

基于高增益降维观测器的一类混沌同步*

韩冬 朱芳来[†]

(同济大学电子与信息工程学院, 上海 200092)

(2013年1月11日收到; 2013年2月25日收到修改稿)

针对一类混沌系统, 当不满足观测器匹配条件时, 讨论了基于观测器的混沌同步及保密通讯问题. 通过设计辅助驱动信号, 使得观测器匹配条件得以满足. 为了处理辅助驱动信号中的未知变量, 使用高增益观测器作为近似微分器, 不仅给出了辅助驱动信号的估计值, 还给出了辅助驱动信号的微分估计值. 基于辅助驱动信号的估计值, 提出了一种能与非线性项和干扰影响解耦的降维观测器作为响应系统, 达到了与驱动系统的同步. 在同步的基础上, 再基于辅助驱动信号及其微分的估计值, 提出了一种保密信息还原的方法. 最后, 针对 Rössler 系统进行仿真, 仿真结果表明所提出的方法是有效的.

关键词: 辅助驱动信号, 混沌同步, 降维观测器, 保密通讯

PACS: 05.45.Vx, 05.45.Pq, 05.45.Gg

DOI: 10.7498/aps.62.120513

1 引言

自从 Lorenz 在 1963 年发现了第一个混沌吸引子以来, 混沌系统就引起了学术界和工业界的广泛兴趣. 混沌系统是一种特殊的非线性系统, 它具有初值敏感性、参数波动性、状态轨迹具有吸引子和系统维数通常较低等特点. 因为混沌系统的特性, 所以混沌同步和基于混沌同步的安全通讯一直都是研究的热点.

由于基于观测器的混沌同步方法具有可靠性高、易于实现等优点, 到目前为止, 已经有很多基于观测器的混沌同步方法问世^[1-18]. 文献 [1] 针对改进的超混沌 Lü 系统, 通过设计观测器, 实现了对改进的超混沌 Lü 系统的同步控制. 文献 [3] 针对一类不确定混沌系统, 提出了鲁棒自适应反步递推的同步方法; 通过使用模糊干扰观测器, 可以估计出包含系统不确定性和外部干扰在内的未知因素, 这样不需要任何未知因素的先验信息; 使用未知因素的估计值, 保证了伴有不确定混沌系统在一致最终有界意义上的全局同步. 文献 [4] 针对一类切换混沌系统, 基于 Lyapunov 稳定性理论和 LMI 以

LME 优化手段, 可以设计出输出反馈控制器以保证切换主从系统的同步, 并使用混沌加密技术用于传输信息. 文献 [5] 针对一类泛 Lorenz 系统, 提出了一种简单的降维观测器方法, 虽然不需要系统输出的微分信息, 但是原系统的状态变量必须是有界的, 通过选择恰当的参数, 观测误差将以指数形式收敛. 针对一类伴有未知输入的不确定混沌系统, 文献 [10] 提出了自适应同步方法, 未知输入也可以近似重构.

在基于混沌的安全通讯中, 有效信息被注入驱动系统, 参与在发送端产生混沌信号, 接收端通过接收发送端的传输信号可以同步发送端, 并还原有效信息信号. 近来, 文献 [2, 7, 9—12, 14] 提出了很多基于混沌的安全通讯方法. 文献 [9] 使用了等价控制的概念, 提出了一种新的安全通讯模式; 文献 [10] 则基于自适应观测器同步方法调制参数实现保密通讯, 并证明了当干扰和参数不协调时该方法的鲁棒性.

在以上提及的基于观测器的混沌同步和安全通讯方法^[1-18] 中, 前提条件是混沌系统的不变零点位于复平面的左半开平面, 且同时满足观测器匹

* 国家自然科学基金(批准号: 61074009)、高等学校博士学科点专项科研基金(批准号: 20110072110015)、广西制造系统与先进制造技术重点实验室(批准号: PF110289)和上海市重点学科项目(批准号: B004)资助的课题.

[†] 通讯作者. E-mail: zhufanglai@tongji.edu.cn

配条件^[19]. 比如, 在观测器匹配条件满足的情况下, 文献[15]基于自适应观测器, 分析了自适应混沌同步的性能; 文献[16]探讨了观测器匹配条件满足的情况下, 多值映射的Lur系统的状态观测器设计问题. 通常来说, 匹配条件对于混沌同步是一个方便的条件, 因为许多自适应、鲁棒和未知信息还原都可以在这个假设下轻松解决. 但是对许多混沌系统来说, 匹配条件是比较苛刻的. 如何突破观测器匹配条件的限制, 又充分运用传统的基于观测器的混沌同步方法带来的便利, 是一个值得考虑的问题. 通过设计辅助驱动信号向量, 可以使得匹配条件得以满足. 但是, 这种向量既包含原驱动信号, 也包含部分不可测变量. 基于原系统的驱动信号, 我们使用高增益观测器来获取辅助驱动信号及其微分估计值. 通过使用辅助驱动信号的估计值, 提出了一种降维观测器设计方法用于跟踪驱动系统的状态, 最后通过使用驱动系统的状态、辅助驱动信号及其微分的估计值, 提出了基于混沌的安全通讯, 并给出了有效信息的还原方法.

本文由七个部分组成: 第一部分介绍了基于观测器的混沌同步和安全通讯的研究动态; 第二部分给出了一类混沌系统的一般表达形式, 针对不满足匹配条件的混沌系统, 通过构造辅助驱动信号使得匹配条件得以满足, 提出了一种基于降维观测器的混沌同步的方法; 由于辅助驱动信号含有部分不可测变量, 第三部分使用高增益观测器来获取辅助驱动信号及其微分的估计值; 第四部分使用辅助驱动信号的估计值来构建降维观测器进行混沌同步; 基于状态、辅助驱动信号及其微分的估计值, 第五部分提出了一种代数方法还原保密信息; 第六部分通过仿真结果证明了本文所提方法的有效性; 第七部分对本文进行了总结. 本文的贡献主要有两点: 一是使用高增益观测器, 不仅得到辅助驱动信号的估计值, 还可以得到其一阶微分的估计值, 这样可以直接使用辅助驱动信号的一阶微分的估计值来还原保密信息; 二是降维观测器只需观测部分状态, 减少了所需积分器的数目, 使得结构更简单、性能更稳定、物理上更易于实现.

2 驱动系统描述及背景知识

考虑具有如下形式的不确定混沌系统

$$\begin{cases} \dot{x} = \mathbf{A}x + \mathbf{B}[f(x) + s] + \mathbf{E}\eta, \\ y = \mathbf{C}x, \end{cases} \quad (1)$$

其中, $x \in \mathbb{R}^n$ 为状态向量, $y \in \mathbb{R}^p$ 为驱动信号向量, $s \in \mathbb{R}^m$ 为期待在接收端还原的有效信息, $f(x) \in \mathbb{R}^m$ 是非线性项, $\eta \in \mathbb{R}^q$ 为干扰向量. 系统矩阵 $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $\mathbf{E} \in \mathbb{R}^{n \times q}$ 和 $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{p \times n}$ 均为常矩阵, 矩阵 \mathbf{B} , \mathbf{E} 和 \mathbf{C} 均为满秩的. $f(\cdot) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ 是混沌系统中的非线性项, 可以假设其是连续的. 令 $\mathbf{R} = [\mathbf{B} \ \mathbf{D}]$, 不失一般性, 我们可以假设 $\text{rank}(\mathbf{R}) = m + q$ 且 $m + q \leq p \leq n$.

许多系统都可以写成(1)的形式, 例如 Liu 系统

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a(x_2 - x_1), \\ \dot{x}_2 = bx_1 - kx_1x_3, \\ \dot{x}_3 = -cx_3 + hx_1^2, \end{cases}$$

当系统参数选择为 $a = 10$, $b = 40$, $k = 1$, $c = 2.5$ 和 $h = 4$ 时, 系统呈现混沌现象. 现假设 a 受到扰动 Δ_d 的影响. 此时, Liu 系统可以写成(1)式的形式, 其中

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -10 & 10 & 0 \\ 40 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2.5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{f}(x) = \begin{bmatrix} -x_1x_3 \\ 4x_1^2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \eta = \Delta_d(-x_1 + x_2)$$

文献[20]中的混沌 Lorenz 系统描述如下:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a(x_2 - x_1), \\ \dot{x}_2 = bx_1 - cx_2 - x_1x_3 + x_4, \\ \dot{x}_3 = -dx_3 + x_1x_2, \\ \dot{x}_4 = -kx_1, \end{cases}$$

当参数分别取 $a = 35$, $b = 7$, $c = 12$, $d = 3$ 和 $k = 5$ 时, 以上系统呈现混沌特性. 此时, Lorenz 混沌系统可以写成(1)式的形式:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -35 & 35 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ -5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.5 & 0.05 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}(x) = \begin{bmatrix} -x_1x_3 \\ x_1x_2 \end{bmatrix}, \quad \eta = \Delta_k x_1,$$

其中, 参数 k 受到 Δ_k 的影响.

文献 [21] 中描述的 Rössler 混沌系统如下:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2 - x_3, \\ \dot{x}_2 = x_1 + ax_2 + x_4, \\ \dot{x}_3 = b + x_1 x_3, \\ \dot{x}_4 = -cx_3 + dx_4, \end{cases}$$

当参数分别取 $a = -0.25, b = 3, c = 0.5$ 和 $d = 0.05$ 时, 以上系统呈现混沌特性. 参数 c 和 d 受到 Δ_c 和 Δ_d 的影响. Rössler 混沌系统可以写成 (1) 式的形式:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -0.25 & 0 & 1 \\ -5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.5 & 0.05 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{B} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

$$\mathbf{f}(x) = x_1 x_3 + 3, \quad \eta = \Delta_c x_3 + \Delta_d x_4.$$

系统 (1) 称为驱动系统. 为设计出响应系统来同步驱动系统, 现做如下假设.

假设 1 $\{\mathbf{A}, \mathbf{C}, \mathbf{R}\}$ 的不变零点都位于复平面的左半开平面.

假设 2 系统状态 $x(t)$, 有效信息 $s(t)$ 和未知干扰 $\eta(t)$ 均范数有界.

假设 3 非线性项 $\mathbf{f}(x)$ 为 Lipschitz 函数, 对任意的 $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$, 存在正数 L_f 使得

$$\|\mathbf{f}(x_1) - \mathbf{f}(x_2)\| \leq L_f \|x_1 - x_2\|$$

成立.

注 1 当 $\text{rank}(\mathbf{R}) = \text{rank}(\mathbf{CR})$ 成立时, 称驱动系统 (1) 满足观测器匹配条件. 在假设 1 和观测器匹配条件满足的前提下, 提出了很多混沌同步设计方法 [1-16]. 一方面, 匹配条件的满足为混沌同步设计方法带来了极大的便利; 但另一方面, 观测器匹配条件是一个很强的限制条件. 如何突破匹配条件的限制, 同时又利用该条件满足下的设计便利, 是一个值得考虑的问题. 本文的主要目的是研究在系统不满足匹配条件的情况下, 实现混沌同步和保密通讯.

在给出辅助驱动信号的设计方法前, 我们先给出相关度的概念.

定义 1^[19] 定义驱动系统 (1) 的第 i 个输出 y_i 关于非线性项 $\mathbf{f}(x)$ 和干扰 η 的相关度为使得

$$\begin{cases} \mathbf{C}_i \mathbf{A}^k \mathbf{R} = 0 & (k = 0, \dots, r_i - 2), \\ \mathbf{C}_i \mathbf{A}^{r_i-1} \mathbf{R} \neq 0, \\ i = 1, 2, \dots, p, \end{cases}$$

成立的最小正整数 r_i , 其中, \mathbf{C}_i 是 \mathbf{C} 的第 i 个行向量.

我们可以选择 γ_i ($1 \leq \gamma_i \leq r_i, i = 1, 2, \dots, p$), 使得如下构造的辅助驱动矩阵 \mathbf{C}_a 满足匹配条件, 即 $\text{rank}(\mathbf{R}) = \text{rank}(\mathbf{C}_a \mathbf{R})$, 其中,

$$\mathbf{C}_a = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{a1} \\ \vdots \\ \mathbf{C}_{ai} \\ \vdots \\ \mathbf{C}_{ap} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{\gamma \times n}, \quad \mathbf{C}_{ai} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_i \\ \mathbf{C}_i \mathbf{A} \\ \vdots \\ \mathbf{C}_i \mathbf{A}^{\gamma_i-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{\gamma_i \times n}$$

$$\text{且 } \gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_p.$$

引理 1^[19] $\{\mathbf{A}, \mathbf{C}, \mathbf{R}\}$ 的不变零点和 $\{\mathbf{A}, \mathbf{C}_a, \mathbf{R}\}$ 的不变零点相同.

引理 1 表明假设 1 对于 $\{\mathbf{A}, \mathbf{C}_a, \mathbf{R}\}$ 依然成立, 即 $\{\mathbf{A}, \mathbf{C}_a, \mathbf{R}\}$ 的不变零点都位于复平面的左半开平面. 现在考虑带有辅助驱动信号的新系统:

$$\begin{cases} \dot{x} = \mathbf{A}x + \mathbf{R}\omega(x, t), \\ y_a = \mathbf{C}_a x, \end{cases} \quad (2)$$

其中, $\omega(x, t) = \begin{bmatrix} \mathbf{f}(x) + s \\ \eta \end{bmatrix}$, 显然函数 $\omega(x, t)$ 包含初始驱动系统的非线性项和有效信息, 以及未知干扰. 如果辅助驱动信号 y_a 可测, 则可以基于新系统 (2), 在观测器匹配条件满足的前提下使用传统的观测器方法设计响应系统, 用于对驱动系统的混沌同步.

通过史密斯正交变换, 存在可逆阵 $\mathbf{S} \in \mathbb{R}^{\gamma \times \gamma}$, 使得 $\mathbf{C}_a = \mathbf{S}\hat{\mathbf{C}}_a$, 其中 $\hat{\mathbf{C}}_a \in \mathbb{R}^{\gamma \times n}$, 且 $\hat{\mathbf{C}}_a \hat{\mathbf{C}}_a^T = I_\gamma$. 则 (2) 式可写为

$$\begin{cases} \dot{x} = \mathbf{A}x + \mathbf{R}\omega(x, t), \\ y_a = \mathbf{S}\hat{\mathbf{C}}_a x. \end{cases} \quad (3)$$

将 $\hat{\mathbf{C}}_a$ 扩展为 $n \times n$ 正交阵 $\mathbf{W} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{C}}_a \\ \mathbf{M} \end{bmatrix}$, 其中, $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{(n-\gamma) \times n}$. 通过等价变换 $\bar{x} = \mathbf{W}x$, (3) 式转

换为

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}} = \bar{A}\bar{x} + \bar{R}\omega(\bar{x}, t), \\ y_a = \bar{C}_a\bar{x}, \end{cases} \quad (4)$$

其中, $\bar{x} = \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix}$, $\bar{x}_1 \in \mathbb{R}^\gamma$, $\bar{A} = \mathbf{W}\mathbf{A}\mathbf{W}^T = \begin{bmatrix} \bar{A}_{11} & \bar{A}_{12} \\ \bar{A}_{21} & \bar{A}_{22} \end{bmatrix}$, $\bar{A}_{11} \in \mathbb{R}^{\gamma \times \gamma}$, $\bar{R} = \mathbf{W}\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \bar{R}_1 \\ \bar{R}_2 \end{bmatrix}$, $\bar{R}_1 \in \mathbb{R}^{\gamma \times q}$, $\bar{C}_a = \mathbf{S}\hat{C}_a\mathbf{W}^T = \mathbf{S}\begin{bmatrix} I_\gamma & 0 \end{bmatrix}$.

引理 2^[22] 当 $\{\mathbf{A}, \mathbf{C}_a, \mathbf{R}\}$ 的不变零点都位于复平面的左半开平面且 $\text{rank}(\mathbf{R}) = \text{rank}(\mathbf{C}_a \mathbf{R})$ 时, 则对于某些正定阵 $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, 存在 $\mathbf{L} \in \mathbb{R}^{n \times \gamma}$, $\mathbf{F} \in \mathbb{R}^{q \times \gamma}$ 以及正定阵 $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, 使得

$$\begin{cases} (\mathbf{A} - \mathbf{L}\mathbf{C}_a)^T \mathbf{P} + \mathbf{P}(\mathbf{A} - \mathbf{L}\mathbf{C}_a) = -2\mathbf{Q}, \\ \mathbf{R}^T \mathbf{P} = \mathbf{F}\mathbf{C}_a, \end{cases} \quad (5)$$

成立.

令 $\bar{\mathbf{Q}} = \mathbf{W}\mathbf{Q}\mathbf{W}^T$, $\bar{\mathbf{L}} = \mathbf{W}\mathbf{L}$, $\bar{\mathbf{P}} = \mathbf{W}\mathbf{P}\mathbf{W}^T$ 和 $\bar{\mathbf{F}} = \mathbf{F}$, 则 (5) 式可变形为

$$\begin{cases} (\bar{\mathbf{A}} - \bar{\mathbf{L}}\bar{\mathbf{C}}_a)^T \bar{\mathbf{P}} + \bar{\mathbf{P}}(\bar{\mathbf{A}} - \bar{\mathbf{L}}\bar{\mathbf{C}}_a) = -2\bar{\mathbf{Q}}, \\ \bar{\mathbf{R}}^T \bar{\mathbf{P}} = \bar{\mathbf{F}}\bar{\mathbf{C}}_a, \end{cases} \quad (6)$$

其中 $\bar{\mathbf{R}} = \mathbf{W}\mathbf{R}$, $\bar{\mathbf{C}}_a = \mathbf{C}_a\mathbf{W}^T$.

$\bar{\mathbf{P}}$ 和 $\bar{\mathbf{Q}}$ 可分块为 $\bar{\mathbf{P}} = \begin{bmatrix} \bar{P}_1 & \bar{P}_2 \\ \bar{P}_2^T & \bar{P}_3 \end{bmatrix}$ 和 $\bar{\mathbf{Q}} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_1 & \bar{Q}_2 \\ \bar{Q}_2^T & \bar{Q}_3 \end{bmatrix}$, 其中, $\bar{P}_1 \in \mathbb{R}^{\gamma \times \gamma}$, $\bar{Q}_1 \in \mathbb{R}^{\gamma \times \gamma}$. 记 $\bar{\mathbf{K}} = \bar{P}_3^{-1}\bar{P}_2^T \in \mathbb{R}^{(n-\gamma) \times \gamma}$. 由 (6) 式的第二个方程, 可得

$$\begin{bmatrix} \bar{P}_1 & \bar{P}_2 \\ \bar{P}_2^T & \bar{P}_3 \end{bmatrix} \bar{\mathbf{R}} = \bar{\mathbf{C}}_a^T \bar{\mathbf{F}}^T = \begin{bmatrix} I_\gamma \\ 0 \end{bmatrix} \mathbf{S}^T \bar{\mathbf{F}}^T,$$

显然有 $\begin{bmatrix} \bar{P}_2^T & \bar{P}_3 \end{bmatrix} \bar{\mathbf{R}} = 0$, 两边左乘 P_3^{-1} , 得 $\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{K}} & I_{n-\gamma} \end{bmatrix} \bar{\mathbf{R}} = 0$.

通过等价变换 $z = \mathbf{T}\bar{x}$, 其中 $z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}$, 且 $z_1 \in \mathbb{R}^\gamma$, $z_2 \in \mathbb{R}^{n-\gamma}$, $\mathbf{T} = \begin{bmatrix} I_\gamma & 0 \\ \bar{\mathbf{K}} & I_{n-\gamma} \end{bmatrix}$. 则 (5) 式变换为

$$\begin{cases} \dot{z}_2 = (\bar{A}_{22} + \bar{\mathbf{K}}\bar{A}_{12})z_2 + [\bar{\mathbf{K}}(\bar{A}_{11} - \bar{A}_{12}\bar{\mathbf{K}}) \\ \quad + \bar{A}_{21} - \bar{A}_{22}\bar{\mathbf{K}}]S^{-1}y_a, \\ y_a = S z_1. \end{cases} \quad (7)$$

定理 1 如果 y_a 可测, 基于假设 1, 可以构建降维观测器如下:

$$\begin{cases} \dot{\hat{z}}_2 = (\bar{A}_{22} + \bar{\mathbf{K}}\bar{A}_{12})\hat{z}_2 + [\bar{\mathbf{K}}(\bar{A}_{11} - \bar{A}_{12}\bar{\mathbf{K}}) \\ \quad + \bar{A}_{21} - \bar{A}_{22}\bar{\mathbf{K}}]S^{-1}y_a, \\ \hat{x} = \mathbf{W}^T \begin{bmatrix} S^{-1}y_a \\ \hat{z}_2 - \bar{\mathbf{K}}S^{-1}y_a \end{bmatrix}, \end{cases} \quad (8)$$

降维观测器 (8) 式可以渐近跟踪驱动系统 (1) 式的状态.

证明 (7) 式的第一个方程减去 (8) 式的第一个方程, 可得状态误差方程

$$\dot{\tilde{z}}_2 = (\bar{A}_{22} + \bar{\mathbf{K}}\bar{A}_{12})\tilde{z}_2, \quad (9)$$

其中, $\tilde{z}_2 = z_2 - \hat{z}_2$. 注意到 $\bar{\mathbf{C}}_a = \begin{bmatrix} S & 0 \end{bmatrix}$, 可以发现 (6) 式的第一个方程的分块形式为

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} * & * \\ * & (\bar{A}_{22} + \bar{\mathbf{K}}\bar{A}_{12})^T \bar{P}_3 + \bar{P}_3 (\bar{A}_{22} + \bar{\mathbf{K}}\bar{A}_{12}) \end{bmatrix} \\ & = -2 \begin{bmatrix} \bar{Q}_1 & \bar{Q}_2 \\ \bar{Q}_2^T & \bar{Q}_3 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

所以有

$$(\bar{A}_{22} + \bar{\mathbf{K}}\bar{A}_{12})^T \bar{P}_3 + \bar{P}_3 (\bar{A}_{22} + \bar{\mathbf{K}}\bar{A}_{12}) = -2\bar{Q}_3, \quad (10)$$

方程 (10) 是 Lyapunov 方程, 则 $\bar{A}_{22} + \bar{\mathbf{K}}\bar{A}_{12}$ 是稳定的. 所以, 观测器动态误差 (9) 式在零平衡点处是渐近稳定的, 即 $\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{z}_2 = 0$. 基于估计值 \hat{z}_2 , 可得原系统的状态估计为

$$\hat{x} = \mathbf{W}^T \mathbf{T}^{-1} \hat{z} = \mathbf{W}^T \begin{bmatrix} S^{-1}y_a \\ \hat{z}_2 - \bar{\mathbf{K}}S^{-1}y_a \end{bmatrix}.$$

3 辅助驱动信号及其导数估计

基于 y_a 是驱动信号的前提下, 定理 1 给出了基于降维观测器的系统状态同步, 但事实上驱动信号是 y , 而不是 y_a . 辅助输出 y_a 除了包含 y , 还包含有一部分人为构造的未知变量. 为了处理这种情况, 我们将设计一种高增益观测器, 不仅可以估计 y_a , 还可以估计 \dot{y}_a . 然后使用 y_a 的估计值取代 y_a 去设计降维观测器.

对 $y_{ai} = C_{ai}x$ ($i = 1, 2, \dots, p$) 关于 t 微分得

$$\begin{cases} \dot{y}_{ai,1} = y_{ai,2}, \\ \vdots \\ \dot{y}_{ai,\gamma_i-1} = y_{ai,\gamma_i}, \\ \dot{y}_{ai,\gamma_i} = \phi_{i1}(x, \omega), \end{cases} \quad (11)$$

其中, $\phi_{i1}(x, \omega) = C_i A^{\gamma_i} x + C_i A^{\gamma_i-1} R \omega(x, t)$.

为了能够得到 y_{ai} 的微分估计值, 引入一个新的变量 $y_{ai,\gamma_i+1} = \phi_{i1}(x, \omega)$, 可得 $\dot{y}_{ai,\gamma_i+1} = \phi_{i2}(x, \omega, \dot{\omega})$, 其中, $\phi_{i2}(x, \omega, \dot{\omega}) = C_i A^{\gamma_i-1} (A^2 x + A R \omega + R \dot{\omega})$. 通过引入新的变量 y_{ai,γ_i+1} , 可得 (11) 式的扩展系统如下:

$$\begin{cases} \dot{y}_{ai,1} = y_{ai,2}, \\ \vdots \\ \dot{y}_{ai,\gamma_i} = y_{ai,\gamma_i+1}, \\ \dot{y}_{ai,\gamma_i+1} = \phi_{i2}(x, \omega, \dot{\omega}), \end{cases}$$

因为 $y_i = y_{ai,1}$, 是直接可测的. 所以, 可得 y_{ai} 的扩展状态方程为

$$\begin{cases} \dot{y}_{vi} = \Lambda_i y_{vi} + b_i \phi_{i2}(x, \omega, \dot{\omega}), \\ y_i = m_i y_{vi}, \end{cases} \quad (12)$$

其中,

$$y_{vi} = \begin{bmatrix} y_{ai,1} \\ \vdots \\ y_{ai,\gamma_i} \\ y_{ai,\gamma_i+1} \end{bmatrix}, \quad \Lambda_i = \begin{bmatrix} 0 & I_{\gamma_i} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(\gamma_i+1) \times (\gamma_i+1)},$$

$b_i = \begin{bmatrix} 0_{\gamma_i \times 1} \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{\gamma_i+1}$, $m_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{\gamma_i+1}$.

假定 $y_{vi,j}$ 满足 $|y_{vi,j}| \leq d_{i,j}$, 其中 $d_{i,j}$ 为常数, $1 \leq j \leq \gamma_i + 1$. 对于 (12) 式, 设计如下高增益观测器

$$\dot{\hat{y}}_{vi} = \Lambda_i \hat{y}_{vi} + \mathbf{L}_i (y_i - m_i \hat{y}_{vi}), \quad (13)$$

其中,

$$\mathbf{L}_i = \begin{bmatrix} \beta_{i,1}/\theta & \beta_{i,2}/\theta^2 & \dots & \beta_{i,\gamma_i+1}/\theta^{\gamma_i+1} \end{bmatrix}^T,$$

$$0 < \theta < 1, \quad \beta_i = \begin{bmatrix} \beta_{i,1} & \dots & \beta_{i,\gamma_i} & \beta_{i,\gamma_i+1} \end{bmatrix}$$

是 Hurwitz 的. 由 (12) 和 (13) 式可得

$$\dot{\hat{y}}_{vi} = \tilde{\Lambda}_i \tilde{y}_{vi} + b_i \phi_{i2}(x, \omega, \dot{\omega}), \quad (14)$$

其中, $\tilde{y}_{vi} = y_{vi} - \hat{y}_{vi}$,

$$\tilde{\Lambda}_i = \Lambda_i - L_i m_i = \begin{bmatrix} -\beta_{i,1}/\theta & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -\beta_{i,2}/\theta^2 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\beta_{i,\gamma_i}/\theta^{\gamma_i} & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -\beta_{i,\gamma_i+1}/\theta^{\gamma_i+1} & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}.$$

令 $\zeta_{i,j} = \tilde{y}_{ai,j}/\theta^{\gamma_i-j}$ ($j = 1, \dots, \gamma_i, \gamma_i + 1$), 有 $\tilde{y}_{ai,j} = \theta^{\gamma_i-j} \zeta_{i,j}$, $\dot{\tilde{y}}_{ai,j} = \theta^{\gamma_i-j} \dot{\zeta}_{i,j}$, 从而可得

$$\dot{\tilde{y}}_{vi} = G_{vi} \zeta_{vi}, \quad (15)$$

其中,

$$G_{vi} = \text{diag} \{ \theta^{\gamma_i+1}, \dots, \theta, 1 \},$$

$$\zeta_{vi} = \begin{bmatrix} \zeta_{i,1} & \dots & \zeta_{i,\gamma_i} & \zeta_{i,\gamma_i+1} \end{bmatrix}^T.$$

以下引理将有助于分析响应系统的性能.

引理 3^[23,24] 对于高增益观测器 (13) 式, 存在正数 $K_i > 0$ 以及有限时间 $T_i(\theta)$, 当 $t \geq t_0 + T_i(\theta)$ 时, 有 $\|\zeta_{vi}(t)\| \leq K_i \theta$, 此外, 有 $\lim_{\theta \rightarrow 0^+} T_i(\theta) = 0$.

当 $\gamma_i = 1$ 时, 有 $y_{ai} = y_i$, 是原系统的第 i 个输出量, 为可测量. 令

$$\hat{y}_v = \begin{bmatrix} \hat{y}_{v1} \\ \vdots \\ \hat{y}_{vp} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G}_v = \begin{bmatrix} G_1 & & \\ & \ddots & \\ & & G_p \end{bmatrix}, \quad \zeta_v = \begin{bmatrix} \zeta_1 \\ \vdots \\ \zeta_p \end{bmatrix},$$

由 (15) 式可得

$$\mathbf{y}_v - \hat{\mathbf{y}}_v = \mathbf{G}_v \zeta_v. \quad (16)$$

注意到 \mathbf{G}_v 的诱导型欧几里德范数为 1, 即 $\|\mathbf{G}_v\| = 1$. 当 $\gamma_i = 1$ 时, 令 $T_i(\theta) = 0, K_i = 0$. 由引理 1 知, 在有限时间 $T(\theta) = \max_{1 \leq i \leq p} T_i(\theta)$ 后, 有 $\|\zeta_v\| \leq K \theta$, 其中 $K = \sqrt{K_1^2 + K_2^2 + \dots + K_p^2}$, 此外, $\lim_{\theta \rightarrow 0^+} T(\theta) = 0$.

从 \hat{y}_{vi} 抽取部分元素可得新向量 \hat{y}_{ai} . 由 (15) 式可得 $\hat{y}_{ai} = y_{ai} - G_{ai} \zeta_{ai}$, 其中 $\hat{y}_{ai} = \begin{bmatrix} \hat{y}_{ai,1} & \dots & \hat{y}_{ai,\gamma_i} \end{bmatrix}^T$, $y_{ai} = \begin{bmatrix} y_{ai,1} & \dots & y_{ai,\gamma_i} \end{bmatrix}^T$, $G_{ai} = \text{diag} \{ \theta^{\gamma_i}, \dots, \theta, 1 \}$, $\zeta_{ai} = \begin{bmatrix} \zeta_{i,1} & \dots & \zeta_{i,\gamma_i} \end{bmatrix}^T$. 从而有

$$\hat{y}_a = \mathbf{y}_a - G_a \zeta_a, \quad (17)$$

$$\text{其 中, } \hat{y}_a = \begin{bmatrix} \hat{y}_{a1} \\ \vdots \\ \hat{y}_{ap} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y}_a = \begin{bmatrix} y_{a1} \\ \vdots \\ y_{ap} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G}_a =$$

$$\begin{bmatrix} G_{a1} & & \\ & \ddots & \\ & & G_{ap} \end{bmatrix}, \zeta_a = \begin{bmatrix} \zeta_{a1} \\ \vdots \\ \zeta_{ap} \end{bmatrix},$$

而 G_a 的诱导型
欧几里德范数也为 1, 即 $\|G_a\| = 1$.

从 \hat{y}_{vi} 抽取部分元素可得新向量 \hat{y}_{di} , 使得 $\hat{y}_{di} = y_{di} - G_{di}\zeta_{di}$ 成立, 其中, $\hat{y}_{di} = [\hat{y}_{ai,2} \cdots \hat{y}_{ai,\gamma+1}]^T$, $y_{di} = [y_{ai,2} \cdots y_{ai,\gamma+1}]^T$, $G_{di} = \text{diag}\{\theta^{\gamma+1}, \dots, \theta\}$, $\zeta_{di} = [\zeta_{i,2} \cdots \zeta_{i,\gamma+1}]^T$.
从而有

$$\hat{y}_d = \dot{y}_a - G_d \zeta_d, \quad (18)$$

其中,

$$\begin{aligned} \hat{y}_d &= \begin{bmatrix} \hat{y}_{d1} \\ \vdots \\ \hat{y}_{dp} \end{bmatrix}, \quad \dot{y}_a = \begin{bmatrix} \dot{y}_{a1} \\ \vdots \\ \dot{y}_{dp} \end{bmatrix}, \\ G_d &= \begin{bmatrix} G_{d1} & & \\ & \ddots & \\ & & G_{dp} \end{bmatrix}, \quad \zeta_d = \begin{bmatrix} \zeta_{d1} \\ \vdots \\ \zeta_{dp} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

因为 $0 < \theta < 1$, 所以有 $\|G_d\| \leq 1$. 显然, 当 $t \geq t_0 + T(\theta)$ 时, 有

$$\|\zeta_a\| \leq K\theta, \quad \|\zeta_d\| \leq K\theta. \quad (19)$$

注 2 为了减轻高增益带来的峰值现象, 对高增益观测器所得的估计值进行饱和化处理^[25]. 当 $\gamma_i > 1$ 时, 有 $y_{vi}^s = [y_{ai,1}^s \cdots y_{ai,\gamma+1}^s]^T = [Y_{i,1} \text{sat}(\hat{y}_{ai,1}/Y_{i,1}) \cdots Y_{i,\gamma+1} \text{sat}(\hat{y}_{ai,\gamma+1}/Y_{i,\gamma+1})]^T$, 其中, $Y_{i,j} > d_{i,j}$, $1 \leq j \leq \gamma+1$; 当 $\gamma_i = 1$ 时, 有 $y_{ai}^s = y_i$. 由 (12) 式可得 $y_{ai}^s = [y_{ai,1}^s \cdots y_{ai,\gamma}^s]^T$, $y_{di}^s = [y_{ai,2}^s \cdots y_{ai,\gamma+1}^s]^T$. 可见, 使用高增益观测器不仅可以得到 y_{ai} 的估计值 y_{ai}^s , 还可以得到 \dot{y}_{ai} 的估计值 y_{di}^s , 从而可得 y_a 和 \dot{y}_a 的估计值 $y_a^s = [y_{a1}^s \ y_{a2}^s \ \cdots \ y_{ap}^s]^T$ 和 $y_d^s = [y_{d1}^s \ y_{d2}^s \ \cdots \ y_{dp}^s]^T$.

由 (16) 式可知, 当 $t \geq t_0 + T(\theta)$ 时, 有 $\|y_v - \hat{y}_v\| \leq \|G_v\| \|\zeta_v\| \leq K\theta$. 存在常数 θ_1 , 使得当 $\|y_v - y_v^s\| \leq K\theta_1$ 时, y_v^s 没有被饱和处理, 即 $y_v^s = \hat{y}_v$. 这样的话, 我们可以选择 $\theta_2 = \min\{\theta_1, 1\}$, 使得当 $t \geq t_0 + T(\theta)$ 且 $\theta \in (0, \theta_2)$ 时, 有 $\|\zeta_v\| \leq K\theta$, $y_v^s = \hat{y}_v$.

4 混沌同步

在这一部分, 我们使用 y_a^s 代替 (8) 式中的 y_a , 设计基于以下降维观测器的响应系统来同步驱动系统 (1)

$$\begin{cases} \dot{\hat{z}}_2^s = (\bar{A}_{22} + \bar{K}\bar{A}_{12})\hat{z}_2^s + [\bar{K}(\bar{A}_{11} - \bar{A}_{12}\bar{K}) \\ \quad + \bar{A}_{21} - \bar{A}_{22}\bar{K}]S^{-1}y_a^s, \\ \hat{x}^s = \mathbf{W}^T \begin{bmatrix} S^{-1}y_a^s \\ \hat{z}_2^s - \bar{K}S^{-1}y_a^s \end{bmatrix}, \end{cases} \quad (20)$$

由 (7) 和 (20) 式, 得状态估计误差方程为

$$\begin{aligned} \dot{\hat{z}}_2^s &= (\bar{A}_{22} + \bar{K}_a\bar{A}_{12})\hat{z}_2^s + [\bar{K}_a(\bar{A}_{11} - \bar{A}_{12}\bar{K}_a) + \bar{A}_{21} \\ &\quad - \bar{A}_{22}\bar{K}_a]S^{-1}(y_a - y_a^s), \end{aligned} \quad (21)$$

其中, $\hat{z}_2^s = z_2 - \hat{z}_2^s$.

定理 2 对于驱动系统 (1), 设计伴有高增益观测器 (13) 式的降维观测器 (20) 式, 当 $\theta \in (0, \theta_2)$ 时, \hat{z}_2^s 是一致最终有界的. 此外, 当 $t \geq T_f(\theta)$ 时, 有 $\|\hat{z}_2^s\| \leq k(\theta)$, 其中, $T_f(\theta)$ 是有限时间, $k(\theta) = \frac{\beta\theta}{\mu} \sqrt{\frac{2}{\lambda_{\min}(\bar{P}_3)}}$, 且 $\mu > 0$, $\beta > 0$.

证明 当 $t \geq t_0 + T(\theta)$ 时, 因为 $y_a^s = \hat{y}_a$, 所以有 $y_a^s = y_a - G\zeta$, 则误差方程 (21) 为

$$\begin{aligned} \dot{\hat{z}}_2^s &= (\bar{A}_{22} + \bar{K}\bar{A}_{12})\hat{z}_2^s + [\bar{K}(\bar{A}_{11} - \bar{A}_{12}\bar{K}) \\ &\quad + \bar{A}_{21} - \bar{A}_{22}\bar{K}]S^{-1}G_a\zeta_a. \end{aligned} \quad (22)$$

考虑 Lyapunov 函数 $V = \frac{1}{2}\hat{z}_2^s \bar{P}_3 \hat{z}_2^s$. 对 V 求导, 由 (22) 式可得

$$\begin{aligned} \dot{V} &= -\hat{z}_2^s \bar{Q}_3 \hat{z}_2^s + \hat{z}_2^s \bar{P}_3 [\bar{K}(\bar{A}_{11} - \bar{A}_{12}\bar{K}) + \bar{A}_{21} \\ &\quad - \bar{A}_{22}\bar{K}]S^{-1}G_a\zeta_a \\ &\leq -\lambda_{\min}(\bar{Q}_3) \|\hat{z}_2^s\|^2 + \|\bar{P}_3 [\bar{K}(\bar{A}_{11} - \bar{A}_{12}\bar{K}) \\ &\quad + \bar{A}_{21} - \bar{A}_{22}\bar{K}]S^{-1}\| \|G_a\zeta_a\| \|\hat{z}_2^s\|. \end{aligned}$$

当 $t \geq t_0 + T(\theta)$ 时, 由 (19) 式可得 $\|G_a\zeta_a\| = \|G_a\| \|\zeta_a\| \leq K\theta$, 从而有

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq -\frac{\lambda_{\min}(\bar{Q}_3)}{\lambda_{\max}(\bar{P}_3)} \lambda_{\max}(\bar{P}_3) \|\hat{z}_2^s\|^2 \\ &\quad + \frac{\|\bar{P}_3 [\bar{K}(\bar{A}_{11} - \bar{A}_{12}\bar{K}) + \bar{A}_{21} - \bar{A}_{22}\bar{K}]S^{-1}\| K\theta}{\sqrt{\lambda_{\min}(\bar{P}_3)}} \\ &\quad \times \sqrt{\lambda_{\min}(\bar{P}_3)} \|\hat{z}_2^s\| \\ &\leq -2 \frac{\lambda_{\min}(\bar{Q}_3)}{\lambda_{\max}(\bar{P}_3)} V \end{aligned}$$

$$+\frac{\sqrt{2}\mathbf{K}\|\bar{P}_3[\bar{\mathbf{K}}(\bar{A}_{11}-\bar{A}_{12}\bar{\mathbf{K}})+\bar{A}_{21}-\bar{A}_{22}\bar{\mathbf{K}}]\mathbf{S}^{-1}\|\theta}{\sqrt{\lambda_{\min}(\bar{P}_3)}}\times\sqrt{V}=-2\mu V+\beta\theta\sqrt{V}, \quad (23)$$

其中, $\mu=\frac{\lambda_{\min}(\bar{Q}_3)}{\lambda_{\max}(\bar{P}_3)}$,

$$\beta=\frac{\sqrt{2}\mathbf{K}\|\bar{P}_3[\bar{\mathbf{K}}(\bar{A}_{11}-\bar{A}_{12}\bar{\mathbf{K}})+\bar{A}_{21}-\bar{A}_{22}\bar{\mathbf{K}}]\mathbf{S}^{-1}\|}{\sqrt{\lambda_{\min}(\bar{P}_3)}}$$

由(23)式可得 $\dot{V}\leqslant-\mu V-\mu\sqrt{V}(\sqrt{V}-\rho)$, 其中, $\rho=\beta\theta/\mu$. 所以, 只要 $\sqrt{V}>\rho$, 即 $V>\rho^2$ 时, 有 $\sqrt{V}(\sqrt{V}-\rho)>0$. 当 $t\geqslant t_0+T(\theta)$ 时, 如果 $V(t_0+T(\theta))>\rho^2$ 且 $V>\rho^2$, 则 $\dot{V}\leqslant-\mu V$, 表示 $V(t)\geqslant e^{-\mu(t-t_0-T(\theta))}V(t_0+T(\theta))$. 这样, 可以找到有限时间 $T_f(\theta)$, 使得当 $t\geqslant t_0+T_f(\theta)$ 时, 有 $V\leqslant\rho^2$, 其中, $T_f(\theta)$ 是方程 $V(t_0+T(\theta))e^{-\mu[T_f(\theta)-T(\theta)]}=\rho^2$ 的解, 有 $T_f(\theta)=T(\theta)+\frac{1}{\mu}\ln(V(t_0+T(\theta))/\rho^2)$.

如果 $V(t_0+T(\theta))\leqslant\rho^2$, 当 $t\geqslant t_0+T(\theta)$ 时, 有 $V\leqslant\rho^2$, 我们可以选择 $T_f(\theta)=T(\theta)$. 所以, 存在有

限时间 $T_f(\theta)$ 使得当 $t\geqslant t_0+T_f(\theta)$ 时, 有 $V\leqslant\rho^2$, 从而可得 $\frac{1}{2}\lambda_{\min}(\bar{P}_3)\|\tilde{z}_2^s\|^2\leqslant V\leqslant\rho^2$, 所以 $\|\tilde{z}_2^s\|\leqslant k(\theta)$.

注 3 由定理 2 可知, 状态估计误差 \tilde{z}_2^s 在有限时间 $T_f(\theta)$ 后进入封闭的球 $\{\tilde{z}_2^s: \|\tilde{z}_2^s\|\leqslant k(\theta)\}$. 显然, 可以通过选择高增益参数 θ 调节封闭球的半径, 因为 $\lim_{\theta\rightarrow 0^+}k(\theta)=0$, 当 $\theta\rightarrow 0^+$ 时, 状态估计误差 \tilde{z}_2^s 收敛到起点. 总之, 状态估计误差 \tilde{z}_2^s 在半径大于 ρ 的闭合球体内是一致最终有界的.

5 信息重构

混沌同步的一个很重要的应用是安全通信领域. 在基于混沌的安全通信中, 通过将有效信息信号注入驱动系统, 构建发送端. 接收端可以同步驱动系统. 本文中, 驱动系统(1)为发送端, 基于高增益近似微分器的降维观测器为接收端. 图 1 给出了基于混沌的安全通信.

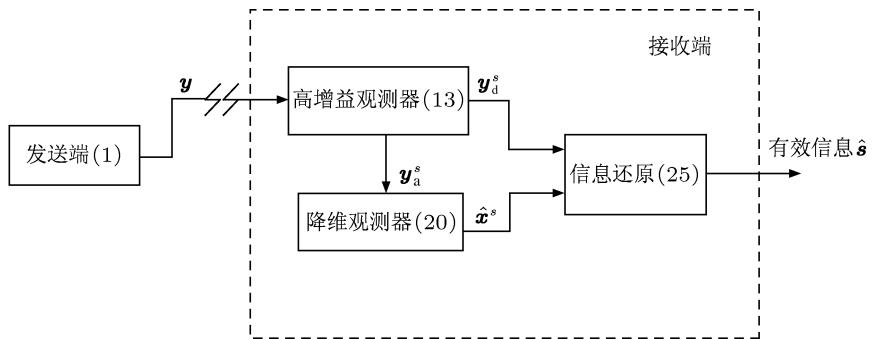


图 1 基于混沌的安全通讯机制

我们可以使用 y_a 及 \dot{y}_a 的估计 y_a^s 和 y_d^s 来还原有效信息 s . 因为 $\dot{y}_a=C_a\dot{x}=C_aAx+C_aR\omega(x,t)$ 且 C_aR 列满秩, 从而有 $\omega(x,t)=(C_aR)^+(\dot{y}_a-C_aAx)$, 其中, $(C_aR)^+=[(C_aR)^T(C_aR)]^{-1}(C_aR)^T$ 是 C_aR 的广义逆矩阵. 将有效信息 s 从 $\omega(x,t)$ 分离出来, 可得 $s=[I_m \ 0]\omega(x,t)-f(x)$, 则有效信息 s 的表达式为

$$s=[I_m \ 0](C_aR)^+(\dot{y}_a-C_aAx)-f(x). \quad (24)$$

定理 3 基于假设 1—3, 重构有效信息如下:

$$\hat{s}=[I_m \ 0](C_aR)^+(y_d^s-C_aA\hat{x}^s)-f(\hat{x}^s), \quad (25)$$

对 $\forall\delta>0$, 存在 $\theta>0$, 使得当 $t\geqslant t_0+T_f(\theta)$ 时, 有 $\|s-\hat{s}\|<\delta$ 成立.

证明 由(24)和(25)式可得

$$\begin{aligned} s-\hat{s} &= [I_m \ 0](C_aR)^+\left\{[(\dot{y}_a-y_d^s)-C_aA(x-\hat{x}^s)]\right. \\ &\quad \left.-[f(x)-f(\hat{x}^s)]\right\}. \end{aligned} \quad (26)$$

当 $t\geqslant t_0+T(\theta)$ 且 $\theta\in(0,\theta_2)$ 时, 有 $y_a^s=\hat{y}_a$ 和 $y_d^s=\hat{y}_d$, 结合(17)和(18)式, 可得 $\dot{y}_a-y_d^s=G_d\zeta_d$, $y_a-y_a^s=G_a\zeta_a$. 由(7)式, 可得

$$x=W^T\begin{bmatrix} S^{-1}y_a \\ z_2-\bar{K}S^{-1}y_a \end{bmatrix}. \quad (27)$$

由(27)和(8)式可得 $x-\hat{x}^s=(C_a^T-M^T\bar{K})S^{-1}G_a\zeta_a+M^T\tilde{z}_2^s$. 考虑(19)式和定理 1 有

$$\|x-\hat{x}^s\|=\|(C_a^T-M^T\bar{K})S^{-1}G_a\zeta_a\|$$

$$+ \|M^T \tilde{z}_2^s\| \leq \alpha \theta, \quad (28)$$

其中,

$$\alpha = K \| (C_a^T - M^T \bar{K}) S^{-1} \| + \frac{\beta \|M^T\|}{\mu} \sqrt{\frac{2}{\lambda_{\min}(\bar{P}_3)}}.$$

当 $t \geq t_0 + T(\theta)$, $\theta \in (0, \theta_2)$ 时, 则 (26) 式变为

$$\begin{aligned} & \|s - \hat{s}\| \\ &= \left\| \begin{bmatrix} I_m & 0 \end{bmatrix} (C_a R)^+ \left[\begin{bmatrix} \|\dot{y}_a - \dot{y}_d^s\| \\ + (\|C_a A\| + L_f) \|x - \hat{x}^s\| \end{bmatrix} \right] \right\| \\ &\leq \left\| \begin{bmatrix} I_m & 0 \end{bmatrix} (C_a R)^+ \left[[\|G_d \zeta_d\| + (\|C_a A\| + L_f) \alpha \theta] \right] \right\| \\ &= \left\| \begin{bmatrix} I_m & 0 \end{bmatrix} (C_a R)^+ \left[[K + (\|C_a A\| + L_f) \alpha] \theta \right] \right\|, \end{aligned} \quad (29)$$

因为 $T_f(\theta) \geq T(\theta)$, 当 $t \geq t_0 + T_f(\theta)$ 时, 有 (29) 式依然成立. 通过选择 $\theta \in (0, \theta_3)$, 使得当 $t \geq t_0 + T_f(\theta)$ 时, 有 $\|s - \hat{s}\| < \delta$, 其中,

$$\theta_3 = \min \left\{ \delta / \left\{ \left\| \begin{bmatrix} I_m & 0 \end{bmatrix} (C_a R)^+ \right\| [K + \alpha (\|C_a A\| + L_f)] \right\} \theta_2 \right\}.$$

6 仿真及分析

考虑一个 4 维的且带有一个非线性项的超混沌系统

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = ax_1 + bx_2, \\ \dot{x}_2 = x_1 - 0.1x_2x_3^2, \\ \dot{x}_3 = cx_2 + dx_3 + ex_4, \\ \dot{x}_4 = x_3 + fx_4, \end{cases}$$

当系统参数选择为 $a = 0.66$, $b = -1.2$, $c = -1$, $d = -1.2$, $e = -5$ 和 $f = 0.8$ 时, 系统呈现超混沌特性. 我们假定参数 c 受到干扰 $0.02 \sin t$ 的影响. 此时, 系统可以写成 (1) 式的形式如下:

$$A = \begin{bmatrix} 0.66 & -1.2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1.2 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 0.8 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

其中, 非线性项 $f(x) = -0.1x_2x_3^2$, 不确定参数干扰 $\eta = 0.02x_2 \sin t$, $R = [B \quad D]$. 设置有效信息为 $s = \sin t$.

易于检测 $\{A, C, R\}$ 满足假设 1, 但是 $\text{rank}(CR) < \text{rank}(R)$, 即不满足观测器匹配条件. 对 ω 来说, $r_1 = 1$, $r_2 = 2$, 取 $\gamma_1 = 1$, $\gamma_2 = 2$. 构建辅助输出矩阵和辅助输出如下:

$$C_a = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_2 A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0.66 & -1.2 & 1 & 0.8 \end{bmatrix},$$

$$y_a = C_a x = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_{a2,2} \end{bmatrix},$$

易验证 $\text{rank}(R) = \text{rank}(C_a R)$, 匹配条件得以满足. 我们发现 y_a 包含一个不可测变量 $y_{a2,2}$, 引入新变量 $y_{a2,3}$, 给出高增益观测器设计如下:

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{y}}_{a2,1} \\ \dot{\hat{y}}_{a2,2} \\ \dot{\hat{y}}_{a2,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{y}_{a2,1} \\ \hat{y}_{a2,2} \\ \hat{y}_{a2,3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta_{21}/\theta \\ \beta_{22}/\theta^2 \\ \beta_{23}/\theta^3 \end{bmatrix} (y_2 - \hat{y}_{a2,1}),$$

取 $\beta_{21} = 1$, $\beta_{22} = 2$, $\beta_{23} = 1$, $\theta = 0.01$; 设置初值为 $\hat{y}_{a2,1}(0) = 0.3$, $\hat{y}_{a2,2}(0) = 0.2$, $\hat{y}_{a2,3}(0) = 0.2$.

通过使用 Matlab 的 LMI 工具箱, 可使

$$Q = \begin{bmatrix} 32.83 & -25.67 & -20.74 & -20.87 \\ -25.67 & 32.43 & 0.35 & 2.77 \\ -20.74 & 0.35 & 35.63 & 31.04 \\ -20.87 & 2.77 & 31.04 & 28.50 \end{bmatrix},$$

$$P = \begin{bmatrix} 8.37 & -1.00 & -0.54 & 1.64 \\ -1.00 & 1.00 & 0 & 0 \\ -0.54 & 0 & 1.00 & 0.80 \\ 1.64 & 0 & 0.80 & 2.15 \end{bmatrix}$$

$$F = \begin{bmatrix} -1.00 & 0 & 0 \\ -1.20 & 0 & 1.00 \end{bmatrix},$$

$$L = \begin{bmatrix} 0 & -0.64 & 0 \\ -17.41 & -0.64 & 0 \\ -20.90 & -1.48 & 17.41 \\ 0 & 1.42 & 0 \end{bmatrix}$$

成立. 通过对 C_a 的正交化过程, 对状态向量和系统矩阵进行分块得

$$S = \begin{bmatrix} 1.4142 & 0 & 0 \\ 0.7071 & 1.2247 & 0 \\ 1.3152 & 0.4327 & 1.2643 \end{bmatrix},$$

$$\bar{A}_{11} = \begin{bmatrix} 0.43 & -0.44 & 0.38 \\ 0.83 & 0.61 & 0.81 \\ -0.16 & -3.39 & -1.43 \end{bmatrix},$$

$$\bar{A}_{12} = \begin{bmatrix} -0.50 \\ 0.29 \\ 0.88 \end{bmatrix},$$

$$\bar{A}_{21} = \begin{bmatrix} 1.36 & -2.96 & -2.01 \end{bmatrix},$$

$$K = \begin{bmatrix} 1.75 & 1.24 & -0.77 \end{bmatrix},$$

设置初值为 $z_2(0) = 0.12, \hat{z}_{2,1}(0) = 0.1$.

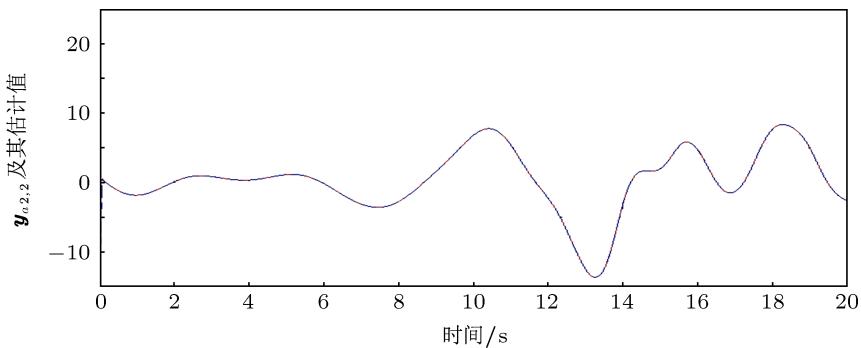


图 2 辅助驱动信号 $y_{a2,2}$ 及其估计值

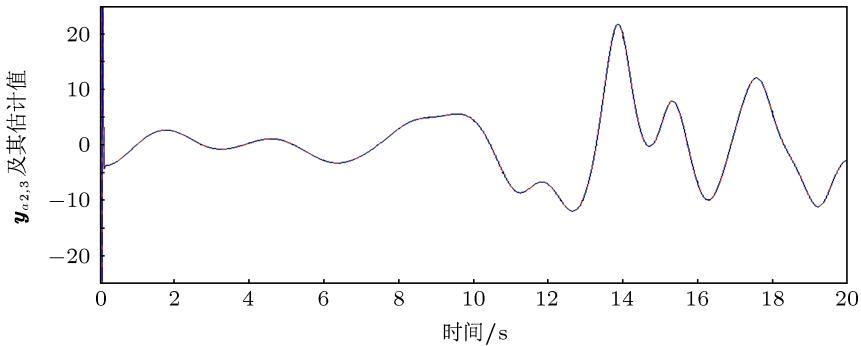


图 3 辅助驱动信号 $y_{a2,3}$ 及其估计值

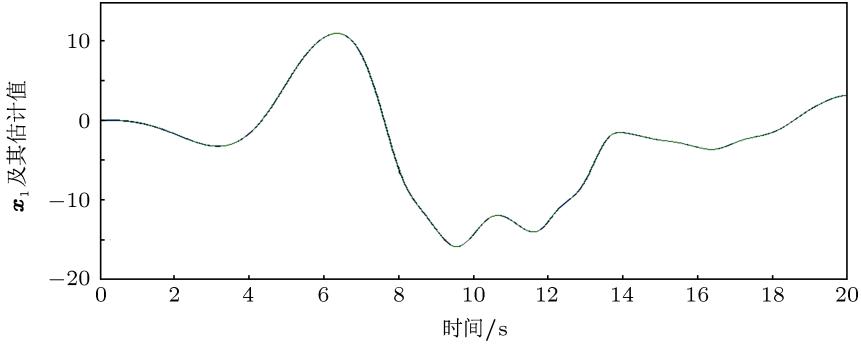


图 4 系统状态 x_1 及其估计值

图 2 和图 3 给出了辅助驱动信号及其估计, 图 4—7 给出了状态估计, 图 8 给出了有效信息信

号及其估计. 从图 2—8 可以看出估计效果是令人满意的.

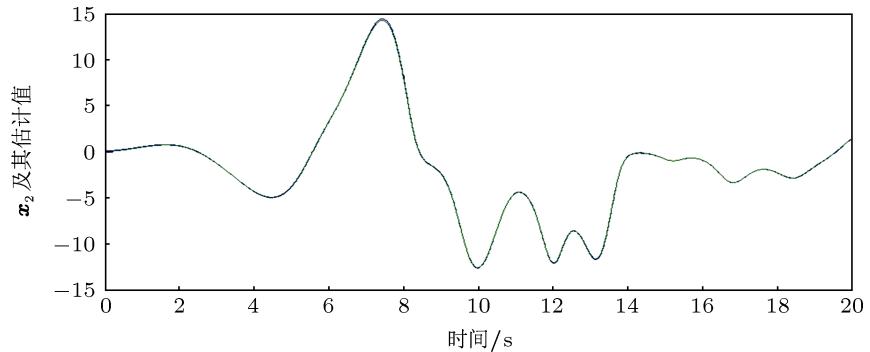


图 5 系统状态 x_2 及其估计值

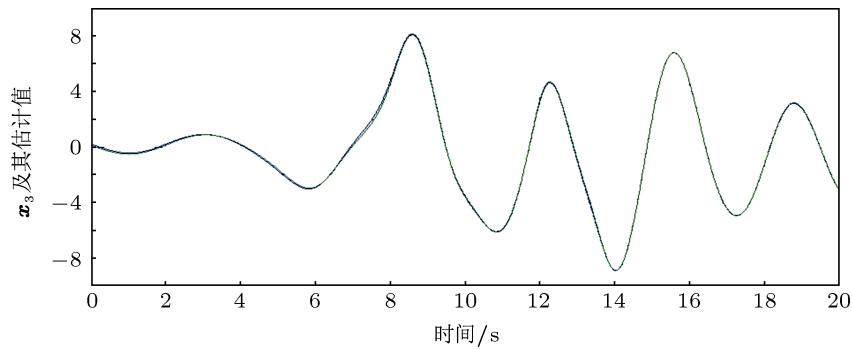


图 6 系统状态 x_3 及其估计值

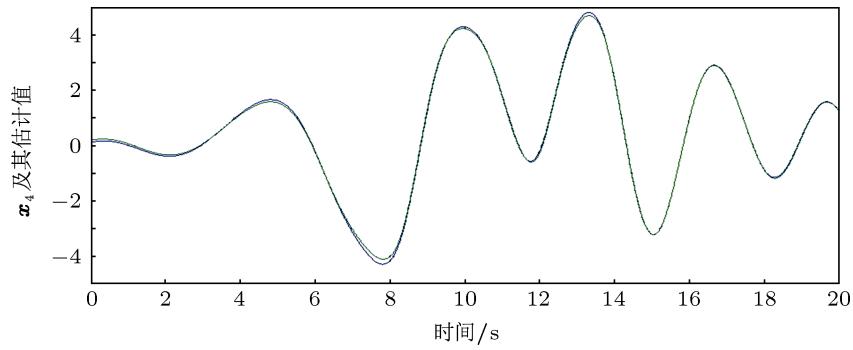


图 7 系统状态 x_4 及其估计值

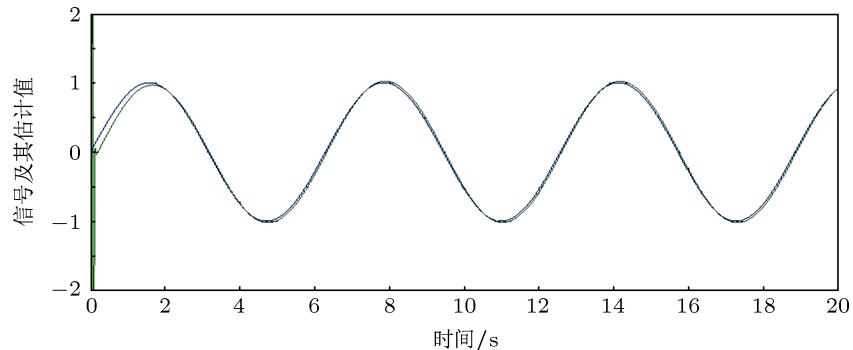


图 8 有效信息信号 $s = \sin(t)$ 及其重构

7 结 论

本文探讨了基于观测器的混沌同步和安全通信问题. 本文的优点是突破了观测器匹配条件的限制, 使用高增益观测器和降维观测器作为接收端,

并提出了一种代数方法还原有效信息. 信息还原不需要假设信息信号是恒值或者是缓时变的, 只需假设信息信号及其微分范数有界. 并且, 在信号还原时, 因为使用了高增益观测器得到系统输出微分的估计值, 所以不需要直接用到系统输出的微分信息.

-
- [1] Zheng W N, Luan H X, Lü J, Yue L J 2012 *J. Northeast Normal Univ. (Natural Science Edition)* **44** 72 (in Chinese) [郑文娜, 莲红霞, 吕晶, 岳丽娟 2012 东北师大学报 (自然科学版) **44** 72]
- [2] Zhu F 2008 *Phys. Lett. A* **372** 223
- [3] Ji D H, Jeong S C, Park J H, Won S C 2012 *Nonlinear Dyn.* **69** 1125
- [4] Zhang L W, Liao T L, Hou Y Y, Yan J J 2012 *Int. J. Bifurcat. Chaos* **22** 1250058
- [5] Zhang Z Q, Shao H Y, Wang Z, Shen H 2012 *Appl. Math. Comput.* **218** 7614
- [6] Guan X P, He Y H, Fan Z P 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 276 (in Chinese) [关新平, 何宴辉, 范正平 2003 物理学报 **52** 276]
- [7] Zhu F L, Xu J, Chen M Y 2012 *IEEE Circuits-I* **59** 2702
- [8] Gao T G, Chen Z Q, Yuan Z Z, Gu Q L 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 1305 (in Chinese) [高铁杠, 陈增强, 袁著祉, 顾巧论 2004 物理学报 **53** 1305]
- [9] Chen M, Zhou D, Shang Y 2005 *Chaos, Soliton. Fract.* **25** 573
- [10] Bowong S, Kakmeni F M M, Fotsin H 2006 *Phys. Lett. A* **355** 193
- [11] Zhu F L 2009 *Chaos, Soliton. Fract.* **40** 2384
- [12] Wang H, Zhu X, Gao S, Chen Z 2011 *Commun. Nonlinear Sci.* **16** 1517
- [13] Bowong S, Tewa J J 2008 *Math. Comput. Model.* **48** 1826
- [14] Chen M, Min W 2008 *Phys. Lett. A* **372** 1595
- [15] Fradkov A L, Andrievsky B, Evans R J 2008 *IEEE Circuits-I* **55** 1685
- [16] Brogliato B, Heemels W P M H 2009 *IEEE Trans. Automat. Control* **54** 1996
- [17] Fu S H, Pei L J 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 5985 (in Chinese) [付士慧, 裴利军 2010 物理学报 **59** 5985]
- [18] Wang X Y, Zhu Q L, Zhang X P 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 100510 (in Chinese) [王兴元, 朱全龙, 张晓鹏 2011 物理学报 **60** 100510]
- [19] Floquet T, Edwards C, Spurgeon S K 2007 *Int. J. Adapt. Control* **21** 638
- [20] Li Y 2010 *Nonlinear Anal.-Real.* **11** 713
- [21] Yan Z 2005 *Chaos* **15** 023902
- [22] Corless M, Tu J 1998 *Automatica* **34** 757
- [23] Mahmoud N A, Khalil H K 1996 *IEEE Trans. Automat. Control* **41** 1402
- [24] Kalsi K, Lian J, Hui S, Zak S H 2010 *Automatica* **46** 347
- [25] Esfandiari F, Khalil H K 1992 *Int. J. Control.* **56** 1007

High-gain reduced-order observer-based synchronization for a kind of uncertain chaotic system*

Han Dong Zhu Fang-Lai[†]

(College of Electronics and Information, Tongji University, Shanghai 200092, China)

(Received 11 January 2013; revised manuscript received 25 February 2013)

Abstract

In this paper we consider the issues of chaos synchronization and chaos-based secure communication when the so-called observer matching condition is not satisfied. An auxiliary drive signal vector is introduced such that the observer matching condition is satisfied. High-gain observers are employed to estimate the auxiliary drive signals as well as their derivatives in a finite time by using the drive signals of original system. Then, a kind of reduced-order observer is constructed which can directly eliminate the influence of the non-linear part and the disturbances of the system. Based on the estimates of states as well as the estimates of the auxiliary signals and their derivatives, a kind of message information recovery method is proposed. Finally, the Rössler chaotic system is used as a simulation example to verify the effectiveness of the proposed method.

Keywords: auxiliary drive signals, chaos synchronization, reduced-order observer, secure communication

PACS: 05.45.Vx, 05.45.Pq, 05.45.Gg

DOI: 10.7498/aps.62.120513

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 61074009), the Research Fund for the Doctoral Program of Higher Education of China (Grant No. 20110072110015), the Guangxi Key Laboratory of Manufacturing System and Advanced Manufacturing Technology, China (Grant No. PF110289), and the Shanghai Leading Academic Discipline Project, China (Grant No. B004).

† Corresponding author. E-mail: zhufanglai@tongji.edu.cn