基于 Lorenz 映射的混沌系统分支变换预报规律研究*

黎爱兵 张立凤†

(中国人民解放军理工大学气象海洋学院, 南京 211101)

(2013年1月22日收到; 2013年2月25日收到修改稿)

尽管 Lorenz 系统具有混沌和非周期性质, 但其分支变换是可预报的. 本文以强迫 Lorenz 系统为数学模型, 基于 Lorenz 映射, 研究了混沌系统分支变换的预报规律, 将原有关于分支开始变换条件和新分支持续时间的两条一般规律扩展到了 3 条, 并首次分析了系统当前状态达到变换条件所需时间的预报规律, 从而为预报混沌系统非周期演变提供了另一途径. 结果表明: 映射尖点位置为分支变换的临界值, 当变量 z 超过相应临界值时, 系统在当前分支的运动即将结束, 下一循环将跳跃到另一分支运动; 系统在同一分支循环的次数随极值 $z_{\max}$ 单调减小, $z_{\max}$ 越小, 达到变换条件需循环的次数越多; 系统在新分支持续的时间是先前分支最大极值 $z_{\rm M}$ 的单调增加函数, $z_{\rm M}$ 越大, 持续时间增加的幅度也越大. 此外, 外强迫影响着混沌系统分支变换的预报规律, 其不但使正负分支的变换条件出现差异, 且与新分支持续时间的增加速率和达到变换条件所需时间的递减速率密切相关.

关键词: Lorenz 映射, 分支变换, 外强迫, 预报规律

PACS: 05.45.Ac, 05.45.−a **DOI:** 10.7498/aps.62.120507

1 引 言

经典 Lorenz 模型 [1] 是具有明确气象背景的非线性耗散混沌系统. 由于 Lorenz 系统在 x-y 平面围绕正负吸引子运动, 其运动轨迹存在正负两分支, 正负两分支表现在 x-y 平面概率密度函数 (PDF) 上为大小相等的双峰结构 [2], 并可用来反映天气或气候系统相反特征的两个方面, 如洪涝与干旱、高温与低温以及季风的强与弱等. 实际大气中也存在许多双峰结构, 如 Sikka 和 Gadgil[3] 指出与大尺度季风降水有关的热带辐合带 (ITCZ) 的 PDF 具有双峰结构. 于是, Yadav 等 [4] 假设 Lorenz 系统正分支可对应海洋 ITCZ 和季风降水减少, 而负分支与大陆 ITCZ 和季风降水增加相对应. Christiansen[5] 在平流层大气中也找到了气候变化的双峰结构. 这些为应用 Lorenz 系统了解大气基本性质提供了依据.

由于 Lorenz 系统的非周期性, 其运动轨迹随时间在正负两分支之间不定期的来回变换, 使得对系统变量的预报具有很大的困难. 把握 Lorenz 系统两分支的变换规律, 对预报非线性混沌系统的演变有着重要的意义. 尽管 Lorenz 模型在非线性可预报性研究中被广泛应用 [6−11], 但关于其两分支相互变换预报规律的研究不多, 已有的一些研究工作 [4,12−14] 往往只获得了两条一般的预报规律, 即系统两分支开始变换的条件和达到新分支后持续的时间, 然而系统状态什么时候达到变换条件也非常重要, 即系统从当前状态到满足分支变换条件的时间也值得研究.

外强迫对 Lorenz 系统非常重要, 是影响其分歧行为和可预报性主要原因之一. 1994 年 Palmer[15] 引进定常强迫 Lorenz 模型. 随后一些学者分析了该强迫系统的分歧行为和时间平均行为 [16,17], 黎爱兵等 [18] 也研究了外强迫对 Lorenz 系统可预报性的影响. 外强迫除影响 Lorenz 系统的双峰结构及可预报性外, 还影响着 Lorenz 映射的分布. Mittal 等 [16] 研究发现无外力作用时, Lorenz 映射呈单尖点分布, 而外强迫作用可使映射单尖点分裂为双尖点. 黎爱兵等 [18] 通过研究还发现 Lorenz 映射两尖点偏离单尖点的距离和方向与外强迫大小和正负

* 国家自然科学基金 (批准号: 40975031) 资助的课题.

† 通讯作者. E-mail: zhanglif@yeah.net

© 2013 中国物理学会 Chinese Physical Society

符号密切相关.

本文以强迫 Lorenz 系统为数学模型, 基于外强迫对 Lorenz 映射的影响, 除分析系统正负两分支相互变换条件和各分支持续时间的一般预报规律, 还研究系统当前状态达到变换条件所需时间的预报规律, 从而对 Lorenz 系统的预报提供了另一途径.

2 强迫 Lorenz 模型

Palmer 引进的强迫 Lorenz 系统方程 [15]:

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} &= -\sigma x+\sigma y+F_x,\\
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} &= -xz+rx-y+F_y,\\
\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} &= xy-bz+F_z,
\end{aligned}
\tag{1}
$$

其中 $\sigma=10$, $b=8/3$ 和 $r=28$, F_x, F_y 和 F_z 分别为对变量 x, y 和 z 的定常强迫项. 本文仅考虑 $F_x=\sigma F$, $F_y=-F$ 和 $F_z=0$ 的情形 [16−18], 且当 $|F|<1.61$ 时, 该系统出现混沌现象.

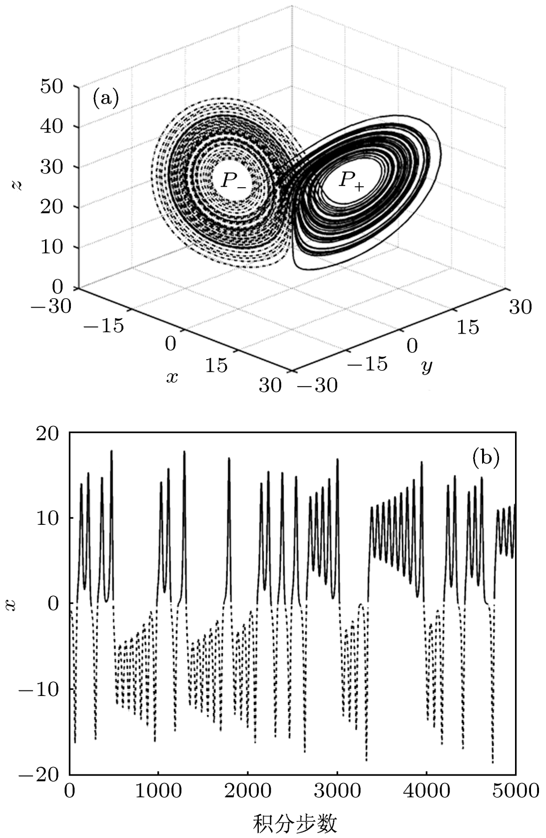

图 1 经典 Lorenz 系统空间运动轨迹及变量 x 随时间演变, 实线和虚线分别表示 $x>0$ 的正分支和 $x<0$ 的负分支 (a) 空间运动轨迹; (b) x 随时间演变

当 $F=0$, 即无外强迫作用时, 方程 (1) 为经典 Lorenz (1963) 方程 [1]. 图 1(a) 为经典 Lorenz 系统空间运动轨迹图, 描述了系统正负两奇怪吸引子 P_+ 和 P_- 以及围绕这两吸引子运动的正负两分支; 而图 1(b) 为变量 x 随时间演变图, 其反映了系统正负分支来回变换, 即 x 正负符号的转换. Lorenz 系统一般具有两个显著的周期 [2]: 一是围绕某吸引子循环运动的振荡周期, 如图 1 中系统围绕 P_+ 或 P_- 运动一周或变量 x 出现一次极大值的时间; 二是系统在某一分支的持续运动的时间或系统在两分支之间的变换周期. 由图 1(b) 可知, 系统在两分支之间的变换具有非周期性质, 其也许围绕某分支循环几周后才跳跃到另一分支运动, 也许仅循环一周就会发生分支变换. 系统分支非周期变换反映了非线性系统的非周期演变, 可用 Lorenz 映射来反映, 且受外强迫影响 [16,18,19]. 因此, 为了尝试理解 Lorenz 系统分支变换, 揭示系统非周期的演变规律, 下面我们从外强迫对 Lorenz 映射的影响中, 找出 Lorenz 系统分支变换的预报规律.

3 基于 Lorenz 映射的分支变换预报规律

尽管 Lorenz 系统具有混沌和非周期性质, 但其分支变换是可预报的 [4,12−14].Lorenz 系统围绕吸引子循环运动一周, 变量 z 就会出现一个极大值 $z_{\max}$.Lorenz 映射反映了相邻极大值 $z_{\max}(n+1)$ 和 $z_{\max}(n)$ 之间的关系, n 代表 $z_{\max}$ 出现的顺序, 利用此映射, 已知当前 $z_{\max}$ 的大小, 可预知下一次极大值 $z_{\max}$ 的大小. 利用此映射, 还可给出 Lorenz 混沌系统分支变换的三条预报规律.

3.1 预报规律 1: 分支开始变换条件

Lorenz 映射反映了极大值 $z_{\max}$ 的出现顺序, 从中可获取两分支开始变换的条件. 图 2 是 $F=-1.5$ 时关于极大值 $z_{\max}$ 的 Lorenz 映射双尖点图, 其中黑色和灰色分别对应 $x>0$ 的正分支和 $x<0$ 的负分支. 由该图可知, 当系统从每一尖点左侧跳跃到其右侧时, 系统正负分支发生了变换, 如系统从图 2 尖点 A(B) 的左侧跳跃到右侧, 其运动由正 (负) 分支变换到负 (正) 分支. 图 2 还给出了极大值 $z_{\max}$ 从 S1 到 S7 的演变, 其中 S1 至 S3 都处于尖点 A 的左

侧, 此时系统运动处于正分支, 由于 S3 已超过尖点 A 的位置 (即尖点最大值对应的横坐标 z_A), S4 跳跃到尖点 A 的右侧, 系统由正分支变换为负分支. 同样的道理, 处于尖点 B 左侧的 S5 演变到 S6 后, 因 S6 超过了尖点 B 位置 z_B, 系统运动由负分支变换到正分支的 S7. 因此, 不难得到系统分支开始变换条件, 即当变量 z 大于某一临界值 (即相应映射尖点位置 z_A 或 z_B) 时, 系统围绕当前分支运动即将结束, 下一循环将跳跃到另一分支运动. 一般 Lorenz 映射左边的尖点位置要小于右边的尖点, 故左尖点左侧代表的分支容易发生变换, 而围绕右尖点左侧分支的运动相对稳定. 图 3 是映射两尖点位置随外强迫 F 的变化, 其值就为系统分支发生变换的临界值, 其中方点和圆点分别代表尖点 A 和 B 的位置. 由该图可知, $F=0$ 时, 两尖点位置重合, Lorenz 映射呈单尖点分布, 正负两分支发生变换的条件一样,

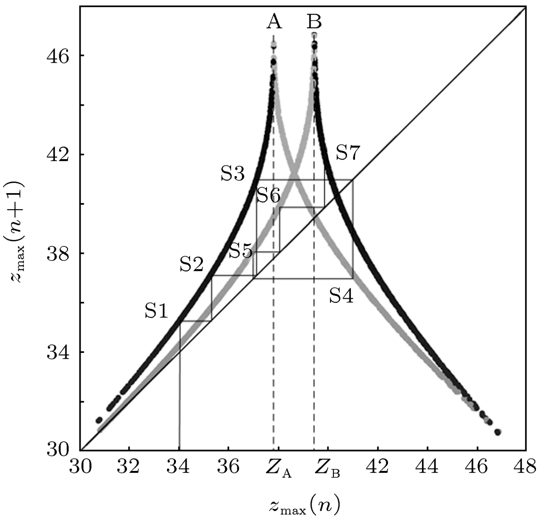

图 2 $F=-1.5$ 时关于极大值 $z_{\max}$ 的 Lorenz 映射

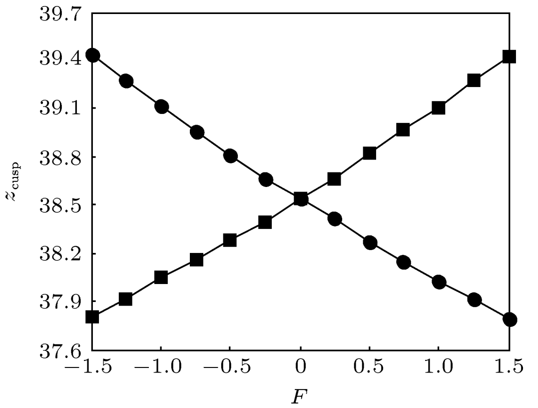

图 3 Lorenz 映射尖点位置 $z_{\rm cusp}$ 随外强迫 F 变化

而 $F \neq 0$ 时, 映射两尖点位置发生偏离, 正负两分支变换的条件也有差异, 且 $|F|$ 越大, 两尖点位置距离越大, 两分支变换条件的差别也越大. 一般负分支随 F 增大越容易发生变换, 而正分支随 F 增大变换条件越苛刻.

3.2 预报规律 2: 分支达到变换条件所需时间

除获得分支开始变换条件外, 如果能提前预知当前系统达到变换条件的时间, 这将有利于提前预报未来 Lorenz 系统的演变, 对理解非线性动力系统的性质有重要的理论意义. 由图 2 可知, 当初始极大值 $z_{\max}=34$ 时, 系统围绕正分支运动, 经过三次循环 (S1—S3) 就可达到变换条件, 故由 Lorenz 映射也可预测混沌系统达到变换条件所需时间, 即根据当前状态 (如当前或初始极值 $z_{\max}$) 可预报系统此后达到变换条件需围绕当前吸引子循环的次数. 图 4 给出了不同外强迫作用下极值 $z_{\max}$ 达到变换条件需循环的次数 n_c, 其中黑色和灰色散点分别对应正分支和负分支. 由该图可知, 无论 Lorenz 系统受多大外强迫作用, 系统围绕同一吸引子循环的次数 n_c 随极值 $z_{\max}$ 单调减小, $z_{\max}$ 越小, 达到变换条件所需循环的次数就越多. $F=0$ 时, 系统正负两分支不但变换条件一样, 其达到变换条件所需时间的规律也一样, 即两分支中循环次数 n_c 随 $z_{\max}$ 单调递减的速率一样 (见图 4(b)). $F<0$ 时, 正分支中系统达到变换条件的循环次数较少, 且随 $z_{\max}$ 递减速度较缓慢, 而负分支不但循环的次数较多, 其随 $z_{\max}$ 递减的速度也快 (见图 4(a)); $F>0$ 时, 结果相反 (见图 4(c)). 为了更好地掌握和预知未来系统的发展, 我们给出系统达到变换条件所需时间的预报规律: 极值 $z_{\max}$ 越小, 达到变换条件需循环的次数越多, 系统围绕同一吸引子循环的次数随极值 $z_{\max}$ 单调减小, 外强迫影响其循环的次数和递减的速率.

3.3 预报规律 3: 新分支持续时间

当变量 z 满足分支变换条件后, 系统下次循环将发生分支变换. 系统到达新分支后, 其本身存在的时间或持续的长度对研究天气和气候持续状态有着重要预报意义. 在计算 Lorenz 映射的同时, 求解系统在每一分支中极值 $z_{\max}$ 的持续个数 n_d, n_d 也为系统在同一分支中持续循环的次数, 其可用来

表示系统到达新分支的持续时间. 图 5 反映了系统在新分支中持续循环次数 n_d 与先前分支中 z 的最大极值 z_M 关系. 从该图可以得出系统新分支持续时间的预报规律, 即系统在新分支持续的时间随先前分支最大极值 z_M 单调增加, 且 z_M 越大, 持续时间增加的幅度也越大. 外强迫也影响着分支持续时

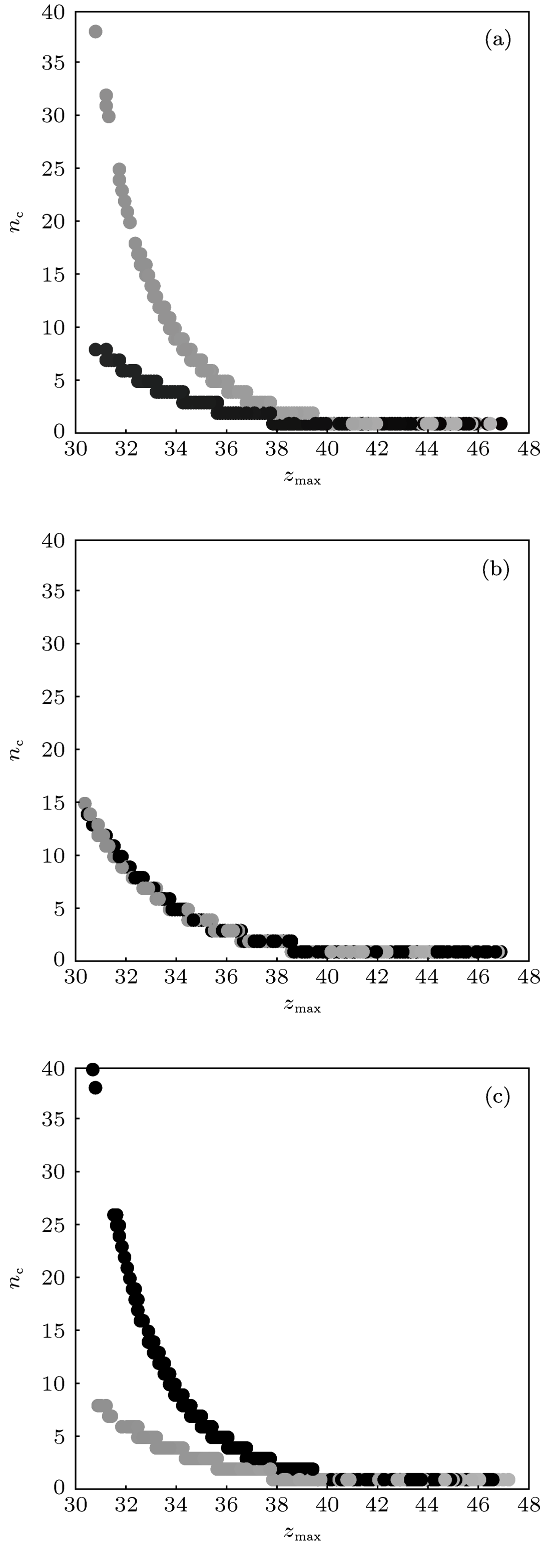

图 4　不同外强迫作用下同一分支中达到变换条件的循环次数 n_c 与极值 z_max 的关系　(a) $F=-1.5$; (b) $F=0$; (c) $F=1.5$

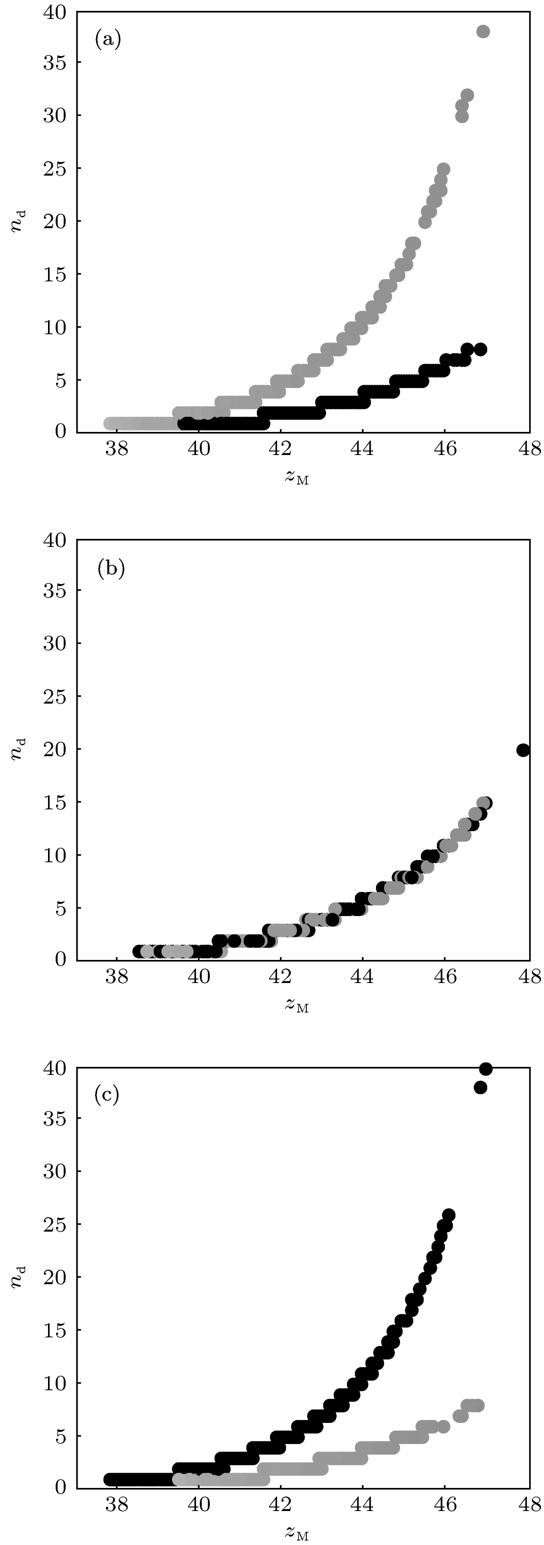

图 5　系统在新分支持续循环次数 n_d 与旧分支最大极值 z_M 的关系　(a) $F=-1.5$; (b) $F=0$; (c) $F=1.5$

间增加的速率, $F=0$ 时, 系统在正负两分支中持续时间的规律一样, 而 $F<0$ 时, 负分支持续的时间随 z_M 平均增加速率要大于正分支, $F>0$ 时, 结果相反.

相似的 Lorenz 混沌系统分支变换预报规律, 也可从系统变量 x 或 y 的极值随时间的演变中获取, 关于这方面的分析本文不再重复.

4 结 论

本文以强迫 Lorenz 系统为数学模型, 从关于极大值 z_{max} 的 Lorenz 映射中, 除获得了系统正负分支相互变换条件和新分支持续时间的预报规律外, 还研究了系统当前状态达到变换条件所需时间的预报规律. Lorenz 映射尖点位置就为分支变换的临界值, 当变量 z 的大小超过相应临界值时, 系统围绕当前分支的运动即将结束, 下一循环将跳跃到另一分支运动. 一般负分支随 F 增大越容易发生变换, 而正分支随 F 增大变换条件越苛刻. 系统围绕同一吸引子循环的次数随极值 z_{max} 单调减小, z_{max} 越小, 达到变换条件需循环的次数越多, 外强迫影响其循环的次数和递减的速率. 系统在新分支持续的时间随先前分支最大极值 z_M 单调增加, z_M 越大, 持续时间增加的幅度也越大, 外强迫也影响其持续时间增加的速率.

掌握 Lorenz 系统分支变换的预报规律, 对提前非线性动力系统变化有着重要的理论意义. 相对于前人的工作 [4,12−14], 本文将 Lorenz 系统分支变换的预报规律扩展到了 3 条, 且首次分析了系统当前状态达到变换条件所需时间的预报规律, 从而为预报 Lorenz 系统未来发展提供了另一途径. 实际中也存在许多双分支系统, 在以后工作中, 我们将进一步在实际非线性系统中寻找各分支体系之间相互变换规律, 从而为本文的研究结果给出强有力的实例证据.

[1] Lorenz E N 1963 *J. Atmos. Sci.* **20** 130

[2] Palmer T N 1993 *Bull. Amer. Meteor. Soc.* **74** 49

[3] Sikka D R, Gadgil S 1980 *Mon. Wea. Rev.* **108** 1840

[4] Yadav R S, Dwivedi S, Mittal A K 2005 *J. Atmos. Sci.* **62** 2316

[5] Christiansen B 2003 *J. Clim.* **16** 3681

[6] Palmer T N 1999 *J. Clim.* **12** 575

[7] He W P, Feng G L, Dong W J, Li J P 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 969 (in Chinese) [何文平, 封国林, 董文杰, 李建平 2006 物理学报 **55** 969]

[8] He W P, Feng G L, Gao X Q, Chou J F 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 3175 (in Chinese) [何文平, 封国林, 高新全, 丑纪范 2006 物理学报 **55** 3175]

[9] Ding R Q, Li J P 2007 *Chin. J. Atmos. Sci.* **31** 571 (in Chinese) [丁瑞强, 李建平 2007 大气科学 **31** 571]

[10] Ding R Q, Li J P 2008 *Chin. J. Geophys.* **51** 1007 (in Chinese) [丁瑞强, 李建平 2008 地球物理学报 **51** 1007]

[11] Ding R Q, Li J P 2011 *Acta Meteor. Sin.* **25** 395

[12] Evans E N, Bhatti J K, Pann L, Pena M, Yang S C, Kalnay E, Hansen J 2004 *Bull. Amer. Meteor. Soc.* **85** 520

[13] Mittal A K, Dwivedi S, Yadav R S 2007 *Physica* D **233** 14

[14] Dwivedi S, Mittal A K 2012 *Pure Appl. Geophys.* **169** 755

[15] Palmer T N 1994 *Ind. Natl. Sci. Acad.* **60** 57

[16] Mittal A K, Dwivedi S, Pandey A C 2005 *Nonlin. Prog. Geophys.* **12** 707

[17] Dwivedi S, Mittal A K, Pandey A C 2007 *Atmo.-Ocean* **45** 71

[18] Li A B, Zhang L F, Xiang J 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 119202 (in Chinese) [黎爱兵, 张立凤, 项杰 2012 物理学报 **61** 119202]

[19] Mehta M, Mittal A K, Diwivedi S 2003 *Int. J. Bifurcation Chaos* **13** 3029

Rules for predicting regime change in the Lorenz chaotic system based on the Lorenz map*

Li Ai-Bing Zhang Li-Feng†

(*College of Meteorology and Oceanography, PLA University of Science and Technology, Nanjing* 211101, *China*)

(Received 22 January 2013; revised manuscript received 25 February 2013)

Abstract

Corresponding to two strange Lorenz attractors, in the Lorenz model there exist two opposite regimes which can be called as positive and negative regimes. Despite the trajectory of the Lorenz system changing between the two regimes back and forth with an unfixed period, the regime change is predictable. In this paper, with the help of the Lorenz map, three rules for predicting regime change are obtained. In particular, besides two generic predictable rules for the condition of regime transition and duration in new regime, a new rule about length for reaching transition condition, which has not been reported in previous work, is also very important. It provides another approach to forecasting the evolution of the nonlinear dynamical system. The results show that the position for highest point in cusps is the critical value for regime change. When the value of variable z is greater than the corresponding critical value, the current regime is about to end, and the Lorenz model will move to other regime in the next cycle. The length for reaching transition condition in the current regime decreases monotonically with local maximum value $z_{\max}$, and the smaller $z_{\max}$ in current status implies the bigger length for reaching transition condition. The duration in new regime increases monotonically with the maximum value z_{M} in the previous regime, and the bigger the value of z_{M}, the larger the range for the duration increase is. In addition, the forcing is also associated with the prediction rules for regime change. It not only makes transition conditions for positive and negative regimes different, but also determines the speed of decrease in length for reaching transition condition and the range of increase for duration in new regime.

Keywords: Lorenz map, regime change, forcing, prediction rule

PACS: 05.45.Ac, 05.45.−a **DOI:** 10.7498/aps.62.120507

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 40975031).

† Corresponding author. E-mail: zhanglif@yeah.net