

# 器壁滑动摩擦力对受振颗粒体系中冲击力倍周期分岔过程的影响\*

韩红 姜泽辉<sup>†</sup> 李脩然 吕晶 张睿 任杰骥

(哈尔滨工业大学理学院物理系, 哈尔滨 150001)

(2012 年 12 月 6 日收到; 2013 年 2 月 15 日收到修改稿)

颗粒物质由离散的固体颗粒组成, 受到周期性振动时可以表现出复杂的动力学行为. 这些行为往往受众多因素的影响, 如空气阻力和器壁摩擦力等. 针对受振颗粒体系中冲击力的倍周期分岔现象, 通过抽真空或将容器底镂空消除空气阻力, 单独研究器壁滑动摩擦力的影响. 结果表明在仅有器壁摩擦力作用的情况下, 倍周期分岔过程仅受约化振动加速度的控制, 与颗粒的尺寸、颗粒层数及振动频率无关. 将器壁摩擦力处理成一个大小恒定、方向与颗粒和器壁相对速度反向的阻力, 并包含到完全非弹性蹦球模型中, 能够对所观察到的现象给出很好的解释. 通过对倍周期分岔点测量平均值的拟合, 得到器壁滑动摩擦力的大小约为颗粒总重量的 10%.

**关键词:** 颗粒物质, 器壁摩擦力, 倍周期分岔, 冲击力

**PACS:** 45.70.-n, 45.50.-j, 05.45.-a

**DOI:** 10.7498/aps.62.114501

## 1 引言

颗粒物质广泛存在于自然界、日常生活及生产领域中, 其行为和特性长期受到工程和物理学界的关注<sup>[1]</sup>. 但物理学中的研究通常将颗粒的尺寸界定为大于 100  $\mu\text{m}$ . 在这一尺度下, 颗粒的布朗运动可以忽略不计, 致使颗粒体系具有不同于常规分子体系的独特性质<sup>[2]</sup>. 例如, 粮仓中的谷物超过一定厚度时, 谷物对仓底的压力不再随厚度而增加, 而是趋于饱和, 存在“粮仓效应”<sup>[3,4]</sup>; 颗粒物质中的应力分布是不均匀的, 存在力链或力网结构<sup>[5]</sup>.

人们经常用“一盘散沙”来比喻或形容那些涣散的无法组织起来的系统或群体. 但对于真正的沙子或颗粒体系而言, 情况却并非如此. 例如, 对颗粒物质施加周期性竖直振动时, 颗粒的运动并不是互不相关的, 而是表现出整体性或协同性. 经常观察到的现象有: “巴西果”效应<sup>[6]</sup>、对流运动<sup>[7]</sup>、分频表面驻波<sup>[8,9]</sup>和倍周期分岔<sup>[10-14]</sup>等. 其中倍周期分岔是一种较为典型的现象: 固定振动频率然后逐

渐增加振动强度, 会发现颗粒对容器底的冲击力不是杂乱无章的, 而是随着振动强度的增加表现出一系列的倍周期分岔过程, 分岔序列为 2 倍周期, 4 倍周期, 混沌, 3 倍周期, 6 倍周期, 混沌, 4 倍周期, 8 倍周期, 混沌等<sup>[11,13,14]</sup>. 产生这一现象的根源是什么以及哪些实验参数有关? 这些问题的澄清将有助于颗粒物质动力学行为的深入理解.

倍周期分岔现象的出现与颗粒体系的能量耗散有关. 通过颗粒间的摩擦与非弹性碰撞, 颗粒体系能迅速消耗掉颗粒自身及外界输入的动能, 从而使颗粒倾向于聚集在一起. 颗粒数较小且振动较强时, 颗粒间的能量耗散不足以抗衡由振动输入的能量, 颗粒将被强烈流化表现出类似于气体的特征. 但颗粒数量足够大 (约 20 层颗粒) 时, 颗粒间更加频繁的碰撞与摩擦致使颗粒密堆积在一起形成聚集态. 在这种聚集态中, 颗粒的运动协同起来而具有整体性, 类似于固体. 实验中, 这种整体性体现在颗粒体系对容器底的冲击力是窄脉冲式的<sup>[10-14]</sup>. 虽然体系中存在表面流化、表面波、缓慢对流等运动形式, 但这种整体性依然存在. 对于

\* 国家自然科学基金 (批准号: 10974038) 资助的课题.

<sup>†</sup> 通讯作者. E-mail: physjzh@hit.edu.cn

直径为  $d = 0.50\text{--}1.00\text{ mm}$  的金属颗粒, 窄脉冲的宽度约为  $2\text{--}4\text{ ms}$ , 且与颗粒尺寸的关系不显著<sup>[13]</sup>. 振动过程中颗粒的这种整体运动, 可以用完全非弹性蹦球模型给予描述. 这一模型将所有颗粒看作一个整体, 将其等效成一个完全非弹性的或塑性的球, 并用这个在竖直振动台面上蹦跳的单球模拟颗粒体系的整体运动. 这样就将多体问题转化为单体问题, 理论处理上大为简化. 但是, 蹦球模型给出的分岔点理论值始终小于实验值<sup>[10–14]</sup>, 原因是蹦球模型只考虑了颗粒间的能量耗散, 而实际的受振颗粒体系中还存在着其他的能量耗散——空气阻力和器壁摩擦力. 这两种能量耗散的作用机制显然是有差别的, 实验中如何将它们区分开而单独研究各自的影响, 蹦球模型能否将二者包含进来需要做进一步的研究.

实验已经证实受振颗粒床中空气会对颗粒的运动产生显著影响, 如空气的存在与否决定着小颗粒 ( $d < 1\text{ mm}$ ) 起堆 (heaping) 现象的产生与消失<sup>[15]</sup>; 气流的强弱会影响颗粒的尺寸分离状态 (“巴西果”或“反巴西果”效应)<sup>[16]</sup>; 器壁附近与颗粒床中心处的气压及其倍周期分岔点存在差别<sup>[17]</sup>. 最近, Pastor 等人<sup>[12]</sup>在颗粒对流实验中 (玻璃珠  $d = 0.5 \pm 0.1\text{ mm}$ ) 发现, 空气的冲刷作用使 2 倍周期分岔点明显大于蹦球模型的理论值, 即使在空气作用很小的情况下 (抽真空), 这一现象仍然存在. 这表明除了空气阻力, 器壁摩擦力的作用也是不可忽略的.

一般而言, 对于小颗粒空气的影响是主要的, 而对大尺寸的颗粒, 空气的影响相对较弱, 起主要作用的是器壁摩擦力<sup>[18]</sup>. 器壁摩擦力的影响体现在它会影响颗粒的对流模式<sup>[19]</sup>及对流速度<sup>[6]</sup>. 但是, 对于中小尺寸的颗粒, 器壁摩擦力和空气阻力同时存在并耦合在一起共同影响体系的动态行为<sup>[10,12,20]</sup>, 很难将它们完全区分开. 文献<sup>[21]</sup>中, 将器壁摩擦力和空气阻力合并在一起, 等效成一个大小恒定、方向与体系质心速度反向的阻力, 并在此基础上研究二者对倍周期分岔过程的影响. 这种处理是以地面为参考系的, 也就是以颗粒体系质心对地速度是向上或向下来判断阻力的方向. 不合理之处在于: 首先, 实际的受振颗粒体系中, 器壁摩擦力的方向应当与颗粒与器壁的相对速度反向; 其次, 空气阻力与气流速度有关, 其大小和方向是时刻变化的而非某一恒定值. 实验上有两种方法可以减弱甚至消除空气阻力的影响, 一种是将容器中的空气

抽走, 另一种是将容器底镂空使空气能自由通过. 消除空气阻力后可以单独研究器壁摩擦力的作用.

颗粒物质与固体界面之间的摩擦力与固体 - 固体间的有所不同. Horváth 等<sup>[22]</sup>通过提拉探棒的方式研究了作用在探棒上的最大静摩擦力与颗粒堆积率的关系, 堆积率越大最大静摩擦力越大, 二者成正比. 胡林等<sup>[23]</sup>进一步指出, 这种最大静摩擦力与接触面积或探棒插入深度有关. 彭政等<sup>[24]</sup>通过拖拉颗粒样品上的固体滑块指出, 最大静摩擦与接触面积无关. 这种不一致只是表面上的, 因为作用在探棒上的正压力是不均匀的, 会随探棒的插入深度而变化<sup>[23]</sup>. 拖拉滑块实验<sup>[25,26]</sup>亦表明, 颗粒体系与固体界面之间的滑动摩擦力与固 - 固之间的类似, 通常与正压力成正比, 而与颗粒的堆积率、接触面积及相对运动速度无关, 但与接触面粗糙程度有关. 在竖直振动的颗粒体系中, 颗粒做上下往复的活塞式运动, 颗粒与器壁之间存在滑动摩擦力. 但在飞行过程中颗粒处于悬空状态, 颗粒对器壁的正压力从何而来, 滑动摩擦力与接触面积的关系及滑动摩擦力是否也符合上述规律尚不十分明确.

为了研究器壁摩擦力对倍周期分岔过程的影响, 实验将在真空和镂空底容器中进行. 通过改变颗粒的尺寸和层数, 考察颗粒与器壁接触面积的变化对滑动摩擦力及倍周期分岔过程的影响. 同时, 改变振动频率, 研究只有器壁滑动摩擦力的情况下, 倍周期分岔过程与振动频率的关系. 此外, 对完全非弹性蹦球模型做了改进, 将器壁滑动摩擦力包含进来. 以振动台面为参考系, 器壁滑动摩擦力的大小恒定、方向与颗粒和器壁的相对速度反向. 在此基础上对实验结果进行了分析与讨论.

## 2 实验

所用容器为内径  $15.30\text{ mm}$  的玻璃管, 器底为不锈钢板 (约  $2\text{ mm}$  厚). 通过两种方式消除空气阻力的影响, 一种是填装颗粒后用气泵将空气抽走, 真空度约为  $1\text{ Pa}$ ; 另一种是在容器底上均匀钻出直径为  $1\text{ mm}$  的通孔 (通孔率约为  $76\%$ ), 然后在底板上固定一层  $150\text{ 目}$  (网孔  $0.10\text{ mm}$ ) 的不锈钢丝网, 底板下面用 4 根铝合金柱支撑. 这一结构保证了空气的顺畅通过, 同时对颗粒又足够“硬”. 所用颗粒为  $d = 1.00 \pm 0.01\text{ mm}$ ,  $0.70 \pm 0.01\text{ mm}$ ,  $0.50 \pm 0.01\text{ mm}$ ,  $0.40 \pm 0.01\text{ mm}$ ,  $0.35 \pm 0.01\text{ mm}$  的不锈钢珠. 颗粒的填装厚度为  $20\text{--}80$  层. 选用这种

内径较小的管状容器是为了抑制颗粒的多重对流卷和成拱 (arching) 现象<sup>[10,27,28]</sup>, 使体系中仅存缓慢的常规对流或有序的“壳层”结构<sup>[14,29,30]</sup>, 以利于冲击力倍周期分岔过程的观测。

装有颗粒的容器固定在电磁式振动台的台面上, 台面在竖直方向做正弦振动, 其位移表示为  $x(t) = A\sin(\omega t)$ , 其中,  $A$  和  $\omega$  分别为台面的振幅和角频率. 台面的加速度由加速度传感器测定. 这里采用约化振动加速度  $\Gamma$  表示振动的强弱,  $\Gamma = A\omega^2/g$ ,  $g$  为重力加速度. 容器底部和台面之间为压电陶瓷式压力传感器, 用来测量颗粒对容器底的冲击力. 冲击力信号用示波器来监视和记录。

### 3 结果与讨论

#### 3.1 倍周期分岔的实验结果

在容器中填装一定厚度的颗粒后, 将频率固定,  $\Gamma$  由 1 缓慢增加到 16 并观察冲击力的倍周期分岔情况. 我们首先检验颗粒尺寸对倍周期分岔过程的影响. 将每一尺寸的颗粒都填装到同一高度, 然后观测冲击力信号随  $\Gamma$  的变化. 结果表明, 无论在真空容器还是镂空底容器中, 冲击力的倍周期分岔序列是一样的, 且与颗粒尺寸无关. 随着  $\Gamma$  的增加, 分岔序列为 2 倍周期, 4 倍周期, 混沌, 3 倍周期, 6 倍周期, 混沌, 4 倍周期, 8 倍周期, 混沌.

以真空容器中的结果为例, 图 1 给出了  $d = 0.70\text{ mm}$  和  $d = 0.35\text{ mm}$  的颗粒的冲击力分岔图. 颗粒填充高度均为  $26.0\text{ mm}$ , 振动频率为  $60\text{ Hz}$ . 图中阴影部分为混沌区, 在示波器上显示为大小和周期不固定的系列冲击力脉冲, 对应的频谱为连续带状谱.  $\Gamma_n^2$  表示 2 跳的  $n$  倍周期分岔点,  $n = 2, 4, 6, \dots$ . 可以看出两种尺寸的颗粒给出相同的倍周期分岔序列. 但二者的实验值并不完全重合, 即使是同一种颗粒, 相同的实验条件也不能得到完全重合的实验结果. 造成这一结果的原因是多方面的. 首先, 颗粒系统固有的“噪声”会造成涨落. 颗粒对器壁的无规则碰撞会产生正压力, 其大小有一定随机性. 其次, 静电及颗粒表面污垢的积累亦会引起涨落. 静电荷的产生往往与环境温度和湿度相关, 适当增加湿度可以减弱静电, 但难以定量控制和完全消除, 因为静电荷的产生与振动时间的长短及颗粒表面污垢积累的多少有关. 尽管每次实验都对容器和颗粒进行清洗, 但振动半小时以上容器内壁及颗粒表面仍会出现污垢. 不管哪种原因引起的涨落, 涨落

的程度是有限的, 多次平均后结果是稳定一致的. 在我们的实验系统中, 静电会造成颗粒悬挂在器壁上, 见图 2, 表明颗粒与器壁之间存在静电“吸引”作用. 即使在不同季节 (温度、湿度不同), 这种吸附挂壁现象始终存在.

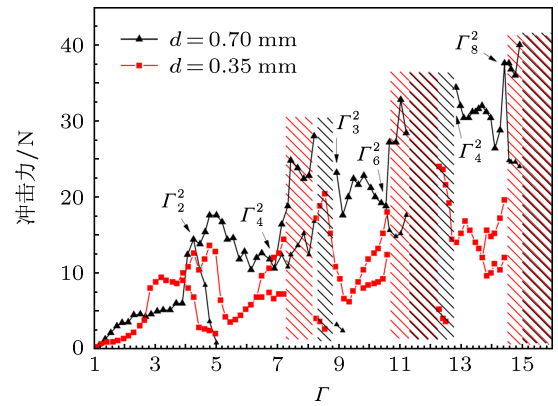


图 1 真空容器中  $d = 0.70\text{ mm}$  和  $d = 0.35\text{ mm}$  颗粒的冲击力分岔图 (阴影区表示冲击力信号是混沌的)

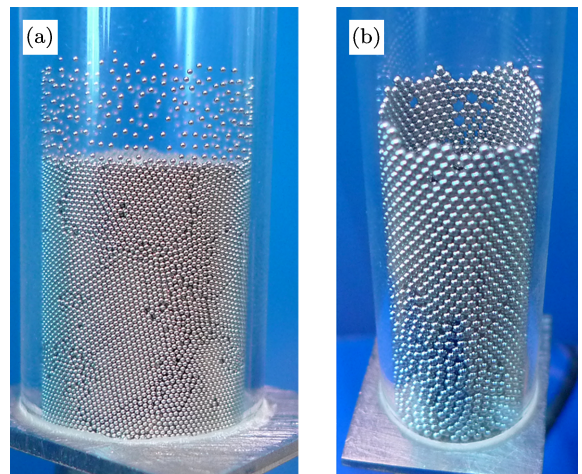


图 2 静电造成的颗粒挂壁现象 (a)  $d = 0.35\text{ mm}$  的不锈钢珠, 振动十几分钟后自然形成的颗粒挂壁; (b)  $d = 1.00\text{ mm}$  的不锈钢珠不会形成自然挂壁, 但振动停止后用木筷在颗粒床中间缓慢拔插几次, 会形成单层的贴壁“壳”结构. 温度  $20.0\text{ }^{\circ}\text{C}$ , 相对湿度  $48\%$

对每种尺寸的颗粒, 填装厚度均在 20—80 层之间变化. 结果表明, 分岔序列及分岔点的大小与厚度没有明显的依赖关系, 只是填装的越多冲击力变得越强. 改变颗粒层厚度实际上是改变了颗粒与器壁的接触面积 (用二维密堆积率  $0.82^{[31]}$  进行估算, 贴壁颗粒数约为 1000—12000 之间), 分岔过程与层厚无关间接说明器壁滑动摩擦力与接触面积无关. 这与 Divoux 等<sup>[26]</sup> 有关固体与静止颗粒间滑动摩擦力的研究结果一致. 实验中无法将厚度进

一步增大,因为厚度过大会出现分“节”现象,节点下部颗粒有明显的上下往复运动,而节点上部颗粒几乎不动.另外,实验中没有通过改变管径来改变接触面积,因为管径过大颗粒床底面会出现成拱现象<sup>[10,27,28]</sup>.不论哪种情况,颗粒上下运动的同步性都会变差,不利于倍周期分岔过程的观测.

表1中归纳了不同尺寸颗粒中倍周期分岔点的实验平均值及其标准偏差.振动频率为60 Hz.对每一尺寸的颗粒,在不同的温湿度环境(季节不同)

中进行了测量,分岔过程虽有涨落但与温度、湿度无确定关系.文献[29, 32]中提到空气湿度会对颗粒的对流及“巴西果”效应产生影响,但在我们的冲击力测量中并无体现.表中的数据是十至二十次测量的平均.温度和空气相对湿度的变化范围分别为17—28 °C和15%—68%.这五种尺寸的颗粒的分岔点基本一致,说明仅在器壁滑动摩擦力作用下分岔过程与颗粒尺寸无关.这里仍将分岔点按颗粒尺寸一一列出以反映各自的涨落情况.

表1 器壁摩擦力对倍周期分岔点的影响及其与颗粒尺寸的关系,  $f = 60$  Hz

	$d/\text{mm}$	分岔点								
		$\Gamma_2^2$	$\Gamma_4^2$	$\Gamma_{\text{混}}$	$\Gamma_5^2$	$\Gamma_6^2$	$\Gamma_{\text{混}}$	$\Gamma_4^2$	$\Gamma_8^2$	$\Gamma_{\text{混}}$
真空/镂空底容器	1.00	3.9±0.2	6.7±0.6	8.3±0.5	9.3±0.4	10.3±0.5	11.0±0.4	13.1±0.3	14.0±0.3	14.6±0.5
	0.70	3.9±0.2	6.7±0.4	7.9±0.4	8.8±0.3	10.2±0.3	11.0±0.2	12.5±0.2	13.6±0.5	14.3±0.5
	0.50	3.9±0.2	6.5±0.3	7.7±0.3	8.6±0.3	10.0±0.4	10.9±0.3	12.3±0.4	13.3±0.6	14.3±0.6
	0.40	4.0±0.3	6.6±0.5	7.6±0.3	8.5±0.2	10.1±0.3	10.9±0.2	12.1±0.4	13.6±0.5	14.8±0.3
	0.35	4.0±0.1	6.5±0.3	7.6±0.2	8.3±0.1	10.5±0.4	11.0±0.2	12.2±0.5	13.6±0.5	14.7±0.3
理论值	$\beta = 0$	3.72	6.59	7.18	7.44	9.64	10.15	10.67	12.73	13.18
	$\beta = 0.07$	3.89	6.79	7.40	7.67	9.87	10.41	10.93	13.00	13.48
	$\beta = 0.1$	3.98	6.88	7.49	7.75	9.98	10.51	11.04	13.13	13.61
	$\beta = 0.2$	4.23	7.17	7.79	8.06	10.31	10.86	11.40	13.52	14.02
	$\beta = 0.3$	4.49	7.45	8.09	8.34	10.64	11.21	11.75	13.90	14.41

最后,在这两种容器中我们检验了倍周期分岔与振动频率的关系.结果表明在35—90 Hz范围内分岔过程与振动频率无关.至此实验结果可以概括为:在仅有器壁滑动摩擦力作用的情况下,倍周期分岔过程与颗粒的尺寸、颗粒层的厚度及振动频率无关.与此相对照的是,存在空气阻力时(实底容器中)倍周期分岔过程与颗粒尺寸( $d < 0.50$  mm)有着强烈的依赖关系,随着 $d$ 的减小分岔点显著增加,导致高阶分岔逐渐消失;同时,分岔过程与振动频率有关,频率越小分岔点越大.这部分内容将另处讨论.

### 3.2 器壁摩擦力与蹦球模型

颗粒介质与固体表面之间的滑动摩擦力与二者之间的正压力成正比,与相对运动速度无关<sup>[26]</sup>.但对于受振颗粒体系,颗粒与器壁之间的正压力难以定量确定.为简便起见,我们将作用在颗粒上的

器壁滑动摩擦力等效地写成

$$F_{\text{器壁}} = -\beta_0 mg \text{sgn}[u(t)], \quad (1)$$

其中, $m$ 为所有颗粒的总质量, $\beta_0$ 为等效滑动摩擦系数(无量纲),取值范围为 $0 \leq \beta_0 < 1$ , $u(t) = v(t) - \dot{x}(t)$ 为颗粒体系质心相对台面(或器壁)的速度, $v(t)$ 为颗粒体系质心的速度(相对地面), $\dot{x}(t)$ 为台面速度, $\text{sgn}[u(t)]$ 为符号函数.

振动过程中,颗粒体系质心的运动用完全非弹性蹦球模型来描述.当颗粒离开容器底( $\ddot{x}(t) \leq -(1 + \beta_0)g$ )时并在空中自由飞行时,质心的运动方程表示为

$$\ddot{s}(t) = -g(1 - \beta_0 \text{sgn}[u(t)]), \quad (2)$$

其中, $s(t)$ 为颗粒质心相对地面的位移.当颗粒落回台面时,如果 $\dot{x}(t) \leq -(1 + \beta_0)g$ ,颗粒将立刻抛出,否则将随同振动平台一起运动,直到下个运动周期满足起跳条件时再次被抛出<sup>[21,33–35]</sup>.由于符号函数的存在,(2)式只能分段给出解析解,这里采用数



值求解方法计算倍周期分岔过程.

通过调整  $\beta_0$  的取值对实验中的倍周期分岔过程进行了计算, 为了便于比较, 表 1 列出了  $\beta_0 = 0, 0.07, 0.1, 0.2$  和  $0.3$  时分岔点的理论值. 可以看出,  $\beta_0 = 0$  时的理论值普遍小于实验值, 随着  $\beta_0$  的增大分岔点的理论值逐渐增大; 当  $\beta_0 = 0.07$  时低阶分岔点的理论值与实验值一致, 高阶分岔点偏小; 当  $\beta_0 = 0.3$  时, 高阶分岔点与实验值符合较好, 但低阶分岔点偏大. 我们认为  $\beta_0$  取  $0.07$  较为合适. 首先, 在受振颗粒床中颗粒对器壁的正压力不可能很大. 飞行过程中, 颗粒处于悬空状态, 能够产生正压力的因素主要是颗粒无规碰撞和静电“吸引”. 虽然颗粒与器壁间的静电荷会造成一定的吸附作用, 但我们认为前者是主要的, 且这些因素引起的效应不会太强. 另外, 在我们的容器中空气的影响并未完全消除, 真空容器中仍残留了  $20\%$  左右的空气, 而镂空底的空气透过率亦不是  $100\%$ . 当  $\Gamma$  较小时, 颗粒速度较小, 空气阻力的作用体现不出来, 而当  $\Gamma$  较大时, 颗粒的运动速度较大, 残留的空气阻力会起作用, 使高阶分岔点的数值有所增加. 文献 [21] 中, 将空气阻力和器壁摩擦力合并在一起, 并将总的阻力取为颗粒总重量的  $20\%—30\%$ . 这一数值包含了空气阻力的作用, 因为用于拟合的实验数据是在实底敞口的容器中获得. 如果将之用于拟合表 1 中的实验数据, 等效阻力系数取为  $0.07$  时所得的结果也是可以接受的, 但所用模型中器壁摩擦力的取向是以地面为参照的 (即以  $v(t)$  的方向定正负). 这种处理意味着只有当颗粒飞行到最高点 ( $v(t) = 0$ ) 时器壁摩擦力才换向, 也就是, 飞行过程中器壁摩擦力只换向一次. 这在物理图像上是不合理的. 实际情况是, 飞行过程中颗粒与器壁的相对运动速度的方向要变化多次, 器壁滑动摩擦力的方向也将随之改变, 因此, 以  $u(t)$  的方向来定器壁摩擦力的正负更可取.

图 3 给出了分岔点与  $\beta_0$  的关系 (黑线), 分岔点基本上是随  $\beta_0$  线性增加的, 仅有极微小的上凸. 作为比较, 图中亦给出了根据文献 [21] 中所用模型得到的结果 (红线). 在阻力不是很大 ( $\beta_0 < 0.4$ ) 的情况下, 二者给出的结果基本一致. 但  $\beta_0$  进一步增大时, 分岔点却随  $\beta_0$  迅速减小并同时趋于 4, 这显然是不合理的.

为进一步检验器壁摩擦力的影响, 我们在内壁分别贴上 1600 目、800 目和 320 目的金相砂纸, 以此改变器壁的粗糙度. 这样做却引起了非常剧烈的

颗粒对流运动, 致使只能观察到 2 倍周期和 4 倍周期分岔, 之后就是混沌, 无其他高阶分岔. 另外, 2 倍周期和 4 倍周期分岔点略小于表 1 中的数值. 出现这一结果的原因是所用砂纸的粗糙度过大, 器壁摩擦力的增大加剧了颗粒的对流运动, 使颗粒变得过于蓬松, 聚集态遭到破坏, 颗粒运动的整体性变差. 颗粒变得蓬松的证据为冲击力的脉冲宽度加大. 以  $0.70\text{ mm}$  的不锈钢珠为例, 不贴砂纸时, 脉冲宽度为  $2—4\text{ ms}$ , 贴砂纸后为  $5—9\text{ ms}$ . 可见, 贴砂纸难以对器壁摩擦力进行细致的调控, 应寻找其他更有效的方法对图 3 中的理论结果进行检验. 改用表面凹凸不平且球形度较差的颗粒进行了实验, 如, 尺寸为  $0.28—0.45\text{ mm}$  的镍颗粒, 仍得到与贴砂纸后相同的结果. 这表明因颗粒不光滑引起的堆积率减小, 亦会降低颗粒运动的整体性, 同时亦说明颗粒的对流运动与堆积率有着密切的关系. 使用表面光滑且尺寸均一的不锈钢珠, 虽然会出现缓慢对流或有序排列, 但颗粒的堆积率较大, 因而上下运动的同步性较高, 可以观察到完整的倍周期分岔序列.

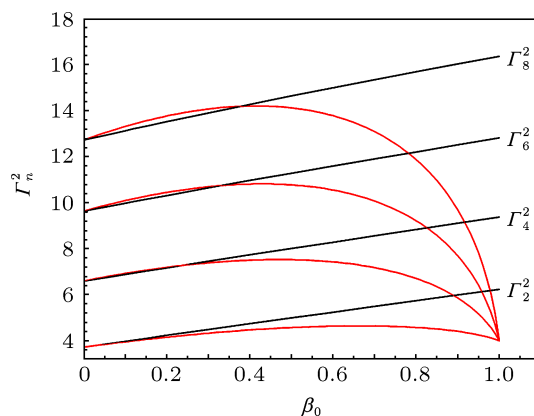


图 3 几个主要分岔点随  $\beta_0$  的变化 (黑线: 本文所用模型. 红线: 文献 [21] 所用模型)

蹦球模型给出的倍周期分岔过程亦与振动频率无关. 表面上看, 这似乎是矛盾的, 因为摩擦力与颗粒相对器壁的速度反向, 振动频率越大似乎换向的频率越高, 进而会影响分岔过程. 实际情况是, 器壁摩擦力虽然换向, 但  $\beta_0 < 1$ , 这相当于颗粒 (或蹦球) 是在大小为  $(1 \pm \beta_0)g$  的等效重力场中做运动. 这个等效重力场的加速度的大小是变化的但方向是恒定的. 另外, 我们对计算及结果的表征进行了无量纲化处理. 图 4 给出了  $\beta_0 = 0.3$ ,  $\Gamma = 9.5$ , 振动频率为  $60\text{ Hz}$  时蹦球的运动轨迹, 在飞行期间, 相对速度  $u(t)$  换向了 5 次. 如果改变振动频率 (如  $0.01\text{ Hz}$ ), 仍给出与图 4 相同的结果. 计算亦表明分

岔过程与  $g$  的大小无关. 分岔过程与振动频率及  $g$  无关, 表明这种分岔具有内在的统一性, 不会因实验条件或实验地点而改变.

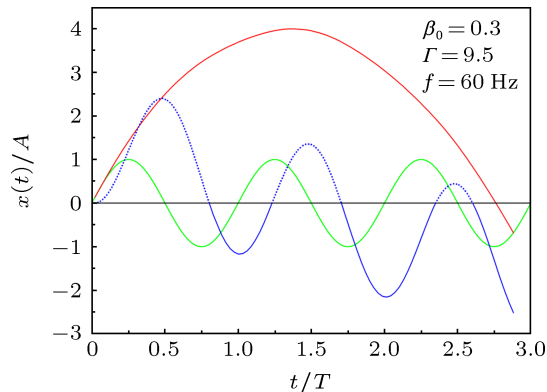


图4  $\beta_0 = 0.3, \Gamma = 9.5$ , 振动频率为 60 Hz 时蹦球的运动轨迹 (红线: 蹦球; 绿线: 台面; 蓝线: 相对速度  $u(t)$ ,  $u(t) > 0$  (虚线部分) 时器壁摩擦力向下,  $u(t) < 0$  (实线部分) 时, 器壁摩擦力向上)

图 5 将冲击力的倍周期分岔过程与  $\beta_0 = 0.07$  时的理论结果进行了比较, 其中, 颗粒直径为 0.35 mm, 容器为镂空底的, 理论值为无量纲化的着陆速度  $-u_{\text{着陆}}/(gT)$ ,  $T$  为台面的振动周期. 可以看出, 在  $\Gamma < 2$  时, 理论与实验符合较好. 此外, 理论上的分岔序列与实验结果一致, 但分岔点的数值存在差异, 产生这种差异的原因是  $\beta_0 = 0.07$  是根据分岔点的多次测量平均值拟合出来的, 而图中的实验结果却是单次测量值. 对于单次测量, 各种因素会造成测量结果的涨落, 即使是同一体系, 两次测量亦难以完全一致, 例如, 图中  $\Gamma = 3$  处的“驼峰”实验中并不总是可以观察到. 为了方便比较图中亦标出了  $\beta_0 = 0$  的理论值 (黑线),  $\Gamma$  较大时, 它与  $\beta_0 = 0.07$  的结果的差别变得更明显. 我们的计算表

明, 器壁摩擦力不会引入混沌. 图中数据点较密集的区域 (对应于实验中的混沌区) 仍是倍周期分岔的, 只是分岔点对  $\Gamma$  较敏感, 因而相对集中而已.

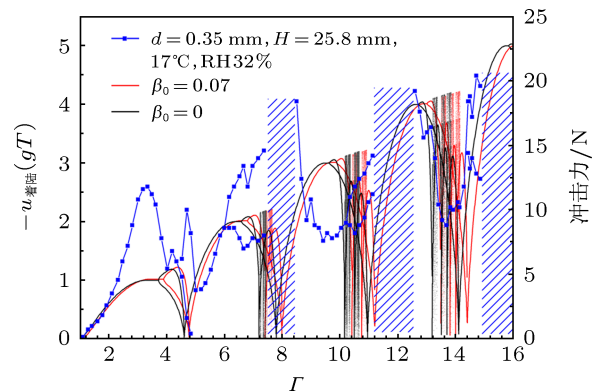


图5 冲击力的倍周期分岔过程与理论值的比较

## 4 结论

通过抽真空或将容器底镂空可以消除竖直振动颗粒体系中空气阻力的影响. 在只有器壁滑动摩擦力的情况下, 颗粒冲击力的倍周期分岔序列及分岔点的数值与颗粒尺寸、颗粒层数及振动频率无关. 将器壁滑动摩擦力纳入完全非弹性蹦球模型, 能够对实验中所观察到的倍周期分岔现象给予很好的解释. 器壁摩擦力会给体系带来耗散, 摩擦力越大, 倍周期分岔点越大, 但不会根本改变倍周期分岔的动力学特性. 对实验结果的拟合表明, 器壁摩擦力大小为颗粒总重量的 10% 左右. 所做分析有助于更好地理解受振颗粒体系中器壁摩擦力在倍周期分岔过程中所起的作用, 及其所引起的能量耗散对颗粒体系动力学行为的影响.

[1] Duran J 2000 *Sands powders and grains: An introduction to the physics of granular materials* (New York: Springer-Verlag)  
 [2] de Gennes P G 1999 *Rev. Mod. Phys.* **71** 374  
 [3] Spertl M 2006 *Granul. Matter.* **8** 59  
 [4] Peng Z, Li X Q, Jiang L, Fu L P, Jiang Y M 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 2090 (in Chinese) [彭政, 李湘群, 蒋礼, 符力平, 蒋亦民 2009 物理学报 **58** 2090]  
 [5] Radjai F, Jean M, Moreau J J, Roux S 1996 *Phys. Rev. Lett.* **77** 274  
 [6] Knight J B, Jaeger H M, Nagel S R 1993 *Phys. Rev. Lett.* **70** 3728  
 [7] Knight J B, Ehrichs E E, Kuperman V Y, Flint J K, Jaeger H M, Nagel S R 1996 *Phys. Rev. E* **54** 5726  
 [8] Melo F, Umbanhowar P B, Swinney H L 1995 *Phys. Rev. Lett.* **75** 3838  
 [9] Bizon C, Shattuck M D, Swift J B, McCormick W D, Swinney H L 1998 *Phys. Rev. Lett.* **80** 57

[10] Douady S, Fauve S, Laroche C 1989 *Europhys. Lett.* **8** 621  
 [11] Jiang Z H, Liu X Y, Peng Y J, Li J W 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 5692 (in Chinese) [姜泽辉, 刘新影, 彭雅晶, 李建伟 2005 物理学报 **54** 5692]  
 [12] Pastor J M, Maza D, Zuriguel I, Garcimartin A, Boudet J F, 2007 *Physica D* **232** 128  
 [13] Jiang Z H, Wang Y Y, Wu J 2006 *Europhys. Lett.* **74** 417  
 [14] Jiang Z H, Wang Y Y, Wu J 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 4748 (in Chinese) [姜泽辉, 王运鹰, 吴晶 2006 物理学报 **55** 4748]  
 [15] Pak H K, Van Doorn E, Behringer R P 1995 *Phys. Rev. Lett.* **74** 4643  
 [16] Liu C, Wang L, Wu P, Jia M 2010 *Phys. Rev. Lett.* **104** 188001  
 [17] Aoki K M, Akiyama T, Yamamoto K, Yoshikawa T 1997 *Europhys. Lett.* **40** 159  
 [18] Elperin T, Golshtein E 1997 *Physica A* **247** 67  
 [19] Gallas J A C, Herrmann H J, Sokołowski S 1992 *Phys. Rev. Lett.* **69**

- 1371
- [20] Akiyama T, Kimura N, Iguchi T 1996 *Powder. Technol.* **89** 133
- [21] Jiang Z H, Guo B, Zhang F, Wang F L 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 8444 (in Chinese) [姜泽辉, 郭波, 张峰, 王福力 2010 物理学报 **59** 8444]
- [22] Horváth V K, János I M, Vella P J 1996 *Phys. Rev. E* **54** 2005
- [23] Hu L, Yang P, Xu T, Jiang Y, Xu H L, Long W, Yang C S, Zhang S, Lu K Q 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 879 (in Chinese) [胡林, 杨平, 徐亭, 江阳, 须海江, 龙为, 杨昌顺, 张弢, 陆坤权 2003 物理学报 **52** 879]
- [24] Peng Z, Wang L Z, Jiang Y M 2011 *J. Shandong Univ. Nat. Sci.* **46** 42 [彭政, 王璐珠, 蒋亦民 2011 山东大学学报 (理学版) **46** 42]
- [25] Géminard J C, Losert W, Gollub J P 1999 *Phys. Rev. E* **59** 5881
- [26] Divoux T, Geminard J C 2007 *Phys. Rev. Lett.* **99** 258301
- [27] Wassgren C R, Brennen C E, Hunt M L 1996 *J. Appl. Mech.* **63** 712
- [28] Hsiao S S, Pan S J 1998 *Powder. Technol.* **96** 219
- [29] Jiang Z H, Jing Y F, Zhao H F, Zheng R H 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 5923 (in Chinese) [姜泽辉, 荆亚芳, 赵海发, 郑瑞华 2009 物理学报 **58** 5923]
- [30] Jiang Z H, Zhang F, Guo B, Zhao H F, Zheng R H 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 5581 (in Chinese) [姜泽辉, 张峰, 郭波, 赵海发, 郑瑞华 2010 物理学报 **59** 5581]
- [31] Cheng Y F, Guo S J, Lai H Y 2000 *Powder. Technol.* **107** 123
- [32] Rhodes M, Takeuchi S, Liffman K, Muniandy K 2003 *Granul. Matter.* **5** 107
- [33] Luck J M, Metha A 1993 *Phys. Rev. E* **48** 3988
- [34] Gilet T, Vandewalle N, Dorbolo S 2009 *Phys. Rev. E* **79** 055201
- [35] Jiang Z H, Zheng R H, Zhao H F, Wu J 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 3727 (in Chinese) [姜泽辉, 郑瑞华, 赵海发, 吴晶 2007 物理学报 **56** 3727]

# Effect of wall friction on subharmonic bifurcations of impact in vertically vibrated granular beds\*

Han Hong Jiang Ze-Hui<sup>†</sup> Li Xiao-Ran Lü Jing Zhang Rui Ren Jie-Ji

(Department of Physics, Harbin Institute of Technology, Harbin 150001, China)

(Received 6 December 2012; revised manuscript received 15 February 2013)

## Abstract

Granular materials consist of a large number of discrete solid particles. When subjected to external vibrations, they exhibit various intricate dynamical behaviors, which usually depend in a complicated way on many physical factors, such as air dragging, friction from the container wall and so forth. In this work, vertical vibrations are applied to a bed of stainless-steel spheres contained in a glass tube, and the subharmonic bifurcations of impact of particles on the container bottom are investigated. To eliminate the effects of air dragging, we evacuate the container or perforate the container bottom to make it quite permeable to the air. Experiments performed in such containers reveal that the impact bifurcations are controlled solely by the normalized vibration acceleration, but independent of the particle size, the filling height of particles, and the frequency of forced vibration. The sliding friction from the container wall is treated as a constant one with the direction opposite to the velocity relative to the container wall. By involving this damping term into the completely inelastic bouncing ball model, an explanation for the experimental results is made. Simulations on the averaged experimental bifurcation points indicate that the magnitude of wall friction is about 10% of the total weight of the particles.

**Keywords:** granular materials, wall friction, subharmonic bifurcations, impact

**PACS:** 45.70.-n, 45.50.-j, 05.45.-a

**DOI:** 10.7498/aps.62.114501

---

\* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 10974038).

<sup>†</sup> Corresponding author. E-mail: physjzh@hit.edu.cn