奇异 Chetaev 型非完整系统 Nielsen 方程的 Lie-Mei 对称性与守恒量*

徐超 李元成†

(中国石油大学 (华东) 理学院, 青岛 266580)

(2013年1月15日收到; 2013年3月4日收到修改稿)

研究奇异 Chetaev 型非完整系统 Nielsen 方程的 Lie-Mei 对称性, 建立系统 Nielsen 方程的 Lie-Mei 对称性方程, 给出系统 Nielsen 方程强 Lie-Mei 对称性和弱 Lie-Mei 对称性的定义, 得到对称性导致的 Hojman 守恒量和 Mei 守恒量, 最后给出说明性算例.

关键词: 奇异非完整系统, Nielsen 方程, Lie-Mei 对称性, 守恒量

PACS: 02.20.Sv, 11.30.−j, 45.20.Jj **DOI:** 10.7498/aps.62.120201

1 引 言

近些年, 分析力学被广泛地应用到工程和技术研究领域, 在理论和实际应用中的价值不可小觑. 1918 年, Noether[1] 揭示了力学系统中对称性和守恒量之间潜在的关系, 受到学者的广泛关注. 近代寻找守恒量的方法主要有以下三种: Noether 对称性 [2], Lie 对称性 [3] 和 Mei 对称性 [4−6]. 时至今日, 对称性理论仍被应用于分析力学中不同的运动微分方程, 如 Lagrange 方程, Appell 方程, Nielsen 方程等. 其中, Nielsen 方程是分析力学中一类非常重要的方程, 在分析力学理论中占据重要地位, 发展成为分析力学理论中三大力学体系 (Lagrange 体系, Nielsen 体系和 Appell 体系) 之一 [7].

通过对称性理论的研究, 学者们直接或间接得到三种对称性导致的守恒量, 尤其是在规则 (非奇异) 系统的领域取得了许多研究成果 [8−19]. 事实上, 奇异系统更为常见, 特别是场论中许多重要的物理系统都是奇异系统, 如电磁场、相对论性运动的粒子、杨 -Mills 场等. 因此, 对奇异系统的研究具有一定的理论意义和实际价值. 学者们在此领域取得了一些重要成果, Li[20] 给出了位形空间与相空间中奇异系统的 Noether 定理, 并在文献 [21, 22] 中研究了非完整奇异系统正则形式的 Noether 定理和逆定理; 钟寿国 [23]、路可见 [24] 研究了一阶及高阶奇性解的奇异积分方程; 罗绍凯 [25] 研究了奇异 Hamiltom 正则方程的 Mei 对称性、Noether 对称性和 Lie 对称性的关系; Mei 等 [26] 研究了奇异 Lagrange 系统的 Lie 对称性; 李元成等 [27] 对一类非完整奇异系统的 Lie 对称性与守恒量进行了研究. 奇异系统理论应用于分析力学的专题研究有待于进一步深入.

本文主要研究奇异 Chetaev 型非完整系统 Nielsen 方程的 Lie-Mei 对称性, 建立系统 Nielsen 方程的 Lie-Mei 对称性方程, 给出系统 Nielsen 方程强 Lie-Mei 对称性和弱 Lie-Mei 对称性的定义, 得到对称性导致的 Hojman 守恒量和 Mei 守恒量, 并举例说明结果的应用.

2 系统的运动微分方程

假设力学系统的位形由 n 个广义坐标 q_s $(s = 1,2,\cdots,n)$ 来确定, 系统的运动受 g 个双面

* 中国石油大学 (华东) 自主创新基金 (批准号: 11CX06088A) 资助的课题.

† 通讯作者. E-mail: liyuanch@upc.edu.cn

理想 Chetaev 型非完整约束:

$$f_\beta(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})=0 \quad (\beta=1,2,\cdots,g). \tag{1}$$

约束方程 (1) 加在虚位移 δq_s 上的 Chetaev 条件为

$$\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s}\delta q_s=0 \quad (\beta=1,2,\cdots,g). \tag{2}$$

系统的运动微分方程可表示为 Nielsen 方程:

$$\frac{\partial}{\partial \dot{q}_s}\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t}-2\frac{\partial L}{\partial q_s}=Q_s+\lambda_\beta\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s} \quad (s=1,2,\cdots,n). \tag{3}$$

引入 Nielsen 算子, $N_s=\dfrac{\partial}{\partial \dot{q}_s}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}-2\dfrac{\partial}{\partial q_s}$. 其中, λ_β 为约束乘子, 是 t, $\boldsymbol{q}$, $\dot{\boldsymbol{q}}$ 的函数, 假设可以在微分方程 (3) 积分前求出约束乘子. (3) 式表示为

$$N_s(L)=Q_s+\Lambda_s, \tag{4}$$

式中 $L=L(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$ 为系统的 Lagrange 函数, $Q_s=Q_s(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$ 为非势广义力, $\Lambda_s=\lambda_\beta\dfrac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s}$ 为约束反力. 展开 (3) 式, 得

$$\begin{aligned} h_{sk}\ddot{q}_k={}&2\frac{\partial L}{\partial q_s}-\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_s\partial q_k}\dot{q}_k\\ &-\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_s\partial t}+Q_s+\lambda_\beta\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s}. \end{aligned} \tag{5}$$

如果 $\det(h_{sk})=\det\big((\partial^2 L)/(\partial \dot{q}_s\partial \dot{q}_k)\big)=0$, 则系统为奇异系统, 因此不能由 (4) 式求得所有的广义加速度, 但可以假设解出一部分广义加速度

$$\ddot{q}_i=\alpha_i(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}) \quad (i=1,2,\cdots,r;0\leqslant r\leqslant n), \tag{6}$$

以及 $(n-r)$ 个关系

$$\varphi_j(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})=0 \quad (j=1,2,\cdots,n-r). \tag{7}$$

3 系统的 Lie-Mei 对称性导致的 Hojman 守恒量和 Mei 守恒量

引入无限小群变换

$$\begin{aligned} &t^*=t+\varepsilon\xi_0(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}),\\ &q_s^*(t^*)=q_s(t)+\varepsilon\xi_s(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}), \end{aligned} \tag{8}$$

其中 ε 为无限小参数, ξ_0,ξ_s 为无限小变换的生成元.

Lie 对称性是系统的微分方程在群无限小变化下的一种不变性, 方程 (6) 在无限小变换 (8) 式下的不变性表示为以下确定方程 [28]:

$$\ddot{\xi}_i-2\alpha_i\dot{\xi}_0-\dot{q}_i\ddot{\xi}_0=X^{(1)}(\alpha_i)$$
$$(i=1,2,\cdots,r;0\leqslant r\leqslant n). \tag{9}$$

方程 (7) 在无限小变换 (8) 式下的不变性表示为如下限制方程:

$$X^{(1)}[\varphi_j(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})]=0 \quad (j=1,2,\cdots,n-r), \tag{10}$$

其中

$$X^{(1)}=\xi_0\frac{\partial}{\partial t}+\xi_s\frac{\partial}{\partial q_s}+(\dot{\xi}_s-\dot{q}_s\dot{\xi}_0)\frac{\partial}{\partial \dot{q}_s}.$$

Mei 对称性是系统的动力学函数在经历无限小变换后仍满足原运动微分方程的一种不变性, 由定义可得到系统 Mei 对称性的确定方程为

$$N_s[X^{(1)}(L)]=X^{(1)}(Q_s+\Lambda_s) \quad (s=1,2,\cdots,n). \tag{11}$$

非完整约束 (1) 式在无限小变换 (8) 式下的不变性归结为限制方程

$$X^{(1)}(f_\beta)=0. \tag{12}$$

推导方程 (3) 的过程中用到了 Chetaev 条件 (2) 式, 这个条件对 δq_s 施加了限制, 即附加限制方程为

$$\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s}(\xi_s-\dot{q}_s\xi_0)=0 \quad (\beta=1,2,\cdots,g). \tag{13}$$

定义 1 如果无限小生成元 ξ_0, ξ_s 满足如下方程:

$$\begin{aligned} &\Big\{\ddot{\xi}_i-2\alpha_i\dot{\xi}_0-\dot{q}_i\ddot{\xi}_0-X^{(1)}(\alpha_i)\Big\}^2\\ &+\Big\{X^{(1)}[\varphi_j(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})]\Big\}^2\\ &+\Big\{N_s[X^{(1)}(L)]-X^{(1)}(Q_s+\Lambda_s)\Big\}^2=0\\ &(i=1,2,\cdots,r;\quad 0\leqslant r\leqslant n;\\ &\quad j=1,2,\cdots,n-r;\quad s=1,2,\cdots,n), \end{aligned} \tag{14}$$

则这种对称性称为与奇异 Chetaev 型非完整系统相应完整系统 Nielsen 方程的 Lie-Mei 对称性.

定义 2 如果无限小生成元 ξ_0, ξ_s 满足方程 (14) 和限制方程 (12), 则相应对称性称为奇异 Chetaev 型非完整系统 Nielsen 方程的弱 Lie-Mei 对称性.

定义 3 如果无限小生成元 ξ_0, ξ_s 满足方程 (14)、限制方程 (12) 和附加限制方程 (13), 则相应对称性称为奇异 Chetaev 型非完整系统 Nielsen 方程的强 Lie-Mei 称性.

为将 Hojman 定理应用于奇异系统, 假设方程 (7) 对 t 求导数并与方程 (6) 联合可解出所有广义加

速度 [29], 记作

$$\ddot{q}_s=\alpha_s(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})\quad(s=1,2,\cdots,n). \tag{15}$$

命题 1 对于奇异 Chetaev 型非完整系统的 Nielsen 方程 Lie-Mei 对称性、弱 Lie-Mei 对称性、强 Lie-Mei 对称性, 如果存在函数 $\mu=\mu(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$ 使得

$$\frac{\partial\alpha_s}{\partial\dot{q}_s}+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ln\mu=0, \tag{16}$$

则系统 Lie-Mei 对称性、弱 Lie-Mei 对称性、强 Lie-Mei 对称性导致的 Hojman 守恒量为

$$\begin{aligned}I_{\mathrm{H}}=&\frac{1}{\mu}\frac{\partial}{\partial t}(\mu\xi_0)+\frac{1}{\mu}\frac{\partial}{\partial q_s}(\mu\xi_s)\\&+\frac{1}{\mu}\frac{\partial}{\partial\dot{q}_s}[\mu(\dot{\xi}_s-\dot{q}_s\dot{\xi}_0)]-\dot{\xi}_0=\mathrm{const}.\end{aligned} \tag{17}$$

证明 系统的 Lie-Mei 对称性必是 Lie 对称性, 并且所有的广义加速度已求出, 因此由系统的 Lie 对称性确定方程 (9), 有

$$\ddot{\xi}_s-2\alpha_s\dot{\xi}_0-\dot{q}_s\ddot{\xi}_0=X^{(1)}(\alpha_s). \tag{18}$$

利用广义 Hojman 定理的证明方法 [30], 由 (16) 式和 (18) 式可以证明命题 1.

命题 2 如果奇异 Chetaev 型非完整系统 Nielsen 方程的 Lie-Mei 对称性、弱 Lie-Mei 对称性、强 Lie-Mei 对称性的生成元以及规范函数 $G_{\mathrm{M}}=G_{\mathrm{M}}(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$ 满足如下结构方程

$$\begin{aligned}&X^{(1)}(L)\dot{\xi}_0+X^{(1)}\left[X^{(1)}(L)\right]\\&+X^{(1)}(Q_s+\Lambda_s)(\xi_s-\dot{q}_s\xi_0)+\dot{G}_{\mathrm{M}}=0,\end{aligned} \tag{19}$$

则系统的 Lie-Mei 对称性、弱 Lie-Mei 对称性、强 Lie-Mei 对称性导致的 Mei 守恒量为

$$I_{\mathrm{M}}=X^{(1)}(L)\xi_0+\frac{\partial X^{(1)}(L)}{\partial\dot{q}_s}(\xi_s-\dot{q}_s\xi_0)+G_{\mathrm{M}}=\mathrm{const}. \tag{20}$$

证明 系统的 Lie-Mei 对称性必定是 Mei 对称性, 将 (20) 式对时间 t 求导, 利用 (11) 和 (19) 式, 且注意到算子: $N_s=E_s$, 可以证明 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}I_{\mathrm{M}}=0$. 其中, E_s 为 Euler 算子, $E_s=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial\dot{q}_s}-\frac{\partial}{\partial q_s}$.

4 算 例

奇异系统的 Lagrange 函数为

$$L=\frac{1}{2}(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2)+\dot{q}_1q_3+q_1+q_2. \tag{21}$$

非势广义力为

$$Q_1=\frac{\dot{q}_3}{2},\quad Q_2=\frac{\dot{q}_3}{2}-1,\quad Q_3=\dot{q}_3. \tag{22}$$

系统所受的非完整约束为

$$f=\dot{q}_1-\dot{q}_2+q_3+t=0. \tag{23}$$

试研究系统的 Lie-Mei 对称性导致的 Hojman 守恒量和 Mei 守恒量.

由 (3) 式得

$$\ddot{q}_1+\dot{q}_3-1=\lambda+\frac{\dot{q}_3}{2}, \tag{24}$$

$$\ddot{q}_2-1=-\lambda+\frac{\dot{q}_3}{2}-1, \tag{25}$$

$$-\dot{q}_1=\dot{q}_3. \tag{26}$$

由 (23)—(26) 式得

$$\lambda=-1,\quad \Lambda_1=-1,\quad \Lambda_2=1. \tag{27}$$

$$\ddot{q}_1=\frac{\dot{q}_1}{2}=-\frac{\dot{q}_3}{2},\quad \ddot{q}_2=\frac{\dot{q}_3}{2}+1. \tag{28}$$

将方程 (26) 对 t 求导数, 得

$$\ddot{q}_3=-\ddot{q}_1=\frac{\dot{q}_3}{2}. \tag{29}$$

计算后有

$$\begin{aligned}X^{(1)}(L)=&\dot{q}_1\left(\dot{\xi}_1-\dot{q}_1\dot{\xi}_0\right)+\dot{q}_2\left(\dot{\xi}_2-\dot{q}_2\dot{\xi}_0\right)\\&+q_3\left(\dot{\xi}_1-\dot{q}_1\dot{\xi}_0\right)+\xi_3\dot{q}_1+\xi_1+\xi_2,\end{aligned} \tag{30}$$

$$X^{(1)}(f)=(\dot{\xi}_1-\dot{q}_1\dot{\xi}_0)-(\dot{\xi}_2-\dot{q}_2\dot{\xi}_0)+\xi_3+\xi_0. \tag{31}$$

由 (13) 式, 得系统的附加限制方程

$$(\xi_1-\dot{q}_1\xi_0)-(\xi_2-\dot{q}_2\xi_0)=0. \tag{32}$$

取以下无限小生成元

$$\xi_0=0,\quad \xi_1=\xi_2=(\dot{q}_1+\dot{q}_2-t)^2,\quad \xi_3=0, \tag{33}$$

则有

$$\begin{aligned}&\dot{\xi}_1=\dot{\xi}_2=0,\\&X^{(1)}(L)=2(\dot{q}_1+\dot{q}_2-t)^2,\\&X^{(1)}(f)=0.\end{aligned} \tag{34}$$

可知生成元 (33) 式满足方程 (14), 因此系统具有 Lie-Mei 对称性. 生成元 (33) 还满足方程 (31), (32), 因此系统的 Lie-Mei 对称性是相应完整系统的对称性, 又是奇异 Chetaev 型非完整系统的弱 Lie-Mei 对称性和强 Lie-Mei 对称性. 下面, 研究它们导致的守恒量.

(16) 式给出

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ln\mu = -1. \tag{35}$$

取

$$\mu = (q_1 + q_3)\exp(-t). \tag{36}$$

将 (33) 和 (35) 式代入 (17) 式, 得

$$I_{\mathrm{H}} = (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 - t)^2 (q_1 + q_3)^{-1} = \text{const.} \tag{37}$$

将 (33) 式代入 (19) 式, 得

$$G_{\mathrm{M}} = 0. \tag{38}$$

将 (33) 和 (38) 式代入 (20) 式, 得

$$I_{\mathrm{M}} = 8(\dot{q}_1 + \dot{q}_2 - t)^3 = \text{const.} \tag{39}$$

5 结 论

研究力学系统对称性的目的是寻找更多的守恒量. 本文研究奇异 Chetaev 型非完整系统 Nielsen 方程的 Lie-Mei 对称性, 建立了 Lie-Mei 对称性方程, 给出了弱 Lie-Mei 对称性、强 Lie-Mei 对称性的定义, 得到了 Lie-Mei 对称性导致的 Hojman 守恒量和 Mei 守恒量. 奇异系统的微分方程可以解出一部分广义加速度, 余下的部分表示为关系式. 为了将 Hojman 定理应用于奇异系统, 文中假设关系式对 t 求导数并与已求得的广义加速度联合可解出所有广义加速度; 此外, 奇异系统的 Mei 对称性判据方程与非奇异系统有同样的形式, 但是在方程 (11) 中有些项不会出现. 本文的结果有可能推广到其他类型的约束系统.

[1] Noether A E 1918 *Math. Phys.* **KI II** 235

[2] Djukić D S, Vujanović B D 1975 *Acta Mech.* **23** 17

[3] Lutzky M 1979 *J. Phys.* A: *Math. Gen.* **12** 973

[4] Mei F X 2000 *J. Beijing Inst. Technol.* **9** 120

[5] Mei F X 2001 *Chin. Phys.* **10** 177

[6] Mei F X, Chen X W 2001 *J. Beijing Inst. Technol.* **10** 138

[7] Mei F X 1985 *Foundations of Mechanics of Nonholonomic Systems* (Beijing: Beijing Institute of Technology Press) (in Chinese) [梅凤翔 1985 非完整力学基础 (北京: 北京工业学院出版社)]

[8] Ge W K, Zhang Y 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 4985 (in Chinese) [葛伟宽, 张毅 2005 物理学报 **54** 4985]

[9] Zhang Y 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 461 (in Chinese) [张毅 2002 物理学报 **51** 461]

[10] Chen X W, Mei F X 2000 *Chin. Phys.* **9** 721

[11] Fu J L, Chen L Q 2003 *Chin. Phys.* **12** 695

[12] Zhang H B 2002 *Chin. Phys.* **11** 1

[13] Xu X J, Mei F X, Qin M C 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 4021 (in Chinese) [许学军, 梅凤翔, 秦茂昌 2004 物理学报 **53** 4021]

[14] Wu H B 2005 *Chin. Phys.* **14** 452

[15] Li Y C, Xia L L, Wang X M 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 3639 (in Chinese) [李元成, 夏丽莉, 王小明 2010 物理学报 **59** 3639]

[16] Jia L Q, Luo S K, Zhang Y Y 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 2006 (in Chinese) [贾利群, 罗绍凯, 张耀宇 2008 物理学报 **57** 2006]

[17] Cui J C, Jia L Q, Zhang Y Y 2009 *Commun. Theor. Phys.* **52** 7

[18] Li Y C, Wang X M, Xia L L 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 2935 (in Chinese) [李元成, 王小明, 夏丽莉 2010 物理学报 **59** 2935]

[19] Xie Y L, Jia L Q, Yang X F 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 030201 (in Chinese) [解银丽, 贾利群, 杨新芳 2011 物理学报 **60** 030201]

[20] Li Z P 1991 *J. Phys.* A: *Math. Gen.* **24** 4261

[21] Li Z P 1992 *Chin. Sci. Bull.* **37** 2204 (in Chinese) [李子平 1992 科学通报 **37** 2204]

[22] Li Z P 1992 *Sci. Sin*: *Math.* **9A** 977 (in Chinese) [李子平 1992 中国科学: 数学 **9A** 977]

[23] Zhong S G 1998 *Chin. Ann. Math.* **19A** 361 (in Chinese) [钟寿国 1998 数学年刊 **19A** 361]

[24] Lu K J, Zhang G S 1997 *J. Wuhan Univ.* (Natural Science Edition) **43** 273 (in Chinese) [路可见, 张桂生 1997 武汉大学学报 (自然科学版) **43** 273]

[25] Luo S K 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 5 (in Chinese) [罗绍凯 2004 物理学报 **53** 5]

[26] Mei F X, Zhu H P 2000 *J. Beijing Inst. Technol.* **9** 11

[27] Li Y C, Zhang Y, Liang J H 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 2186 (in Chinese) [李元成, 张毅, 梁景辉 2002 物理学报 **51** 2186]

[28] Luo S K, Zhang Y F 2008 *Advances in the Study of Dynamics of Constrained Systems* (Beijing: Science Press) (in Chinese) [罗绍凯, 张永发 2008 约束系统动力学研究进展 (北京: 科学出版社)]

[29] Mei F X 2004 *Symmetries and Conserved Quantities of Constrained Mechanics Systems* (Beijing: Beijing Institute of Technology Press) (in Chinese) [梅凤翔 2004 约束力学系统的对称性与守恒量 (北京: 北京理工大学出版社)]

[30] Ding N, Fang J H 2006 *Commun.Theor. Phys.* **46** 265

Lie-Mei symmetry and conserved quantities of Nielsen equations for a singular nonholonomic system of Chetaev'type*

Xu Chao　Li Yuan-Cheng†

(*College of Physics, China University of Petroleum (East China), Qingdao* 266580, *China*)

(Received 15 January 2013; revised manuscript received 4 March 2013)

Abstract

Using an invariance of differential equations under the infinitesimal transformations of group, we study the Lie-Mei symmetry of Nielsen equations for a singular nonholonomic system of Chetaev'type. We establish the Lie-Mei symmetry equations. The definitions of weak and strong Lie-Mei symmetry are given, and Hojman conserved quantities and Mei conserved quantities are obtained. An example is given to illustrate the application of the results.

Keywords: singular nonholonomic system, Nielsen equation, Lie-Mei symmetry, conserved quantities

PACS: 02.20.Sv, 11.30.−j, 45.20.Jj　　**DOI:** 10.7498/aps.62.120201

* Project supported by the Innovation Fund of China University of Petroleum (East China) (Grant No. 11CX06088A).

† Corresponding author. E-mail: liyuanch@upc.edu.cn