但是鲁棒性不高. 而且, 大部分只分析了误差系统的稳定性, 对于同步时间的理论分析, 尤其是对同步时间控制的研究不多.

为了适应通信的高鲁棒性和高保密性等特点, 本文基于自适应的方法, 提出了一种同步时间可控的混沌投影同步方法. 该方法针对一类不同的混沌系统设计了同步控制器和参数自适应律, 可使驱动系统和响应系统的误差成指数收敛, 该指数可以预先设定, 不为第三方所获知. 同时, 驱动系统的状态变量和响应系统的状态变量按照给定的比例矩阵达到同步, 在一定程度上增加了信息的抗破译性. 通过调节控制器参数, 如系统初值, 同步收敛指数等, 可在有限的时间内达到投影同步. 通过对仿真结果的分析和对比, 证明该方法可以有效地实现时间可控的混沌投影同步.

* 国家自然科学基金 (批准号: 61274020) 和湖南省高校重点实验室开放基金 (批准号: 12K011) 资助的课题.

† 通讯作者. E-mail: wch1227164@sina.com

2 同步原理

2.1 混沌系统的数学模型

驱动和响应系统的数学模型可描述如下:

$$\dot{X} = f(X) + F(X)\cdot\theta, \tag{1}$$

$$\dot{Y} = g(Y) + G(Y)\cdot\varphi + U(t,X,Y), \tag{2}$$

其中 $X = [x_1, x_2, \cdots, x_n]^{\mathrm{T}}$, $Y = [y_1, y_2, \cdots, y_n]^{\mathrm{T}} \in R^n$ 分别是驱动系统和响应的系统的状态变量向量. $f, g{:}R^n \to R^n$ 是两个连续的函数向量; $F{:}R^n \to R^{n\times p}$, $G{:}R^n \to R^{n\times q}$ 是两个连续的函数矩阵; $\theta \in R^p, \varphi \in R^q$ 分别是混沌系统 (1) 和 (2) 的系统参数; U 为待设计的同步控制器.

定义驱动系统 (1) 和响应系统 (2) 之间的误差向量为

$$E(t) = [e_1, e_2, \cdots, e_n]^{\mathrm{T}} = Y(t) - M\cdot X(t), \tag{3}$$

其中 $M = \mathrm{diag}\{m_1, m_2, \cdots, m_n\}$ 称为比例矩阵, $m_i, i = 1, 2, \cdots, n$ 为比例因子. 当误差向量满足

$$\begin{aligned} &\|E(t)\| \leqslant \lambda\,\mathrm{e}^{-\beta t}, \quad 0 \leqslant t \leqslant t_{\mathrm{c}}, \\ &E(t) = 0, \quad t \geqslant t_{\mathrm{c}}, \end{aligned} \tag{4}$$

其中 λ 和 β 为正数, β 称为指数收敛速率. 此时该误差系统稳定, 驱动和响应系统达到投影同步, 同步截止时间为 t_{c}.

本文的目的是设计一个自适应同步控制器和参数自适应律, 使得驱动系统按照比例矩阵与响应系统达到有限时间同步, 并且同步截止时间可通过设置控制器和自适应律的参数进行调节, 从而实现同步时间可控.

2.2 时间可控的同步控制器设计

针对如上数学模型所述的混沌系统, 设计自适应同步控制器可将响应系统 (2) 的轨道按一定比例控制到驱动系统 (1) 的轨道上去, 最后两个系统达到投影同步. 要使得同步时间可控, 需在自适应同步控制器和参数自适应律的基础上增加同步时间控制项, 通过调节同步控制项的参数, 可优化同步时间. 设计同步控制器如下:

$$\begin{aligned} U(t,X,Y) = &- G(Y)\cdot\hat{\varphi} + M\cdot F(X)\cdot\hat{\theta} - g(Y) \\ &+ M\cdot f(X) - \beta\cdot E - v\cdot E', \end{aligned} \tag{5}$$

其中参数 $\hat{\theta}$ 和 $\hat{\varphi}$ 为不确定参数 θ 和 φ 的估计, 参数满足如下自适应法则:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\theta}} &= -F^{\mathrm{T}}(x)ME - \beta\tilde{\theta} - v\tilde{\theta}', \\ \dot{\hat{\varphi}} &= G^{\mathrm{T}}(y)E - \beta\tilde{\varphi} - v\tilde{\varphi}', \end{aligned} \tag{6}$$

β 为误差收敛速率, v 为反馈系数; $E' = [e_1^{2\alpha-1}, e_2^{2\alpha-1}, \cdots, e_n^{2\alpha-1}]^{\mathrm{T}}$ 为含有 n 个元素的向量, 其元素依次为各个系统误差的 $(2\alpha-1)$ 次方; $\tilde{\theta}' = [\tilde{\theta}_1^{2\alpha-1}, \tilde{\theta}_2^{2\alpha-1}, \cdots, \tilde{\theta}_p^{2\alpha-1}]^{\mathrm{T}}$ 为含有 p 个元素的向量, 其元素依次为驱动系统各个参数误差的 $(2\alpha-1)$ 次方; $\tilde{\varphi}' = [\tilde{\varphi}_1^{2\alpha-1}, \tilde{\varphi}_2^{2\alpha-1}, \cdots, \tilde{\varphi}_q^{2\alpha-1}]^{\mathrm{T}}$ 为含有 q 个元素的向量, 其元素依次为响应系统各个参数误差的 $(2\alpha-1)$ 次方, 其中 $0.5 < \alpha \leqslant 1$. 自适应同步控制器和参数自适应律的后两项用于控制同步截止时间 t_{c}, 控制器的其余项用于控制系统轨道以达到投影同步, 参数自适应律的其他项用于控制不确定的系统参数向确定系统的参数演化.

定理 采用设计控制器 (5) 和自适应律 (6), 误差向量 (3) 能够在有限时间 t_{c} 内以给定的指数速率 β 趋于 0. 其中

$$t_{\mathrm{c}} = \frac{\ln[1 + \beta(2V(0))^{1-\alpha}/v]}{2\beta(1-\alpha)}, \tag{7}$$

$0 < \beta < 1$ 为误差收敛速率, $v > 0$ 为反馈系数, $0.5 < \alpha \leqslant 1$, $V(0)$ 由驱动系统和响应系统状态变量和系统参数的初值所决定.

证明 由 (1)—(3) 式可得误差系统为

$$\begin{aligned} \dot{E} = &G(Y)\cdot\varphi - MF(X)\cdot\theta + g(Y) \\ &- Mf(X) + U(t,X,Y). \end{aligned} \tag{8}$$

将控制器代入误差系统 (8) 得

$$\dot{E} = -G(Y)\tilde{\varphi} + MF(X)\tilde{\theta} - \beta E - vE'. \tag{9}$$

定义函数

$$V(t) = \frac{1}{2}(E^{\mathrm{T}}E + \tilde{\theta}^{\mathrm{T}}\tilde{\theta} + \tilde{\varphi}^{\mathrm{T}}\tilde{\varphi}), \tag{10}$$

可得 $V(t)$ 的对时间 t 的导数为

$$\dot{V} = E^{\mathrm{T}}\dot{E} + \tilde{\theta}^{\mathrm{T}}\dot{\tilde{\theta}} + \tilde{\varphi}^{\mathrm{T}}\dot{\tilde{\varphi}}. \tag{11}$$

将参数自适应律 (6) 和误差系统 (9) 代入上式,

$$\begin{aligned} \dot{V} = &E^{\mathrm{T}}[MF(X)\tilde{\theta} - G(Y)\tilde{\varphi} - \beta E - vE'] \\ &- \tilde{\theta}^{\mathrm{T}}[F^{\mathrm{T}}(X)ME + \beta\tilde{\theta} + v\tilde{\theta}'] \\ &+ \tilde{\varphi}^{\mathrm{T}}[G^{\mathrm{T}}(Y)e - \beta\varphi - v\tilde{\varphi}'] \\ = &-(E^{\mathrm{T}}\beta E + \tilde{\theta}^{\mathrm{T}}\beta\tilde{\theta} + \tilde{\varphi}^{\mathrm{T}}\beta\tilde{\varphi}) \\ &-(E^{\mathrm{T}}vE' + \tilde{\theta}^{\mathrm{T}}v\tilde{\theta}' + \tilde{\varphi}^{\mathrm{T}}v\tilde{\varphi}') \end{aligned}$$

$$=-2\beta V-v(\sum_{i=1}^{n}e_i^{2\alpha}+\sum_{j=1}^{p}\tilde{\theta}_j^{2\alpha}+\sum_{l=1}^{q}\tilde{\varphi}_l^{2\alpha}), \quad (12)$$

由于 $0.5<\alpha\leqslant 1$, 可得

$$\sum_{i=1}^{n}e_i^{2\alpha}+\sum_{j=1}^{p}\tilde{\theta}_j^{2\alpha}+\sum_{l=1}^{q}\tilde{\varphi}_l^{2\alpha} \geqslant\left(\sum_{i=1}^{n}e_i^{2}+\sum_{j=1}^{p}\tilde{\theta}_j^{2}+\sum_{l=1}^{q}\tilde{\varphi}_l^{2}\right)^{\alpha}$$

(附录 A1), 因此上式可转化为不等式

$$\dot{V}\leqslant-2\beta V-v\left(\sum_{i=1}^{n}e_i^{2}+\sum_{j=1}^{p}\tilde{\theta}_j^{2}+\sum_{l=1}^{q}\tilde{\varphi}_l^{2}\right)^{\alpha} =-2\beta V-v(2V)^{\alpha},\forall t\geqslant 0. \quad (13)$$

通过移项, 方程两边同时乘以 $(1-\alpha)V^{-\alpha}$, 得

$$(1-\alpha)V^{-\alpha}\dot{V}+2\beta(1-\alpha)V^{1-\alpha} \leqslant-2^{\alpha}(1-\alpha)v,\forall t\geqslant 0. \quad (14)$$

令

$$Q(t)=V^{1-\alpha},\forall t\geqslant 0, \quad (15)$$

则 (14) 式可以表示为

$$\dot{Q}+2\beta(1-\alpha)Q\leqslant-2^{\alpha}(1-\alpha)v,\forall t\geqslant 0. \quad (16)$$

方程两边同时乘以 $\mathrm{e}^{2\beta(1-\alpha)t}$, 得到

$$\mathrm{e}^{2\beta(1-\alpha)t}\dot{Q}+2\beta(1-\alpha)\mathrm{e}^{2\beta(1-\alpha)t}Q =\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\mathrm{e}^{2\beta(1-\alpha)t}Q]\leqslant-2^{\alpha}(1-\alpha)v\,\mathrm{e}^{2\beta(1-\alpha)t},\forall t\geqslant 0. \quad (17)$$

对上式从 0 到 t 进行积分得到

$$\int_0^{\mathrm{T}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\mathrm{e}^{2\beta(1-\alpha)t}Q]\cdot\mathrm{d}t=\mathrm{e}^{2\beta(1-\alpha)t}Q(t)-Q(0) \leqslant\int_0^{\mathrm{T}}-2^{\alpha}(1-\alpha)v\,\mathrm{e}^{2\beta(1-\alpha)t}\cdot\mathrm{d}t =-\frac{v}{2^{1-\alpha}\beta}(\mathrm{e}^{2\beta(1-\alpha)t}-1),\forall t\geqslant 0. \quad (18)$$

因此

$$Q(t)\leqslant\left[\frac{v}{2^{1-\alpha}\beta}+Q(0)\right]\mathrm{e}^{-2\beta(1-\alpha)t} -\frac{v}{2^{1-\alpha}\beta},\forall t\geqslant 0. \quad (19)$$

由 (15) 式和 (19) 式, 可以推出

$$V(t)\leqslant\left\{\left[\frac{v}{2^{1-\alpha}\beta}+V^{1-\alpha}(0)\right]\mathrm{e}^{-2\beta(1-\alpha)t} -\frac{v}{2^{1-\alpha}\beta}\right\}^{1/(1-\alpha)},\forall t\geqslant 0. \quad (20)$$

定义

$$W(t)=\frac{1}{2}E^{\mathrm{T}}E, \quad (21)$$

明显有 $W(t)\leqslant V(t)$, 由 (20) 式和 (21) 式, 可以推出

$$W(t)\leqslant\left\{\left[\frac{v}{2^{1-\alpha}\beta}+V^{1-\alpha}(0)\right]\mathrm{e}^{-2\beta(1-\alpha)t} -\frac{v}{2^{1-\alpha}\beta}\right\}^{1/(1-\alpha)}. \quad (22)$$

当 $t=t_{\mathrm{c}}$ 时, 上式右边为 0, 又 $W(t)$ 恒大于等于 0, 因此有

$$W(t)\leqslant\left\{\left[\frac{v}{2^{1-\alpha}\beta}+V^{1-\alpha}(0)\right]\mathrm{e}^{-2\beta(1-\alpha)t} -\frac{v}{2^{1-\alpha}\beta}\right\}^{1/(1-\alpha)},\ 0\leqslant t\leqslant t_{\mathrm{c}},$$
$$W(t)=0,t\geqslant t_{\mathrm{c}}. \quad (23)$$

最后, 由 (21) 和 (23) 式可得

$$\|E(t)\|\leqslant\sqrt{2}\left[\frac{v}{2^{1-\alpha}\beta}+V^{1-\alpha}(0)\right]^{1/2(1-\alpha)} \times\mathrm{e}^{-\beta t},\ 0\leqslant t\leqslant t_{\mathrm{c}},$$
$$E(t)=0,t\geqslant t_{\mathrm{c}}. \quad (24)$$

按照 2.1 的定义可知, 驱动系统的误差随着 $\mathrm{e}^{-\beta t}$ 成指数收敛, 收敛速率为 β, 截止时间 t_{c}. 证毕.

由以上分析可知同步截止时间 t_{c} 由参数 $\alpha,\beta,v,V(0)$ 的值决定, 根据参数特点, 设置不同的参数值, 可实现同步时间的可控性, 为保密通信提供速度和效率提供了保障.

3 投影同步仿真

为了验证该同步控制器和自适应律的有效性, 我们选取一个三维非线性自治混沌系统 [24] 作为驱动系统

$$\dot{x}_1=x_2-a_1x_1+x_2x_3,\quad \dot{x}_2=b_1x_2-x_1x_3,$$
$$\dot{x}_3=c_1x_1x_2-d_1x_3-h_1x_1^2. \quad (25)$$

驱动系统参数和初值分别设为:

$$a_1=8,\quad b_1=4,\quad c_1=8,\quad d_1=11,\quad h_1=0.5,$$
$$(x_1(0),x_2(0),x_3(0))^{\mathrm{T}}=(1,5,3)^{\mathrm{T}}$$

可产生两个两翼混沌吸引子; 选取另一个带控制器的三维自治系统 T 混沌系统 [25] 作为响应系统

$$\dot{y}_1=a_2(y_2-y_1)+u_1,$$
$$\dot{y}_2=(c_2-a_2)y_1-a_2y_1y_3+u_2,$$
$$\dot{y}_3=-b_2y_3+y_1y_2+u_3. \quad (26)$$

响应系统参数和初值分别为:

$$a_2 = 2.1, \quad b_2 = 0.6, \quad c_2 = 30,$$
$$(y_1(0), y_2(0), y_3(0))^{\mathrm{T}} = (4, 2, 6)^{\mathrm{T}}$$

时可产生混沌行为. 计算得 $V(0) = 616$. 取 $\alpha = 0.8$, $v = 50$, 投影同步收敛速率 $\beta = 0.5$, 比例因子 $(m_1, m_2, m_3)^{\mathrm{T}} = (1, -2, 3)$. 由式 (3) 定义的系统误差和误差系统为

$$\begin{aligned} &e_1 = y_1 - m_1 x_1, \quad e_2 = y_2 - m_2 x_2, \\ &e_3 = y_3 - m_3 x_3. \end{aligned} \tag{27}$$

$$\begin{aligned} &\dot{e}_1 = u_1 + a_2(y_2 - y_1) - x_2 - a_1 x_1 + x_2 x_3, \\ &\dot{e}_2 = u_2 + (c_2 - a_2) y_1 - a_2 y_1 y_3 + 2 b_1 x_2 - 2 x_1 x_3, \\ &\dot{e}_3 = u_3 + -b_2 y_3 + y_1 y_2 - 3 c_1 x_1 x_2 + 3 d_1 x_3 \\ &\qquad + 3 h_1 x_1^2. \end{aligned} \tag{28}$$

由 (4), (5) 式可得同步控制器和参数自适应律为

$$\begin{aligned} u_1 =& \hat{a}_2(y_1 - y_2) + m_1(x_2 - \hat{a}_1 x_1 + x_2 x_3) \\ &- \beta e_1 - v e_1^{(2\alpha-1)}, \\ u_2 =& -\hat{c}_2 y_1 + \hat{a}_2(y_1 + y_1 y_3) + m_2(\hat{b}_1 x_2 - x_1 x_3) \\ &- \beta e_2 - v e_2^{(2\alpha-1)}, \\ u_3 =& -y_1 y_2 + \hat{b}_2 y_3 + m_3(\hat{c}_1 x_1 x_2 - \hat{d}_1 x_3 - \hat{h}_1 x_1^2) \\ &- \beta e_3 - v e_3^{(2\alpha-1)}; \end{aligned} \tag{29}$$

和

$$\begin{aligned} &\dot{\hat{a}}_1 = m_1 x_1 e_1 - \beta \tilde{a}_1 - v \tilde{a}_1^{2\alpha-1}, \\ &\dot{\hat{b}}_1 = -m_2 x_2 e_2 - \beta \tilde{b}_1 - v \tilde{b}_1^{2\alpha-1}, \\ &\dot{\hat{c}}_1 = -m_3 x_1 x_2 e_3 - \beta \tilde{c}_1 - v \tilde{c}_1^{2\alpha-1}, \\ &\dot{\hat{d}}_1 = m_3 x_3 e_3 - \beta \tilde{d}_1 - v \tilde{d}_1^{2\alpha-1}, \\ &\dot{\hat{h}}_1 = m_3 x_1^2 e_3 - \beta \tilde{h}_1 - v \tilde{h}_1^{2\alpha-1}; \end{aligned} \tag{30}$$

$$\begin{aligned} &\dot{\hat{a}}_2 = -(y_1 - y_2) e_1 - (y_1 + y_1 y_3) e_2 - \beta \tilde{a}_2 - v \tilde{a}_2^{2\alpha-1}, \\ &\dot{\hat{b}}_2 = -y_3 e_3 - \beta \tilde{b}_2 - v \tilde{b}_2^{2\alpha-1}, \\ &\dot{\hat{c}}_2 = y_1 e_2 - \beta \tilde{c}_2 - v \tilde{c}_2^{2\alpha-1}. \end{aligned} \tag{31}$$

其中 $\hat{a}_1, \hat{b}_1, \hat{c}_1, \hat{d}_1, \hat{h}_1, \hat{a}_2, \hat{b}_2, \hat{c}_2$ 是驱动系统 (25) 和响应系统 (26) 的未知参数估计值.

$$\begin{aligned} &\tilde{a}_1 = \hat{a}_1 - a_1, \quad \tilde{b}_1 = \hat{b}_1 - b_1, \quad \tilde{c}_1 = \hat{c}_1 - c_1, \\ &\tilde{d}_1 = \hat{d}_1 - d_1, \quad \tilde{h}_1 = \hat{h}_1 - h_1, \quad \tilde{a}_2 = \hat{a}_2 - a_2, \\ &\tilde{b}_2 = \hat{b}_2 - b_2, \quad \tilde{c}_2 = \hat{c}_2 - c_2 \end{aligned}$$

为相应的误差估计. 未知参数估计值的初值为

$$\begin{aligned} &(\hat{a}_1(0), \hat{b}_1(0), \hat{c}_1(0), \hat{d}_1(0), \hat{h}_1(0))^{\mathrm{T}} \\ &= (0.1, 0.1, 0.1, 0.1, 0.1)^{\mathrm{T}}, \\ &(\hat{a}_2(0), \hat{b}_2(0), \hat{c}_2(0))^{\mathrm{T}} = (0.1, 0.1, 0.1)^{\mathrm{T}}. \end{aligned}$$

用龙格库塔法对上述微分方程进行仿真, 结果表明驱动系统和响应系统在所设计的控制器和参数自适应律下实现了投影同步. 其中, 图 1(a)—(c) 为驱动系统和响应系统在时间上的投影图, 驱动状态变量和响应状态变量分别按 1, −2, 3 的比例同步, 图 2(a), (b) 分别为驱动系统参数和响应系统参数演化图.

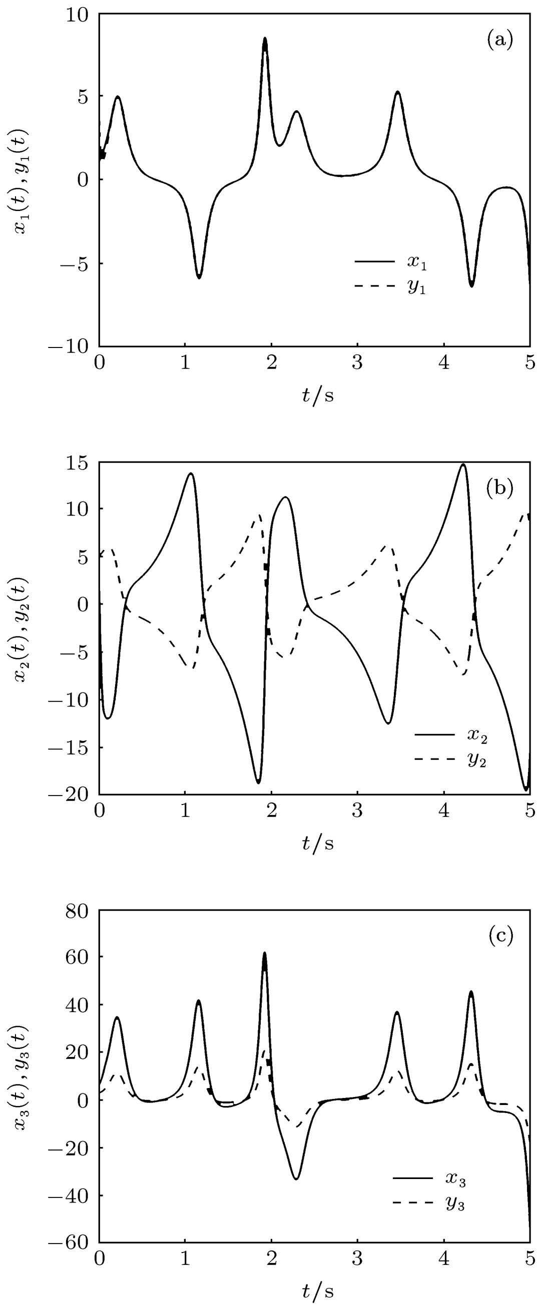

图 1 驱动系统和响应系统状态变量投影图 (a) x_1 与 y_1 按照 1:1 的比例投影图; (b) x_2 与 y_2 按照 −2:1 的比例投影图; (c) x_3 与 y_3 按照 3:1 的比例投影图

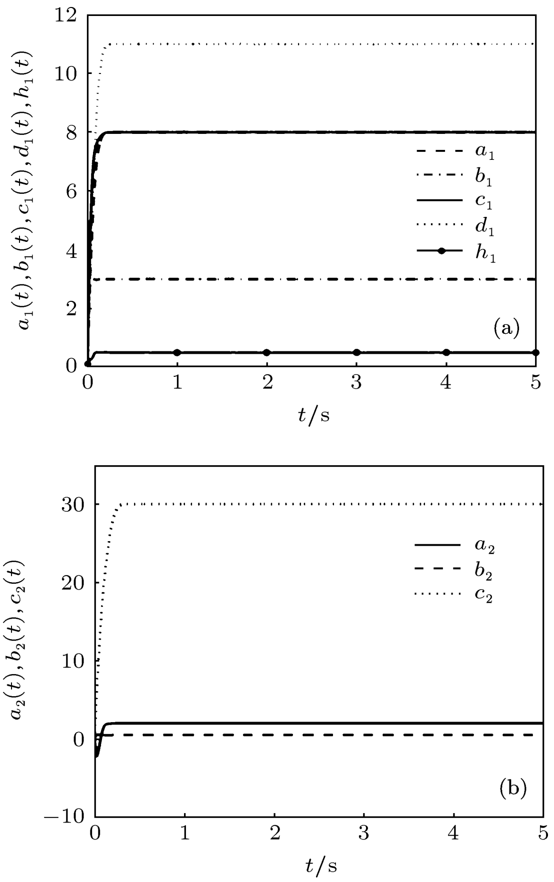

图 2 驱动系统和响应系统的参数随时间演化图 (a) 驱动系统参数 $\hat{a}_1,\hat{b}_1,\hat{c}_1,\hat{d}_1,\hat{h}_1$ 随 t 趋于 $a_1=8,b_1=3,c_1=8,d_1=11,h_1=0.5$; (b) 响应系统参数 $\hat{a}_2,\hat{b}_2,\hat{c}_2$ 随 t 趋于 $a_1=2.1,b_1=0.6,c_1=30$

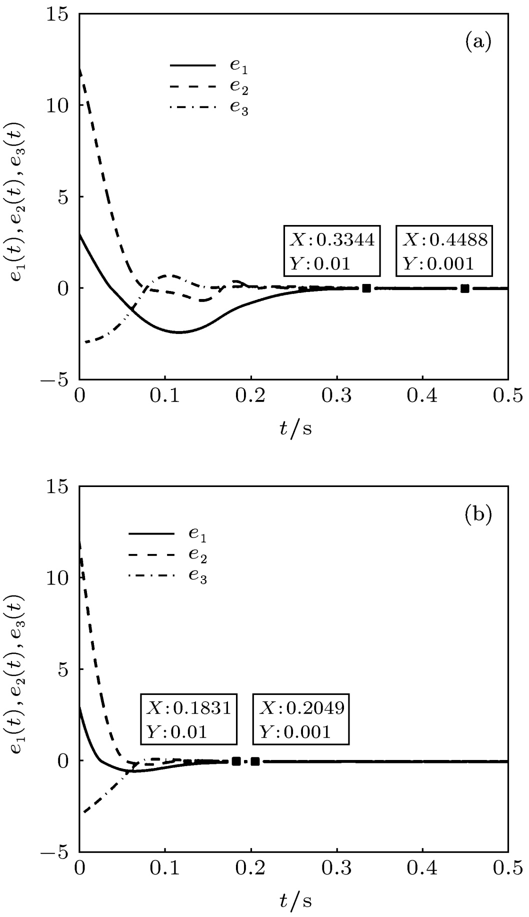

图 3 驱动系统和响应系统同步误差 (a) 同步时间约为 0.4s; (b) 同步时间约为 0.2s

为了验证同步时间可控, 保持参数 $V(0)=616$, $\alpha=0.8$, $\beta=0.5$ 不变, 取 (a) $v=50$; (b) $v=100$, 根据 (22) 式同步截止时间推导公式可计算出截止时间分别为 (a) $t_c=0.407$; (b) $t_c=0.205$. 经仿真得到实际同步时间如图 3(a),(b) 所示, 设置同步误差阈值为 0.001, 当 $v=50$ 时, 同步时间 $t=0.4488$, 当 $v=100$ 时, 同步时间 $t=0.2049$. 在实际情况中, 判定同步的阈值可以设置的更大一些, 如同步误差阈值设为 0.01 时, 两种情况的同步时间分别为 $t=0.3344$ 和 $t=0.1831$.

由此可知, 实际仿真中, 误差达到同步的时间比推导过程中的较小一些, 这是因为我们在推导过程中进行了不等式的放大. 实验结果显示, 仿真的数据与理论计算的数据基本一致. 本文设计的同步控制器和自适应律可以实现一类异结构混沌系统的投影同步, 并有效的控制和估计同步截止时间.

4 结 论

本文基于自适应方法对混沌系统进行投影同步, 实现了同步时间可控. 该方法针对一类不同的混沌系统, 设计了通用的同步控制器和参数自适应律, 驱动系统和响应系统的误差在有限时间内按指数形式趋于稳定, 系统参数按设计的自适应律收敛. 经过严格的数学证明, 推导出同步截止时间的计算公式, 并由此提出了同步时间可控的概念. 通过对两个非自治混沌系统的同步仿真, 驱动系统和响应系统在时间上的投影按给定的比例演化, 不确定参数随系统参数演化. 最后, 两组同步误差的对比显示, 同步截止时间与理论计算结果相一致, 并实现了同步时间可由特定参数控制. 本文提出的同步方法具有较高的鲁棒性、保密性和实用性, 在信息安全和高效通信中有潜在的应用价值.

附 录 A1

当 $0<\alpha\leqslant 1$ 时,

$$\sum_{i=1}^{n} e_i^{2\alpha}+\sum_{j=1}^{p}\tilde{\theta}_j^{2\alpha}+\sum_{l=1}^{q}\tilde{\varphi}_l^{2\alpha} \geqslant\left(\sum_{i=1}^{n} e_i^{2}+\sum_{j=1}^{p}\tilde{\theta}_j^{2}+\sum_{l=1}^{q}\tilde{\varphi}_l^{2}\right)^{\alpha}.$$

证明 根据题意, 可转化为证明

$$(x_1+x_2+\cdots+x_k)^{\alpha}\leqslant x_1^{\alpha}+x_2^{\alpha}+\cdots+x_k^{\alpha},$$

在 $x_i\geqslant 0, i=1,2,\cdots,k, k=n+p+q, 0<\alpha\leqslant 1$ 条件下成立.

1) $k=1$ 时, $x_1^{\alpha}\geqslant x_1^{\alpha}$ 显然成立.

2) $k=2$ 时, $x_1^{\alpha}+x_2^{\alpha}\geqslant(x_1+x_2)^{\alpha}$, $x_1,x_2\geqslant 0$ 成立. 证明如下:

令 $f(x)=x^{\alpha}, 0<\alpha\leqslant 1$. 显然 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 连续可导, 因此 $f(x)$ 在 x_0 点的一阶泰勒级数展开为

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+o(x-x_0),$$

其中 $o(x-x_0)$ 为 $f(x)$ 的在 $x=x_0$ 处的高阶无穷小.

若 $x_1\geqslant x_2$, 由于 $0<\alpha\leqslant 1, x_1^{\alpha-1}\leqslant x_2^{\alpha-1}$, $f(x)$ 在 x_1 点展开

$$f(x_1+x_2)=f(x_1)+f'(x_1)x_2+o(x_2),$$

即

$$(x_1+x_2)^{\alpha}=x_1^{\alpha}+\alpha x_1^{\alpha-1}x_2+o(x_2) \leqslant x_1^{\alpha}+\alpha x_2^{\alpha}\leqslant x_1^{\alpha}+x_2^{\alpha}.$$

若 $x_1<x_2$, 由于 $0<\alpha\leqslant 1$, 有 $x_1^{\alpha-1}>x_2^{\alpha-1}$, $f(x)$ 在 x_2 点展开

$$f(x_1+x_2)=f(x_2)+f'(x_2)x_1+o(x_1),$$

即

$$(x_1+x_2)^{\alpha}=x_2^{\alpha}+\alpha x_2^{\alpha-1}x_1+o(x_1)<x_2^{\alpha}+\alpha x_1^{\alpha}<x_2^{\alpha}+x_1^{\alpha}.$$

综上, $(x_1+x_2)^{\alpha}\leqslant x_1^{\alpha}+x_2^{\alpha}, x_1,x_2\geqslant 0, 0<\alpha\leqslant 1$.

3) 假设 $k=l$ 有 $(x_1+x_2+\cdots+x_l)^{\alpha}\leqslant x_1^{\alpha}+x_2^{\alpha}+\cdots+x_l^{\alpha}$ 成立.

4) 当 $k=l+1$ 时, 由 2), 3) 的结论可知

$$(x_1+x_2+\cdots+x_l+x_{l+1})^{\alpha}\leqslant(x_1+x_2+\cdots+x_l)^{\alpha}+x_{l+1}^{\alpha}\leqslant x_1^{\alpha}+x_2^{\alpha}+\cdots+x_l^{\alpha}+x_{l+1}^{\alpha}.$$

由数学归纳法可知, 不等式

$$(x_1+x_2+\cdots+x_k)^{\alpha}\leqslant x_1^{\alpha}+x_2^{\alpha}+\cdots+x_k^{\alpha},$$

在 $x_i\geqslant 0, i=1,2,\cdots,k, 0<\alpha\leqslant 1$ 条件下成立.

证毕.

[1] Pecora L M, Carroll T L 1990 *Phys. Rev. Lett.* **64** 821

[2] Zhang R X, Tian G, Li P, Yang S P 2008 *Acta. Phys. Sin.* **57** 2073 (in Chinese) [张若洵, 田钢, 栗苹, 杨世平 2008 物理学报 **57** 2073]

[3] Li J F, Li N, Liu Y P, Gan Y 2009 *Acta. Phys. Sin.* **58** 0779 (in Chinese) [李建芬, 李农, 刘宇平, 甘轶 2009 物理学报 **58** 0779]

[4] Wang B, Guan Z H 2010 *Nonlinear Anal. RWA* **11** 1925

[5] Zhou P, Wei L J, Cheng X F 2009 *Acta. Phys. Sin.* **58** 5201 (in Chinese) [周平, 危丽佳, 程雪峰 2009 物理学报 **58** 5201]

[6] Meng J, Wang X Y 2009 *Acta. Phys. Sin.* **58** 0819 (in Chinese) [孟娟, 王兴元 2009 物理学报 **58** 0819]

[7] Pourmahmood M, Khanmohammadi S, Alizadeh G 2011 *Commun Nonlinear Sci Numer. Simulat* **16** 2853

[8] Al-Sawalha M M, Noorani M 2010 *Commun Nonlinear Sci. Numer Simulat.* **15** 1036

[9] Li X F, Leung A C S, Han X P, Liu X J, Chu Y D 2011 *Nonlinear Dynam* **63** 263

[10] Jing X D, Lv L 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 4766 (in Chinese) [敬晓丹, 吕翎 2008 物理学报 **57** 4766]

[11] Shahverdiev E, Sivaprakasam S, Shore K 2002 *Phys. Lett.* A **292** 320

[12] Guan Z H, Liu Z W, Feng G, Wu Y 2010 *IEEE T CircuitsI* **57** 2182

[13] Akcakaya M, Nehorai A 2010 *IEEE Trans. Signal Process* **58** 4994

[14] Wang Z L, Shi X R 2010 *Nonlinear Dynam* **59** 559

[15] Li J F, Li N 2011 *Acta. Phys. Sin.* **60** 080507 (in Chinese) [李建芬, 李农 2011 物理学报 **60** 87]

[16] Yu Y G, Li H X 2010 *Nonlinear Anal. RWA* **11** 2456

[17] Yang W, Sun J T 2010 *Phys. Lett.* A **374** 557

[18] Li S H, Tian Y P 2003 *Chaos Soliton. Fract.* **15** 303

[19] Vincent U E, Guo R 2011 *Phys. Lett.* A **375** 2322

[20] Aghababa M P, Khanmohammadi S, Alizadeh G 2011 *Appl. Math. Mode.* **35** 3080

[21] Yang Y Q, Wu X F 2012 *Nonlinear Dynam.* **70** 197

[22] Wang H, Han Z Z, Xie Q Y Zhang W 2009 *Commun. Nonlinear Sci Numer. Simulat.* **14** 2239

[23] Hou Y Y, Wan Z L, Liao T L 2012 *Nonlinear Dynam.* **70** 315

[24] Chen Z, Yang Y, Qi Q, Yuan Z 2007 *Phys. Lett.* A **360** 696

[25] Li Y X, Tang W K S, Chen G R 2005 *Int. J. Bifurcat Chaos* **15** 3367

Time-controllable projective synchronization of a class of chaotic systems based on adaptive method*

Wang Chun-Hua† Hu Yan Yu Fei Xu Hao

(*College of Information Science and Engineering, Hunan University, Changsha* 410082*, China*)

(Received 19 December 2012; revised manuscript received 17 January 2013)

Abstract

To solve the problem of indeterminate synchronization time in different chaotic systems, this paper presents a time-controllable synchronization scheme. A general synchronization controller and parameter update laws are proposed to stabilize the error system, thus the drive and response systems could be synchronized up to a given scaling matrix at a pre-specified exponential convergence rate. The synchronization time formula is strictly deduced, which suggests that the speed of synchronization is determined by several parameters, such as exponential rate, initial system value and other parameters brought in by the controller. By adjusting these parameters, the performance of the synchronization can be effectively improved. In numerical simulation, two nonidentical 3D autonomous chaotic systems are chosen to verify this method. The error system can be rapidly stabilized, and unknown parameters are also identi?ed correctly. Firally, two groups of time-controllable parameters are given to verify the theory, wherein synchronization of both cases can be obtained quickly and each result of the synchronization is consistent with the theoretical calculation. The synchronization scheme is characterized by high safety and efficiency, and has its potential value in secure communication.

Keywords: chaos, adaptive control, projective synchronization, time-controllable

PACS: 05.45.Xt **DOI:** 10.7498/aps.62.110509

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 61274020), and the Open Fund Project of Key Laboratory in Hunan Universities, China (Grant No. 12K011).

† Corresponding author. E-mail: wch1227164@sina.com