

## 非线性传送带系统的复杂分岔\*

李群宏<sup>1)†</sup> 闫玉龙<sup>1)</sup> 韦丽梅<sup>1)</sup> 秦志英<sup>2)</sup>

1) (广西大学数学与信息科学学院, 南宁 530004)

2) (河北科技大学机械工程学院, 石家庄 050018)

(2013年2月1日收到; 2013年3月5日收到修改稿)

讨论了一类单自由度非线性传送带系统. 首先通过分段光滑动力系统理论得出系统滑动区域的解析分析和平衡点存在性条件; 其次利用数值方法, 对系统几种类型的周期轨道进行单参数和双参数延拓, 得到系统的余维一滑动分岔曲线和若干余维二滑动分岔点, 以及系统在参数空间中的全局分岔图. 通过对系统分岔行为的研究, 反映出传送带速度和摩擦力振幅对系统动力学行为有较大影响, 揭示了非线性传送带系统的复杂动力学现象.

关键词: 传送带系统, 滑动分岔, 周期运动

PACS: 05.45.-a

DOI: 10.7498/aps.62.120505

## 1 引言

传送带系统具有复杂的动力学行为, 这些系统在工程上有十分广泛的应用. 对这类系统的研究具有重要的理论意义和实用价值, 许多学者对这类系统进行了研究和讨论<sup>[1,2]</sup>. 传送带系统是一种典型的分段光滑动力系统, Filippov<sup>[3]</sup>较系统地讨论了具有不连续向量场的非光滑微分动力系统. 分段光滑系统的轨道可能黏滞在切换流形上, 从而出现各种复杂的分岔行为, 其中有些分岔在光滑系统中同样存在<sup>[4]</sup>, 但是也存在分段光滑系统特有的分岔. Galvanetto<sup>[5]</sup>对传送带系统中的擦边分岔进行了研究. Dankowicz和Nordmark<sup>[6]</sup>讨论了黏滑运动周期轨道的产生和分岔, 并对轨道的稳定性进行了分析. Bernardo等<sup>[7]</sup>对 $n$ 维分段光滑动力系统中出现向量场不连续时产生的各种余维一滑动分岔进行了讨论, 推导了映射的规范型. 通过对传送带等分段光滑系统的深入研究, 逐步形成了现代滑动分岔理论, 并广泛应用于干摩擦振子的研究. Li等<sup>[8]</sup>给出了干摩擦振子黏滑周期运动存在的解析条件. Luo等<sup>[9]</sup>通过构造Poincaré映射讨论外力导致干摩擦

振子的黏滞和非黏滞周期运动. Hetzler等<sup>[10]</sup>讨论了刹车系统的摩擦振荡器在滑动区域的稳定性和局部的分岔行为.

随着滑动分岔研究的深入, Kowalczyk和Bernardo<sup>[11]</sup>探讨了Fillppov系统中退化的滑动分岔即余维二的分岔, 指出余维二分岔点为余维一分岔的组织中心, 并对可能的退化情况进行分类. Dercole和Kuznetsov<sup>[12]</sup>研发了具有若干功能的滑动分岔软件. Kowalczyk和Piiroinen<sup>[13]</sup>通过该软件对干摩擦振子的余维二滑动分岔和开折进行了研究. Guardia等<sup>[14]</sup>证明了在干摩擦系统中存在无穷多的余维二分岔点.

以上提到的干摩擦振子和滑动分岔的研究大部分是针对线性振子, 即假定恢复力和阻尼力均为线性的. 事实上, 除了线性振子外, 非线性振子的干摩擦现象也广泛存在于实际生产中. Luo等<sup>[15]</sup>讨论了非线性含周期外激励的传送带系统, 即系统中存在非线性的弹簧力和阻尼力, 将外激励频率作为分岔参数, 得到纯滑动、黏滞-滑动运动、高周期运动以及混沌等丰富的动力学行为. 但是该文只考虑了单个参数的变化对于系统的影响. 众所周知, 由于非光滑系统的特殊性, 对其进行双或多参数分

\* 国家自然科学基金(批准号: 10972059, 11002046)、广西自然科学基金(批准号: 2010GXNSFA013110, 2013GXNSFAA019017)和广西青年科学基金(批准号: 2011GXNSFB018060)资助的课题.

† 通讯作者. E-mail: liqh@gxu.edu.cn

岔研究还比较困难. 基于该文献的工作, 本文讨论传送带的速度和摩擦力振幅两个参数的变化对于不含外激励的非线性传送带系统的动力学行为的影响. 通过对向量场的滑动域和平衡点的解析分析, 对系统几种类型的周期轨道运用数值方法进行单参数和双参数的延拓, 得到了丰富的分岔结果以及系统在参数空间中的全局分岔图.

## 2 力学模型

考虑图 1 所示的非线性传送带模型 (参见文献 [15]). 传送带上的物体  $m$  通过线性、非线性系数为  $k_1, k_2$  的非线性弹簧以及线性、非线性阻尼系数为  $c_1, c_2$  的非线性阻尼器与固定的墙体相连, 其中传送带的速度为  $V$ , 令  $(x, t)$  为传送带上物体的绝对坐标系, 则系统的运动方程可表为

$$m\ddot{x} - c_1\dot{x} + c_2\dot{x}^3 + k_1x + k_2x^3 = -\bar{F}_f. \quad (1)$$

由于  $c_1, c_2, k_1, k_2$  均为正数, 弹簧为非线性的, 当  $k_2 = 0$  时弹簧为线性的; 类似的, 阻尼也为非线性的, 当  $c_2 = 0$  时阻尼为线性的. 在物体运动时, 物体受到摩擦力为  $\bar{F}_f$ , 摩擦力为 Coulomb 模型, 对应的表达式为

$$\bar{F}_f(\dot{x}) \begin{cases} = -\mu_k F_N & (\dot{x} - V < 0) \\ \in [-\mu_k F_N, \mu_k F_N] & (\dot{x} - V = 0), \\ = \mu_k F_N & (\dot{x} - V > 0) \end{cases}$$

其中  $\mu_k$  为动摩擦系数,  $F_N$  为物体对传送带的正压力. 以上式子表明: 物体为滑动运动时, 系统的摩擦力是固定不变的, 与运动方向相反, 大小为  $\mu_k F_N$ ; 当物体发生黏滞, 即物体的速度与传送带的速度相等时, 摩擦力的大小为变化的, 大小与传送带上的物体受到的弹簧力和阻尼力的合力相等, 方向相反, 在摩擦力的作用下可以使得物体黏滞于传送带上. 当摩擦力不足以与外力的合力平衡时, 则物体的黏滞消失, 出现滑动运动; 若摩擦力足以与其他外力的合力平衡, 则物体将继续黏滞.

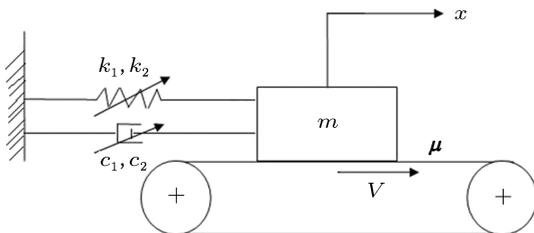


图 1 非线性传送带模型

经过无量纲化, 系统 (1) 的运动方程可表为

$$\ddot{x} - d_1\dot{x} + d_2\dot{x}^3 + a_1x + a_2x^3 = -f, \quad (2)$$

其中  $d_1 = c_1/m, d_2 = c_2/m, a_1 = k_1/m, a_2 = k_2/m, f = \bar{F}_f/m, f_N = \mu_k F_N/m$ , 且均为正数. 令  $x_1 = x, x_2 = \dot{x}, \mathbf{X} = (x_1, x_2)^T$  表示相变量,  $\boldsymbol{\mu} = (f_N, V)^T$  为本文讨论的分岔参数, 那么该系统 (2) 可表示为

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = d_1x_2 - d_2x_2^3 - a_1x_1 - a_2x_1^3 - f. \end{cases} \quad (3)$$

## 3 滑动域与平衡点分析

由于滑动向量场和系统的平衡点对系统的动力学行为起着重要影响, 因此, 根据分段光滑动力系统的理论, 对系统 (3) 的滑动向量场和平衡点进行解析研究.

### 3.1 滑动向量场的分析

根据 Filippov 理论, 不连续的切换流形 (即不连续边界)

$$\Sigma = \{\mathbf{X} \in \mathbb{R}^2, H(\mathbf{X}, \boldsymbol{\mu}) = 0\},$$

其中  $H(\mathbf{X}, \boldsymbol{\mu}) = x_2 - V$ , 将相空间分为两部分:

$$S_1 = \{\mathbf{X} \in \mathbb{R}^2, H(\mathbf{X}, \boldsymbol{\mu}) < 0\},$$

$$S_2 = \{\mathbf{X} \in \mathbb{R}^2, H(\mathbf{X}, \boldsymbol{\mu}) > 0\},$$

相空间  $S_1, S_2$  对应的向量场  $F_1, F_2$  分别为

$$\begin{aligned} F_1(\mathbf{X}, \boldsymbol{\mu}) &= \begin{pmatrix} x_2 \\ d_1x_2 - d_2x_2^3 - a_1x_1 - a_2x_1^3 + f_N \end{pmatrix}, \\ F_2(\mathbf{X}, \boldsymbol{\mu}) &= \begin{pmatrix} x_2 \\ d_1x_2 - d_2x_2^3 - a_1x_1 - a_2x_1^3 - f_N \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4)$$

因此依照 Filippov 凸方法, 滑动向量场  $F_s$  可表为

$$\begin{aligned} F_s &= F_1(\mathbf{X}, \boldsymbol{\mu}) + (F_2(\mathbf{X}, \boldsymbol{\mu}) \\ &\quad - F_1(\mathbf{X}, \boldsymbol{\mu}))\alpha(\mathbf{X}, \boldsymbol{\mu}) = \begin{pmatrix} x_2 \\ 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

其中  $0 \leq \alpha(\mathbf{X}, \boldsymbol{\mu}) \leq 1$ ,  $\alpha(\mathbf{X}, \boldsymbol{\mu})$  表达式为

$$\begin{aligned} \alpha(\mathbf{X}, \boldsymbol{\mu}) &= \left( -\frac{H_x(\mathbf{X}, \boldsymbol{\mu})F_1(\mathbf{X}, \boldsymbol{\mu})}{H_x(\mathbf{X}, \boldsymbol{\mu})(F_2(\mathbf{X}, \boldsymbol{\mu}) - F_1(\mathbf{X}, \boldsymbol{\mu}))} \right) \\ &= \frac{d_1x_2 - d_2x_2^3 - a_1x_1 - a_2x_1^3 + f_N}{2f_N}, \end{aligned}$$

$\alpha(\mathbf{X}, \boldsymbol{\mu})$  取 0 或 1 时, 分别对应于滑动域  $\hat{\Sigma}$  的边界  $\partial\hat{\Sigma}^+$  和  $\partial\hat{\Sigma}^-$ :

$$\partial\hat{\Sigma}^+ = \{\mathbf{X} \in \Sigma : H_x(\mathbf{X}, \boldsymbol{\mu})F_1(\mathbf{X}, \boldsymbol{\mu}) = 0\}$$

$$= \{X \in \Sigma : d_1x_2 - d_2x_2^3 - a_1x_1 - a_2x_1^3 + f_N = 0\}, \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \partial\hat{\Sigma}^- &= \{X \in \Sigma : H_x(X, \mu)F_2(X, \mu) = 0\} \\ &= \{X \in \Sigma : d_1x_2 - d_2x_2^3 - a_1x_1 - a_2x_1^3 - f_N = 0\}. \end{aligned} \quad (6)$$

由于  $f_N > 0$ , 滑动域的表达式为

$$\begin{aligned} \hat{\Sigma} &= \{X \in \Sigma : d_1x_2 - d_2x_2^3 - f_N \\ &\leq a_1x_1 + a_2x_1^3 \leq d_1x_2 - d_2x_2^3 + f_N\}, \end{aligned}$$

即滑动域满足:

$$\begin{aligned} &H_x(X, \mu)F_1(X, \mu) \\ &= d_1x_2 - d_2x_2^3 - a_1x_1 - a_2x_1^3 + f_N > 0, \\ &H_x(X, \mu)F_2(X, \mu) \\ &= d_1x_2 - d_2x_2^3 - a_1x_1 - a_2x_1^3 - f_N < 0. \end{aligned}$$

所以, 向量场  $F_1$  的方向向上, 即指向  $S_2$  区域, 向量场  $F_2$  的方向向下, 即指向  $S_1$  区域. 当系统进入滑动域后, 则运动黏滞在切换流形上, 当到达滑动域边界时离开滑动域. 类似地, 若切换流形上的点满足  $a_1x_1 + a_2x_1^3 < d_1x_2 - d_2x_2^3 - f_N$  时, 两个向量场的方向在切换流形附近均向上, 即指向  $S_2$  区域. 若切换流形上的点满足  $a_1x_1 + a_2x_1^3 > d_1x_2 - d_2x_2^3 + f_N$  时, 两个向量场的方向在切换流形附近均向下, 即指向  $S_1$  区域. 切换流形附近的向量场可通过图 2 表示.

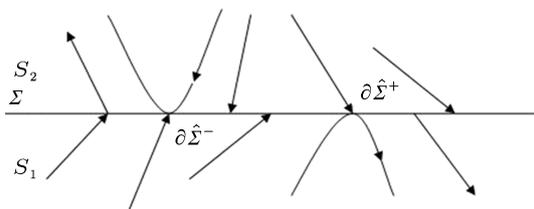


图 2 切换流形附近的向量场示意图

### 3.2 平衡点的研究

下面首先对向量场  $F_{1,2}$  中平衡点存在条件进行分析, 由 (4) 式可知向量场  $F_{1,2}$  的平衡点存在性条件为

$$\begin{cases} x_2 = 0, \\ d_1x_2 - d_2x_2^3 - a_1x_1 - a_2x_1^3 - f_N \operatorname{sgn}(\dot{x} - V) = 0. \end{cases}$$

令  $p = a_1/a_2, q = \mp f_N/a_2$ , 其中向量场  $F_1$  的平衡点对应于  $q = -f_N/a_2$  的情况, 向量场  $F_2$  的平衡点对应于  $q = f_N/a_2$  的情况, 则平衡点存在条件等价于

$$\begin{cases} x_2 = 0, \\ x_1^3 + px_1 + q = 0. \end{cases} \quad (7)$$

由于  $a_1, a_2$  均为正数, 则判别式

$$\Delta = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 = \left(\frac{f_N}{2a_2}\right)^2 + \left(\frac{a_1}{3a_2}\right)^3 > 0.$$

根据卡尔丹判别法, (7) 式的第二个方程存在有一个实根和一对共轭复根.

对向量场  $F_1$  的平衡点, 对应 (7) 式的第二个方程的实根为

$$\begin{aligned} x_1^{(1)} &= \left( \left( \frac{p^3 + q^2}{27} + \frac{q^2}{4} \right)^{1/2} - \frac{q}{2} \right)^{1/3} \\ &\quad - \frac{p}{3 \left( \left( \frac{p^3 + q^2}{27} + \frac{q^2}{4} \right)^{1/2} - \frac{q}{2} \right)^{1/3}} \\ &= \left( \left( \frac{a_1^3}{27a_2^3} + \frac{f_N^2}{4a_2^2} \right)^{1/2} + \frac{f_N}{2a_2} \right)^{1/3} \\ &\quad - \frac{a_1}{3a_2 \left( \left( \frac{a_1^3}{27a_2^3} + \frac{f_N^2}{4a_2^2} \right)^{1/2} + \frac{f_N}{2a_2} \right)^{1/3}}. \end{aligned}$$

三次方程的其他两个根为复根, 因此向量场  $F_1$  只有一个平衡点为  $(x_1^{(1)}, 0)$ , 由于  $H((x_1^{(1)}, 0), \mu) < 0$ , 故该平衡点位于区域  $S_1$  中, 则该平衡点为容许平衡点.

对于向量场  $F_2$  的平衡点, (7) 式的第二个方程对应的实根为

$$\begin{aligned} x_1^{(2)} &= \left( \left( \frac{a_1^3}{27a_2^3} + \frac{f_N^2}{4a_2^2} \right)^{1/2} - \frac{f_N}{2a_2} \right)^{1/3} \\ &\quad - \frac{a_1}{3a_2 \left( \left( \frac{a_1^3}{27a_2^3} + \frac{f_N^2}{4a_2^2} \right)^{1/2} - \frac{f_N}{2a_2} \right)^{1/3}}. \end{aligned}$$

则向量场  $F_2$  只有一个平衡点为  $(x_1^{(2)}, 0)$ , 由于  $H((x_1^{(2)}, 0), \mu) < 0$ , 则该平衡点位于区域  $S_1$  中, 则该平衡点为虚拟平衡点.

下面对容许平衡点  $(x_1^{(1)}, 0)$  的稳定性进行分析, 向量场  $F_1$  在平衡点处对应的 Jacobi 矩阵为

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a_1 - 3a_2x_1^2 & d_1 - 3d_2x_2^2 \end{pmatrix} \Big|_{(x_1^{(1)}, 0)} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a_1 - 3a_2(x_1^{(1)})^2 & d_1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

对应的特征值为

$$\lambda_{1,2} = \frac{d_1 \pm \sqrt{d_1^2 - 12a_2(x_1^{(1)})^2 - 4a_1}}{2}.$$

对于该系统而言, 由于  $d_1$  为正数, 因此对应的平衡点  $(x_1^{(1)}, 0)$  为不稳定的.

由上述分析可知, 对于切换流形两侧的向量场  $F_{1,2}$  的平衡点只会出现在区域  $S_1$  中, 且该平衡点为不稳定的. 也就是说, 当物体速度与传送带速度不相同, 虽然向量场是不随时间变化的, 但是物体不可能保持在一个确定的平衡位置.

### 4 系统的黏 - 滑周期运动

在下面的数值仿真中, 对于弹簧和阻尼的参数将取固定值, 即  $d_1 = 4.905$ ,  $d_2 = 3.3$ ,  $a_1 = 1.0$ ,  $a_2 = 10.0$ . 通过改变摩擦力振幅  $f_N$  和传送带速度  $V$  的大小, 研究系统不同类型的周期轨道.

#### 4.1 滑动轨道

取参数  $f_N = 5.886$ ,  $V = 1.0$  时, 系统存在滑动轨道. 对应于传送带上物体的黏滞 - 滑动运动, 在

滑动过程中物体的速度不会大于传送带的速度. 一个周期内系统在区域  $S_1$  和  $\Sigma$  中运动的时间分别为 1.2942, 0.4392. 在  $\Sigma$  区域的运动为黏滞, 滑块相对于传送带是静止的, 传送带通过变化的静摩擦力做功向系统输入能量, 能量缓慢地储存于弹簧中; 在  $S_1$  区域中的运动为滑动, 在这一阶段中摩擦力平衡不了弹簧力与阻尼力, 滑块将不能保持相对于传送带静止的状态. 相图和时间历程图如图 3 所示.

#### 4.2 穿越 - 滑动轨道

取参数  $f_N = 1.886$ ,  $V = 1.0$  时, 系统存在穿越 - 滑动轨道. 对应于传送带上的物体发生黏滞 - 滑动运动, 且在滑动过程中物体可能黏滞于传送带上, 且速度可能大于或小于传送带的速度. 一个周期内系统在区域  $S_1$ ,  $S_2$  和  $\Sigma$  中运动的时间分别为 2.1962, 0.5030, 0.6568. 相图和时间历程图如图 4 所示.

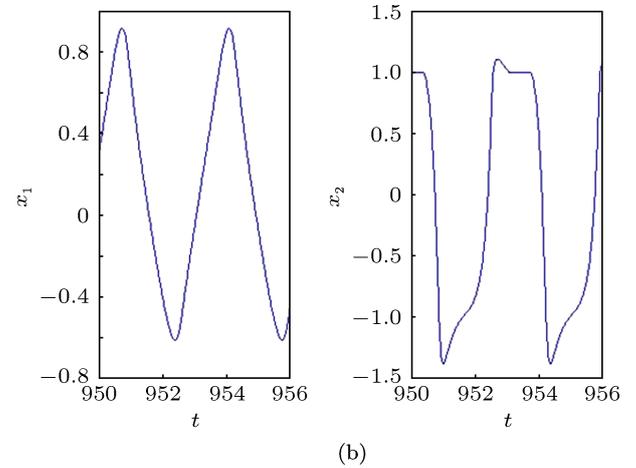
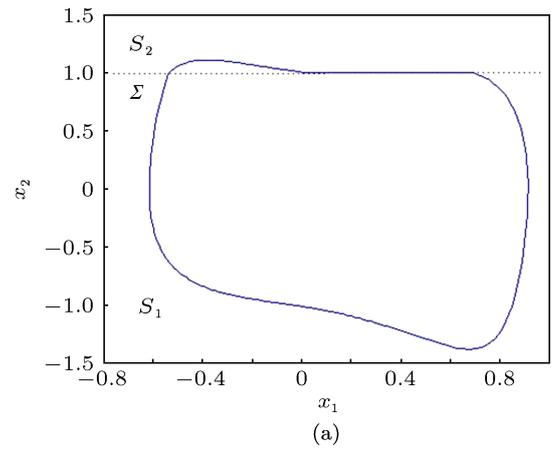
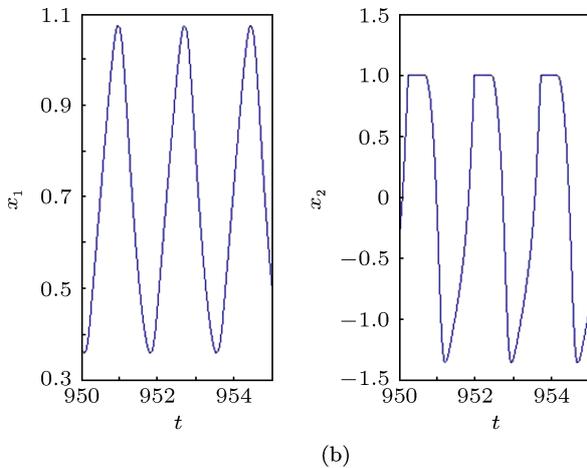
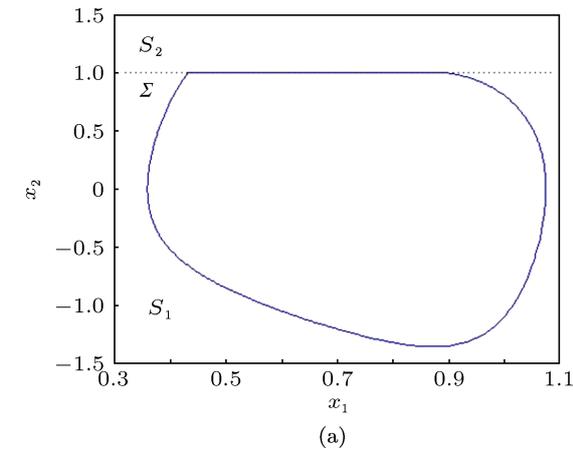


图 3 滑动轨道 (a) 相图; (b) 时间历程图

图 4 穿越 - 滑动轨道 (a) 相图; (b) 时间历程图

### 4.3 穿越 - 穿越轨道

取参数  $f_N = 0.286, V = 1.0$  时, 系统存在穿越 - 穿越轨道. 对应于传送带上的物体为纯滑动, 且在滑动过程中物体不会黏滞于传送带上, 物体运动的速度可能大于或小于传送带速度. 一个周期内系统在区域  $S_1, S_2$  中运动的时间分别为 2.0947, 1.0689. 相图和时间历程图如图 5 所示.

### 4.4 区域 $S_1$ 中的周期轨道

取参数  $f_N = 5.886, V = 1.5$  时, 系统的运动仅发生在区域  $S_1$  中. 对应于传送带上的物体为纯滑动, 相轨迹不与不连续边界  $\Sigma$  发生相交, 即物体速度不会大于传送带速度. 相图和时间历程图如图 6 所示.

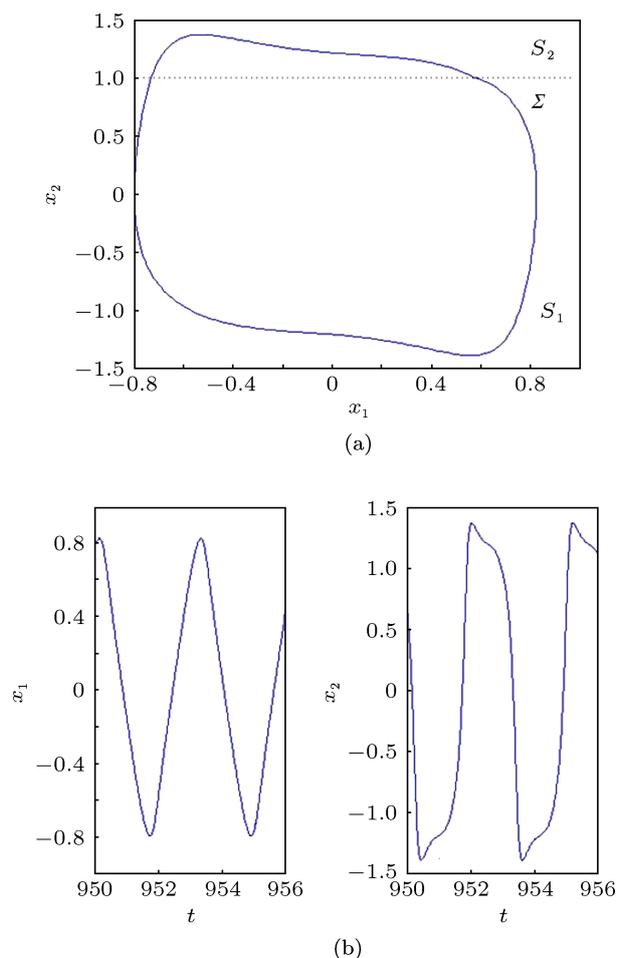


图 5 穿越 - 穿越轨道 (a) 相图; (b) 时间历程图

### 4.5 区域 $S_1$ 中的擦边轨道

取参数  $f_N = 5.886, V = 1.430848$  时, 系统的运

动仅发生在区域  $S_1$  中, 且与切换流形发生相切的情况, 对应于传送带上的物体发生滑动运动, 在滑动过程中物体的最大速度刚好等于传送带速度. 相图和时间历程图如图 7 所示.

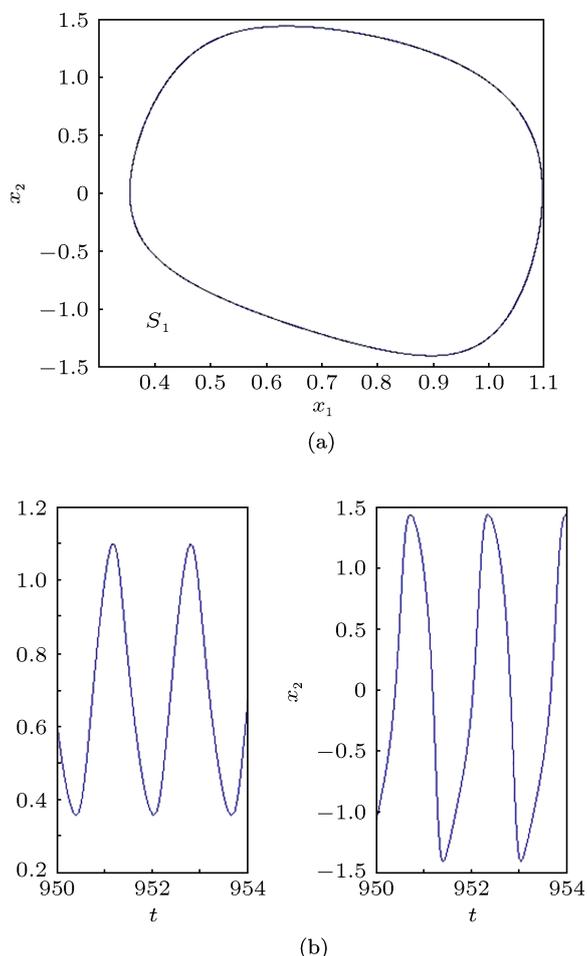


图 6 区域  $S_1$  中的周期轨道 (a) 相图; (b) 时间历程图

## 5 周期轨道的延拓

通过对相轨迹的研究表明, 随着摩擦力振幅  $f_N$  和传送带速度  $V$ , 系统会呈现出不同类型的周期轨道, 在下面分岔的数值研究中, 取参数  $d_1 = 4.905, d_2 = 3.3, a_1 = 1.0, a_2 = 10.0$ , 将  $f_N, V$  作为分岔参数. 对第 4 节中获得的几种类型的周期轨道分别进行单参数和双参数延拓, 从而得到系统的全局分岔图.

### 5.1 滑动轨道的延拓

由 4.1 节可知, 系统取  $f_N = 5.886, V = 1.0$  时, 存在滑动轨道, 下面对滑动轨道进行延拓. 首先对参数  $f_N$  进行延拓, 在  $f_N = 2.507013$  时出现切换分

岔, 对应该分岔值的相图见图 8(a). 系统的相轨经过滑动区域的两个边界  $\partial\hat{\Sigma}^-, \partial\hat{\Sigma}^+$ , 即向量场  $F_2, F_1$  与切换流形的切点  $T_2 = (-0.374937, 1.000000), T_1 = (0.698853, 1.000000)$ , 分别将这两个点代入滑动区域的边界条件 (6) 和 (5) 式, 可知这两个切点满足滑动区域的边界  $\partial\hat{\Sigma}^-, \partial\hat{\Sigma}^+$  的存在性条件. 在临界值附近的分岔图如 8(b) 所示, 其中横坐标为分岔参数  $f_N$ , 纵坐标为相变量  $x_2$  的最大值 (对应于物体运动速度的最大值). 由图像可知, 当  $f_N$  大于临界值  $f_N = 2.507013$  时, 物体的最大速度不会大于传送带的速度, 对应于系统的滑动轨道; 当  $f_N$  小于临界值时, 物体的最大速度大于传送带的速度, 对应于系统的穿越 - 滑动轨道.

对参数  $V$  进行延拓, 在延拓过程中动力学行为不发生变化, 即系统始终为黏滞 - 滑动运动.

接着对余维一的切换分岔点  $f_N = 2.507013, V = 1.0$  进行  $f_N, V$  双参数延拓, 延拓结果显示无分岔产生, 对应的切换分岔曲线如图 9 所示.

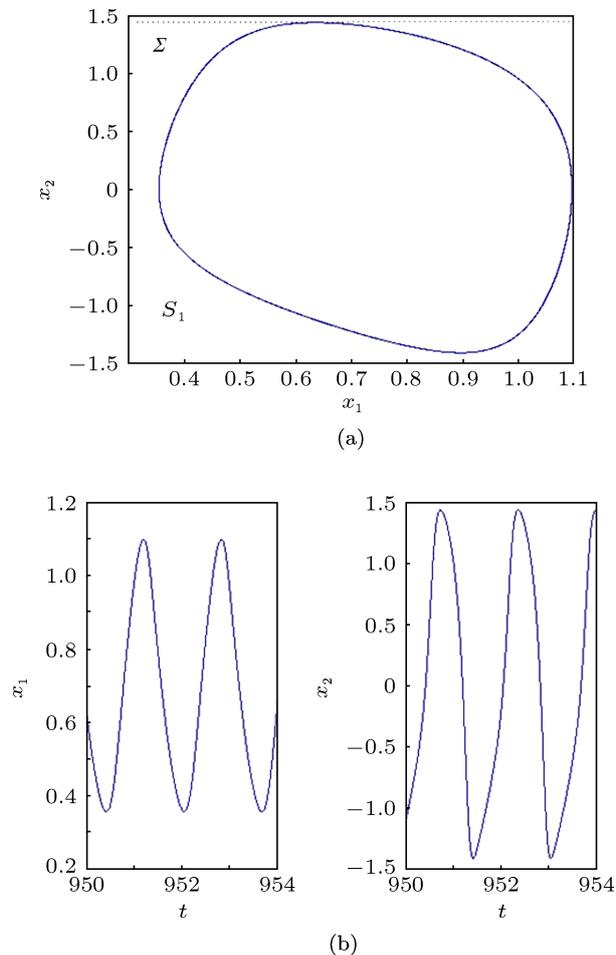


图 7 擦边轨道 (a) 相图; (b) 时间历程图

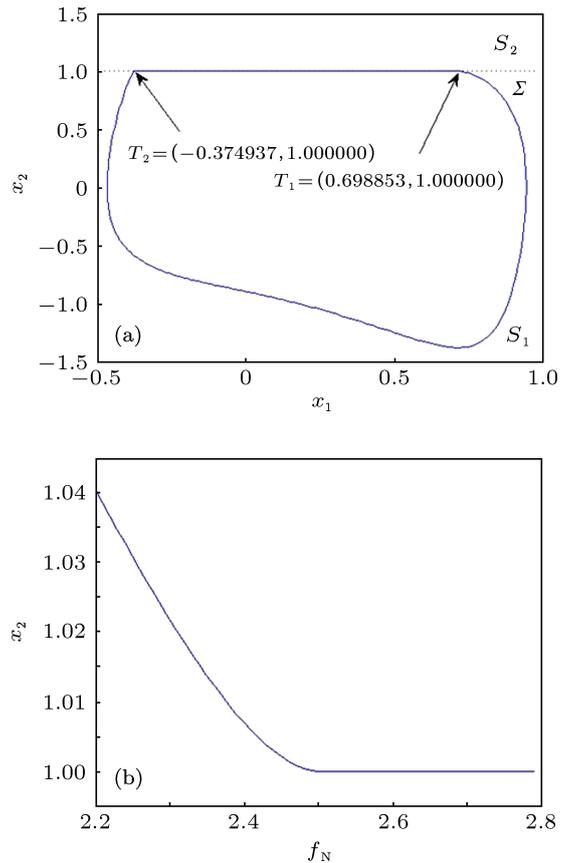


图 8 (a) 切换分岔点对应的相图; (b) 在临界值附近的分岔图

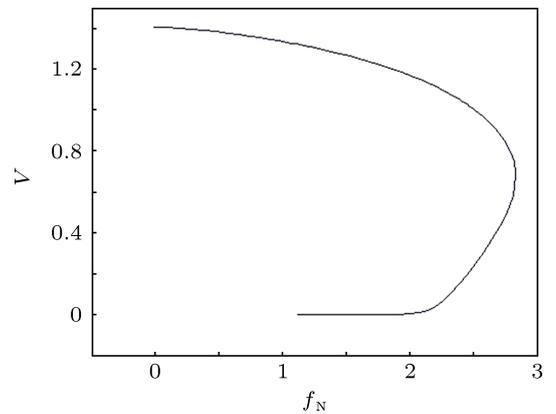


图 9  $(f_N, V)$  参数空间中切换分岔曲线

### 5.2 穿越 - 滑动轨道的延拓

由 4.2 节可知, 系统取  $f_N = 1.886, V = 1.0$  时存在穿越 - 滑动轨道. 首先对该轨道关于参数  $f_N$  进行延拓, 延拓结果显示, 在  $f_N = 2.507013$  时出现切换分岔点, 这与 5.1 节中延拓得到的切换分岔点为同一点, 故不再讨论该点性质. 在  $f_N = 0.499838$  时出现余维一的穿越分岔点, 对应此分岔值的相图如图 10(a) 所示, 系统的相轨与切换流形相交于

滑动区域右边界  $\partial\hat{\Sigma}^+$ , 即向量场  $F_1$  与切换流形切点  $T_1 = (0.538992, 1.000000)$ , 将这个点代入滑动区域的边界条件 (5), 可知该切点满足滑动区域边界  $\partial\hat{\Sigma}^+$  存在条件. 在临界值附近的分岔图如图 10(b) 所示, 其中横坐标为分岔参数  $f_N$ , 纵坐标为一个周期内滑动的距离  $s$ . 由图像可知, 当  $f_N$  小于临界值  $f_N = 0.499838$  时,  $s = 0$ , 即系统的周期运动中不存在滑动现象, 对应系统的轨道为穿越 - 穿越轨道; 当  $f_N$  大于临界值时,  $s > 0$ , 说明系统的周期运动存在滑动现象, 对应系统的轨道为穿越 - 滑动轨道.

对参数  $V$  进行延拓, 在  $V = 1.198872$  时表明出现切换分岔, 这与 5.1 节中计算得到的切换分岔点性质类似, 故不再讨论该点性质. 在  $V = 0.211551$  时出现穿越分岔, 这与 5.2 节中延拓得到的穿越分岔点性质类似, 故不再讨论该点性质.

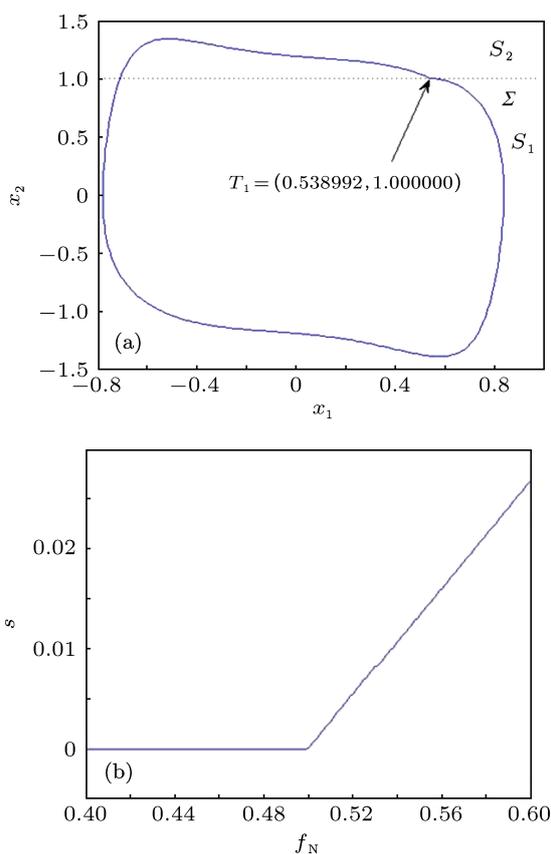


图 10 (a) 穿越分岔点对应的相图; (b) 在临界值附近的分岔图

下面进行双参数延拓. 首先对参数值  $f_N = 1.886, V = 1.198872$  所对应的切换分岔点关于参数  $f_N, V$  进行延拓, 在延拓过程中出现一个余维二的分岔点, 对应的分岔值为  $(f_N, V) = (0, 1.402663)$ , 相应的切换分岔曲线与图 9 相同.

接着对参数值  $f_N = 1.886, V = 0.211551$  以

及  $f_N = 0.4998376, V = 1.0$  对应的穿越分岔点进行双参数  $f_N, V$  延拓, 延拓过程中出现两个余维二分岔点, 分岔值为  $(f_N, V) = (0, 1.402663), (f_N, V) = (1.127385, 0)$ . 对应的穿越分岔曲线如图 11 所示.

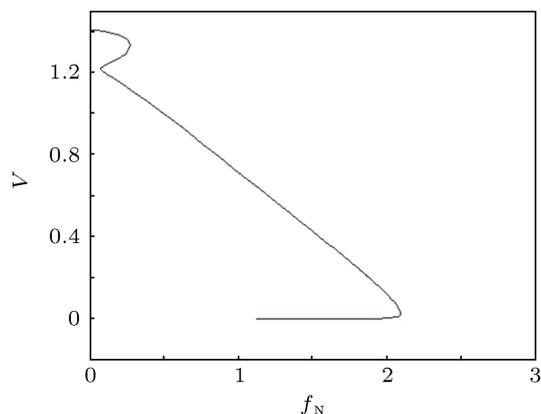


图 11  $(f_N, V)$  参数空间中穿越分岔曲线

### 5.3 穿越 - 穿越轨道的延拓

由 4.3 节可知, 系统取  $f_N = 0.286, V = 1.0$  时, 存在穿越 - 穿越轨道. 首先对该轨道关于参数  $f_N$  进行延拓, 延拓结果显示,  $f_N = 0.4998376$  时表明发生出现穿越分岔点. 接着, 关于参数  $V$  进行延拓, 延拓结果显示,  $V = 1.110887$  时出现穿越分岔点, 由于分岔点均在 5.2 节中检测得到, 因此不再讨论.

### 5.4 擦边轨道的延拓

由 4.5 节可知, 系统取  $f_N = 5.886, V = 1.430848$  时, 系统存在擦边轨道, 由于擦边为余维一的分岔, 下面关于  $f_N, V$  进行双参数延拓, 得到的余维一擦边分岔曲线如图 12 所示.

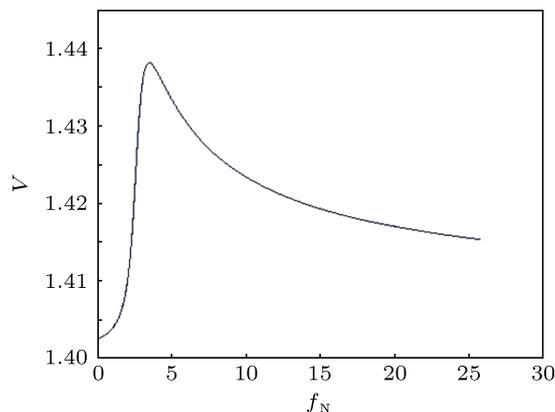


图 12  $(f_N, V)$  参数空间中擦边分岔曲线

延拓得到的擦边轨道的振幅和频率对应变化关系如图 13 所示. 由图 13 可知, 系统在拐点左侧, 振幅随频率的增大而增大; 而在拐点右侧, 振幅随频率的减小而增大; 拐点对应的参数值为  $(f_N, V) = (3.496500, 1.438231)$ . 由此看出, 经过拐点后, 频率和振幅之间的关系发生改变.

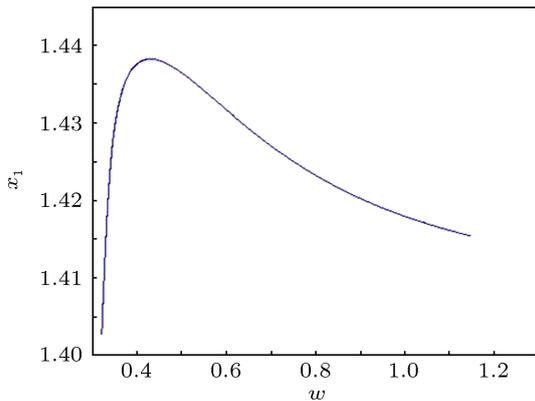


图 13 擦边周期运动的振幅和频率的变化关系

将以上得到的余维一分岔曲线绘制到参数空间中, 如图 14 所示, 其中 GS, CS, SS 分别代表擦边滑动分岔曲线、穿越滑动分岔曲线和切换滑动分岔曲线. 这些分岔曲线的交点为余维二的分岔点, 即余维二的分岔点为余维一分岔曲线的组织中心, 对应交点为  $(f_N, V) = (0, 1.402663)$ ,  $(f_N, V) = (1.126279, 0)$ . 前者为 GS, SS, CS 的交点, 后者为 SS, CS 的交点.

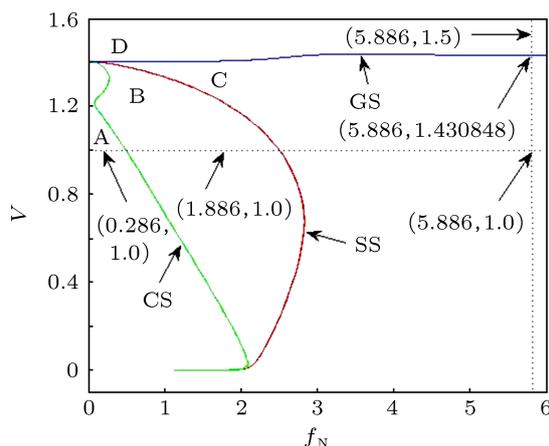


图 14  $(f_N, V)$  参数空间中余维一分岔曲线

下面重点对余维二分岔点  $(f_N, V) = (0, 1.402663)$  进行研究. 由于  $f_N = 0$ , 故边界两侧的向量场相同, 不存在滑动域. 由图 15 可知, 系统

存在周期轨道. 该情况为传送带无摩擦力理想情况.

该点以及附近的轨道将参数空间分为 A, B, C, D 四个区域, 下面在这四个区域参数值  $(f_N, V)$  分别为  $(0.05, 1.39)$ ,  $(0.30, 1.39)$ ,  $(0.25, 1.40)$ ,  $(0.05, 1.41)$ , 在切换流形附近相变量  $x_2$  (即物体速度) 时间历程图, 如图 16 所示.

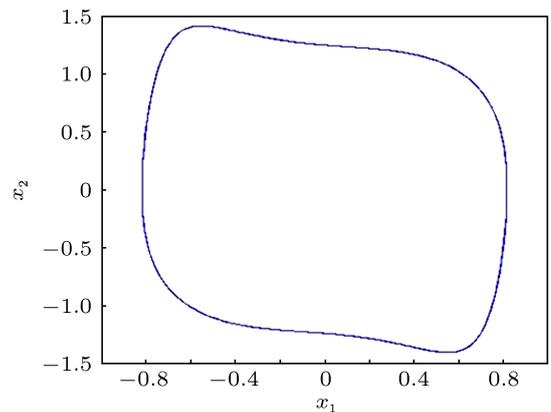


图 15  $(f_N, V) = (0, 1.402663)$  余维二分岔点的相图

以上时间历程图表明, 在 A 区域为穿越 - 穿越轨道 (如 4.3 节中参数为  $(0.286, 1.0)$  的轨道), 在 B 区域为穿越 - 滑动轨道 (如 4.2 节中参数为  $(1.886, 1.0)$  的轨道), 在 C 区域为滑动轨道 (如 4.1 节中参数为  $(5.886, 1.0)$  的轨道), 在 D 区域为只在  $S_1$  区域运动的轨道 (如 4.4 节中参数为  $(5.886, 1.5)$  的轨道). 当参数的取值落在参数空间的 A 或 D 区域中, 物体的运动与传送带的运动不存在相对静止的情况; 在 B 或者 C 区域, 物体的运动与传送带的运动存在相对静止的情况; 而 GS 和 CS 为是否发生滑动的边界. 由于这些边界上对应于系统是否发生滑动的临界状态, 若分岔参数超过这一临界值时, 会发生滑动现象, 对应滑块的运动会出现时而停住, 时而跳动的情况. 这种现象在机床上称为爬行, 会严重影响加工表面的光洁度和引起位移量的误差. 若该现象发生于测量仪表, 则会严重降低准确度. 因此, 在实际应用中需要通过选取参数避免这一现象.

## 6 结论

本文研究了单自由度非线性传送带问题, 主要考虑了摩擦力振幅  $f_N$ 、传送带速度  $V$  的改变对系统动力学行为的影响. 首先根据 Filippov 理论对滑

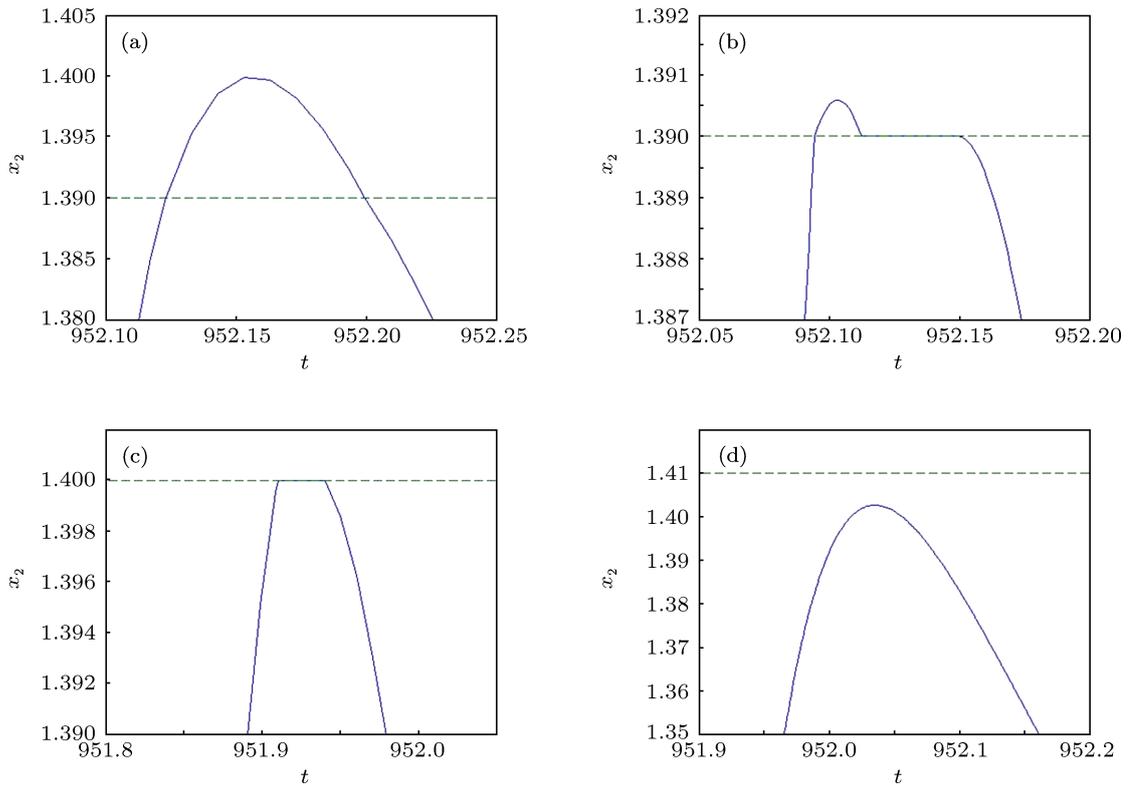


图 16 相变量  $x_2$  在切换流形附近的时间历程图, 对应参数  $(f_N, V)$  的值为 (a) (0.05, 1.39), (b) (0.30, 1.39), (c) (0.25, 1.40), (d) (0.05, 1.41)

动向量场、向量场的平衡点以及稳定性进行理论分析. 接着在特定的参数下, 得到了滑动轨道、穿越 - 滑动轨道、穿越 - 穿越轨道、擦边轨道, 以及只在一侧区域内运动的轨道. 最后对周期轨道进行了单参数和双参数延拓, 得到了余维一的分岔曲线和若干余维二分岔点. 综合本文的解析分析和数值延拓, 得到了系统的全局分岔图. 从分岔图看到, 不

同的分岔曲线将参数空间分为不同的区域, 在各个区域上出现不同的动力学行为. 非线性传送带的双参数分岔研究使得我们能够更好地理解传送带的动力学行为, 对传送带的设计和分析具有指导意义.

对广西大学数学与信息科学学院严邦宁老师在绘图与软件方面给予的帮助表示衷心的感谢!

[1] Galvanetto U, Bishop S R 1994 *Int. J. Mech. Sci.* **36** 683  
 [2] Galvanetto U, Bishop S R 1995 *Chaos Soliton. Fract.* **5** 2171  
 [3] Filippov A F 1988 *Differential Equations With Discontinuous Right-hand Side* (Dordrecht: Kluwer Academic Publishers)  
 [4] Li Q H, Yan Y L, Yang D 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 200505 (in Chinese)  
 [李群宏, 闫玉龙, 杨丹 2012 物理学报 **61** 200505]  
 [5] Galvanetto U 2001 *J. Sound Vib.* **248** 653  
 [6] Dankowicz H, Nordmark A B 2000 *Physica D* **136** 280  
 [7] Bernardo M, Kowalczyk P, Nordmark A 2002 *Physica D* **170** 175  
 [8] Li Q H, Chen Y M, Qin Z Y 2011 *Chin. Phys. Lett.* **28** 030502  
 [9] Luo A C J, Gegg B C 2006 *J. Sound Vib.* **291** 132  
 [10] Hetzler H, Schwarzer D, Seemann W 2007 *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.* **12** 83  
 [11] Kowalczyk P, di Bernardo M 2005 *Physica D* **204** 204  
 [12] Dercole F, Kuznetsov Y A 2005 *ACM T. Math. Software* **31** 95  
 [13] Kowalczyk P, Piironen P T 2008 *Physica D* **237** 1053  
 [14] Guardia M, Hogan S J, Seara T M 2010 *SIAM J. Appl. Dyn. Syst.* **9** 769  
 [15] Luo A C J, Huang J 2012 *Nonlinear Anal. Real.* **13** 241

# Complex bifurcations in a nonlinear system of moving belt\*

Li Qun-Hong<sup>1)†</sup> Yan Yu-Long<sup>1)</sup> Wei Li-Mei<sup>1)</sup> Qin Zhi-Ying<sup>2)</sup>

1) ( College of Mathematics and Information Science, Guangxi University, Nanning 530004, China )

2) ( School of Mechanical Engineering, Hebei University of Science and Technology, Shijiazhuang 050018, China )

( Received 1 February 2013; revised manuscript received 5 March 2013 )

## Abstract

A kind of one-degree-of-freedom nonlinear moving belt system is considered. The analytical research of sliding region and existence conditions of equilibrium are first derived by the theory of piecewise-smooth dynamical system. Then, using numerical method, one- or two-parameter continuation of several types of periodic orbits of the system is calculated. We obtain codimension-1 sliding bifurcation curves, codimension-2 sliding bifurcation points, and global bifurcation diagram in parameter space for the system. The investigation of bifurcation behavior shows that the speed of moving belt and amplitude of friction have a great influence on dynamic behavior, and reveals the complex nonlinear dynamic phenomenon of the moving belt system.

**Keywords:** moving belt system, sliding bifurcation, periodic motion

**PACS:** 05.45.-a

**DOI:** 10.7498/aps.62.120505

---

\* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 10972059, 11002046), the Guangxi Natural Science Foundation, China (Grant Nos. 2010GXNSFA013110, 2013GXNSFAA019017), and the Guangxi Youth Science Foundation, China (Grant No. 2011GXNSFB018060).

† Corresponding author. E-mail: liqh@gxu.edu.cn