

一类厄尔尼诺 - 南方涛动耦合振子动力学模型的 震荡近似解*

林万涛¹⁾ 林一骅¹⁾ 石兰芳²⁾ 莫嘉琪^{3)†}

1) (中国科学院大气物理研究所, 大气科学和地球流体力学数值模拟国家重点实验室, 北京 100029)

2) (南京信息工程大学数学与统计学院, 南京 210044)

3) (安徽师范大学数学计算机科学学院, 芜湖 241003)

(2013年2月14日收到; 2013年3月22日收到修改稿)

研究了一类厄尔尼诺和南方涛动 (ENSO) 耦合振子动力学模型. 利用奇摄动理论参数变值法和平均法, 得到了对应 ENSO 耦合振子模型方程的震荡近似解.

关键词: ENSO 振子, 奇摄动, 近似解

PACS: 02.30.Mv

DOI: 10.7498/aps.62.140202

1 引言

厄尔尼诺和南方涛动 (ENSO) 分别是发生在热带大气和海洋中的异常事件, 它严重地影响全球各地区气候和生态等方面的变化, 对它的规律的研究和预防为当前学术界所关注^[1-9]. 海洋和大气之间的交互作用影响着气候的波动, 这对种交互作用的研究已经集中在厄尔尼诺 - 南方涛动现象上, 它每隔 3 到 4 年周期地出现, 并主要发生在热带太平洋区域. 厄尔尼诺和南方涛动的振荡性态是海 - 气流动的正负两种反馈的结果, 这两种反馈决定了海表温度 (SST) 的变化, 并与南方涛动流动强度有关, 导致了弱信风沿着赤道行进. 弱信风驱动着海洋流动变化, 加强了 SST 的异常. 海洋 - 大气的正反馈与耦合的不稳定性导致了赤道太平洋温度变化, 因此需研究东、西太平洋振子模型的异常关系. 许多学者已使用不同的方法对 ENSO 局部和整体的性态做了多方位的讨论^[1-6]. 对于复杂的全球海 - 气耦合模型, 通过简化的海 - 气非线性相互作用物理过程得到的振子概念模型能更容易描述海 - 气耦合过

程的本质和物理机理, 从而能描述 ENSO 的某些重要物理现象. 因此许多学者提出了研究 ENSO 的各种振子形式的动力系统模型^[7-12], 如“时滞振子”, “平流 - 反射振子”, “西太平洋振子”, “充电 - 放电振子”等理论的研究. 本文研究一类 ENSO 海 - 气耦合振子震动动力学模型^[11]. 近来, 许多学者研究了非线性奇摄动问题, 一些近似方法被优化, 包括边界层法、平均化法、匹配近似展开方法和多重尺度法等^[13-17]. 作者等也利用摄动理论等方法研究了一类非线性问题^[18-30]. 本文是利用摄动理论来讨论一类 ENSO 海 - 气耦合振子.

2 ENSO 耦合振子模型

考虑如下 ENSO 耦合振子动力学模型^[7-9]:

$$\frac{dT}{dt} = CT + Dh - \varepsilon T^3, \quad (1)$$

$$\frac{dh}{dt} = -ET - R_h h, \quad (2)$$

其中 T 表示赤道东太平洋的 SST 距平, h 表示赤道西太平洋的温跃层厚度距平, C, D, E, R_h 表示正参

* 国家自然科学基金 (批准号: 41275062, 41175058, 11202106) 和中国科学院战略性先导科技专项 - 应对气候变化的碳收支认证及相关问题项目 (批准号: XDA01020304) 资助的课题.

† 通讯作者. E-mail: mojqiaqi@mail.ahnu.edu.cn

数, 它们的详细定义和物理意义参见文献 [7, 8], ε 为小的正参数. 本文是求 ENSO 耦合振子动力学模型 (1), (2) 的震荡近似解.

首先对方程 (1) 两边进行 $d/dt + R_h$ 运算, 考虑到 (2) 式, 当 $C > R_h, DE > CR_h$ 时, 可得

$$\frac{d^2T}{dt^2} + \mu \left(\frac{T^2}{T_c^2} - 1 \right) \frac{dT}{dt} + \omega_0^2 T = \varepsilon R_h T^3, \quad (3)$$

其中

$$\mu = C - R_h, \quad T_c^2 = \frac{C - R_h}{3\varepsilon}, \quad \omega_0^2 = DE - CR_h.$$

由 (3) 式, 对应的方程:

$$\frac{d^2T}{dt^2} + \mu \left(\frac{T^2}{T_c^2} - 1 \right) \frac{dT}{dt} + \omega_0^2 T = 0, \quad (4)$$

这就是 van der Pol 方程. 由 van der Pol 方程的性态知, 方程 (4) 当 $T < T_c$ 为负阻尼方程, 当 $T > T_c$ 为正阻尼方程. 此外, 方程 (4) 可改写为如下等价的平面系统:

$$\frac{dT}{dt} = U, \quad \frac{dU}{dt} = -\omega_0^2 T - \mu \left(\frac{T^2}{T_c^2} - 1 \right) U, \quad (5)$$

不难看出, 系统 (5) 有一个平衡态 $(T^*, U^*) = (0, 0)$. 其对应的特征方程和特征根为

$$\begin{aligned} \kappa^2 - \mu \kappa + \omega_0^2 &= 0, \\ \kappa &= \frac{1}{2} \left(\mu \pm \sqrt{\mu^2 - 4\omega_0^2} \right). \end{aligned}$$

由此可知^[11], 当 $\mu^2 < 4\omega_0^2$ 时, 即在弱阻尼的情况下, 平衡态 $(T^*, U^*) = (0, 0)$ 是一个不平衡的焦点; 当 $\mu^2 > 4\omega_0^2$ 时, 即在强阻尼的情况下, 平衡态 $(T^*, U^*) = (0, 0)$ 是一个不平衡的结点. 因此, 这时海-气耦合振子当气候稍有偏离平衡态时, 将会处于不稳定状态, 并且还不难看出, 当 $\mu = 0$ (无阻尼的情形), van der Pol 方程 (3) 是一个 Hamilton 系统. 当 ε 很小时, 在无阻尼情形时, 海表温度距将做周期振荡. 当 $\mu \neq 0$ 的情形, 在弱阻尼的条件下, 存在两个平衡态: 一个平衡态就是 $(T^*, U^*) = (0, 0)$, 便是不稳定的焦点; 另一个平衡态就是在相平面 (T, U) 上, 是一个闭合的极限环. 它是 van der Pol 方程在弱阻尼的情况下求得的孤立波周期解 (周期吸引子), 即当运动脱离平衡态后, 有可能进入一个周期的运动, 其周期为 $2\pi/\omega_0$ 的气候震荡状态.

3 ENSO 模型的振荡近似解

对于小的参数 ε , 在弱阻尼的条件下, 我们用 Krylov-Boglinbov 方法来求弱阻尼方程 (3) 振荡近

似解. 方程 (3) 可改写为

$$\frac{d^2T}{dt^2} + \omega_0^2 T = \varepsilon \left(3(\mu - T^2) \frac{dT}{dt} + \varepsilon R_h T^3 \right). \quad (6)$$

当参数 $\varepsilon = 0$ 时, 方程 (6) 的解为

$$T = a \cos(\omega_0 t + \phi), \quad (7)$$

其中 a, ϕ 为常数. 对于 $\varepsilon \neq 0$ 时, 我们采用广义的“常数变易法”. 将方程的解看作仍由方程 (6) 的形式, 但 a, ϕ 为时间 t 的函数, 且满足条件

$$\frac{dT}{dt} = -a\omega_0 \sin \psi, \quad \psi = \omega_0 t + \phi. \quad (8)$$

现对 (7) 式求导

$$\frac{dT}{dt} = \frac{da}{dt} \cos - a\omega_0 \sin \psi - a \frac{d\phi}{dt} \sin \psi. \quad (9)$$

比较 (8), (9) 式得

$$\frac{da}{dt} \cos \psi - a \frac{d\phi}{dt} \sin \psi = 0. \quad (10)$$

再对 (8) 式求导, 有

$$\frac{d^2T}{dt^2} = -a\omega_0^2 \cos \psi - \omega_0 \frac{da}{dt} \sin \psi - a\omega_0 \frac{d\phi}{dt} \cos \psi.$$

将上式代入方程 (6), 并考虑到 (7) 式, 得

$$\begin{aligned} \omega_0 \frac{da}{dt} \sin \psi + a\omega_0 \frac{d\phi}{dt} \cos \psi \\ = \varepsilon [3a\omega_0(\mu - a^2 \cos^2 \psi) \sin \psi + R_h a^3 \cos^3 \psi]. \end{aligned} \quad (11)$$

从 (10), (11) 式解出 $da/dt, d\phi/dt$, 得到

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} = -\frac{\varepsilon}{\omega_0} \sin \psi [3a\omega_0(\mu - a^2 \cos^2 \psi) \sin \psi \\ + R_h a^3 \cos^3 \psi], \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\phi}{dt} = -\frac{\varepsilon}{\omega_0} \cos \psi [3a\omega_0(\mu - a^2 \cos^2 \psi) \sin \psi \\ + R_h a^2 \cos^3 \psi]. \end{aligned} \quad (13)$$

为了解 (12), (13) 式, 注意到这些方程右边关于变量 ψ 是周期函数, 所以有

$$\frac{da}{dt} = O(\varepsilon), \quad \frac{d\phi}{dt} = O(\varepsilon).$$

因为 ε 是小量, a 和 ϕ 是时间 t 的慢变函数, 所以在时间周期 $2\pi/\omega_0$ 区间内它们的变化是很小的. 把这些方程右边的 a 和 ϕ 当作常数, 在一个周期 $[t, t + (2\pi/\omega_0)]$ 上求 (12), (13) 式的平均值, 得到

$$\frac{da}{dt} = -\frac{\varepsilon}{2\omega_0} f_1(a), \quad (14)$$

$$\frac{d\phi}{dt} = -\frac{\varepsilon}{2a\omega_0} g_1(a). \quad (15)$$

其中

$$f_1(a) = -\frac{\omega_0}{\pi} \int_0^{2\pi/\omega_0} \sin \psi [3a\omega_0(\mu - a^2 \cos^2 \psi) \times \sin \psi + R_h a^3 \cos^3 \psi] dt,$$

$$g_1(a) = \frac{\omega_0}{\pi} \int_0^{2\pi/\omega_0} \cos \psi [3a\omega_0(\mu - a^3 \cos^2 \psi) \times \sin \psi + R_h a^3 \cos^3 \psi] dt,$$

即

$$f_1(a) = 3a\omega_0 \left(\frac{a^2}{4} - \mu \right), \quad g_1(a) = 0. \quad (16)$$

于是由 (14)—(16) 式知

$$\frac{da}{dt} = \frac{3\epsilon a}{2} \left(\mu - \frac{a^2}{4} \right), \quad (17)$$

$$\frac{d\phi}{dt} = 0. \quad (18)$$

积分 (17), (18) 式, 得到

$$a^2 = \frac{4}{1 + \left(\frac{4}{a_0^2} - 1 \right) \exp(-3\epsilon\mu t)}, \quad (19)$$

$$\phi = \phi_0, \quad (20)$$

其中 a_0 和 ϕ_0 为常数. 将 (19), (20) 式代入 (7) 式, 我们便得到弱阻尼 van der Pol 方程 (4) 的震荡近似解:

$$T(t) = \frac{2}{\left(1 + \left(\frac{4}{a_0^2} - 1 \right) \exp(-3\epsilon\mu t) \right)^{1/2}} \cos(\omega_0 t). \quad (21)$$

再将 (21) 式代入方程 (2), 得

$$\frac{dh}{dt} + R_h h = \frac{2E}{\left(1 + \left(\frac{4}{a_0^2} - 1 \right) \exp(-3\epsilon\mu t) \right)^{1/2}} \cos(\omega_0 t). \quad (22)$$

由方程 (22), 有解

$$h(t) = b_0 \exp(-R_h t) + 2E \int_0^t \frac{1}{\left(1 + \left(\frac{4}{a_0^2} - 1 \right) \exp(-3\epsilon\mu \tau) \right)^{1/2}} \times \cos(\omega_0 \tau) \exp(R_h(t - \tau)) d\tau. \quad (23)$$

故 (21), (23) 式便是 ENSO 耦合振子动力学模型 (1), (2) 的震荡近似解. 用同样的方法, 还可继续得到 ENSO 耦合振子动力学模型更高次的震荡近似解.

4 举例

现举例说明 ENSO 耦合振子动力学模型解的震荡性态. 为了方便起见, 我们假设如下无量纲方程:

$$\frac{dT}{dt} = 2T + h - \epsilon T^3, \quad (24)$$

$$\frac{dh}{dt} = -3T - h. \quad (25)$$

比较模型 (1), (2) 知 $C = 2, D = R_h = 1, E = 3, \mu = 1, \omega_0 = 1$. 现求模型 (24), (25) 式的近似解. 由 (24), (25) 式, 对应于方程 (5) 为

$$\frac{d^2 T}{dt^2} - \frac{dT}{dt} + T + 3\epsilon T^2 \frac{dT}{dt} + \epsilon T^3 = 0. \quad (26)$$

由 (8) 式, 设方程 (26) 的解为

$$T = a(t) \cos(t + \phi(t)). \quad (27)$$

由 (14), (15) 式

$$\frac{da}{dt} = -\frac{\epsilon}{2} f_1(a), \quad (28)$$

$$\frac{d\phi}{dt} = -\frac{\epsilon}{2a} g_1(a). \quad (29)$$

其中

$$f_1(a) = -\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin \psi [3a(1 - a^2 \cos^2 \psi) \sin \psi + a^3 \cos^3 \psi] dt,$$

$$g_1(a) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos \psi [3a(\mu - a^3 \cos^2 \psi) \sin \psi + a^3 \cos^3 \psi] dt.$$

即有

$$f_1(a) = 3a \left(\frac{a^2}{4} - 1 \right), \quad g_1(a) = 0. \quad (30)$$

于是由 (14)—(16) 式知

$$\frac{da}{dt} = \frac{3\epsilon a}{2} \left(1 - \frac{a^2}{4} \right), \quad (31)$$

$$\frac{d\phi}{dt} = 0. \quad (32)$$

积分 (31), (32) 式, 得到

$$a^2 = \frac{4}{1 + \left(\frac{4}{a_0^2} - 1 \right) \exp(-3\epsilon t)}, \quad (33)$$

$$\phi = \phi_0, \quad (34)$$

其中 a_0 和 ϕ_0 为常数. 将 (33), (34) 式代入 (27) 式, 我们便得到方程 (26) 的震荡近似解:

$$T(t) = \frac{2}{\left(1 + \left(\frac{4}{a_0^2} - 1\right) \exp(-3\epsilon t)\right)^{1/2}} \cos t. \quad (35)$$

将 (35) 式代入方程 (25), 得

$$\frac{dh}{dt} + h = \frac{6}{\left(1 + \left(\frac{4}{a_0^2} - 1\right) \exp(-3\epsilon t)\right)^{1/2}} \cos t. \quad (36)$$

由方程 (36), 有解

$$h(t) = b_0 \exp(-t) + 6 \int_0^t \frac{1}{\left(1 + \left(\frac{4}{a_0^2} - 1\right) \exp(-3\epsilon \tau)\right)^{1/2}} \times \cos \tau \exp(t - \tau) d\tau, \quad (37)$$

其中 a_0, b_0 为常数. 故 (35), (37) 式便是 ENSO 耦合振子动力学模型 (24), (25) 的震荡近似解. 现设 $T(0) = h(0) = 1$, 这时由解 (35), (37) 式得

$$T(t) = \frac{2}{(1 + 3 \exp(-3\epsilon t))^{1/2}} \cos t. \quad (38)$$

由方程 (36), 有解

$$h(t) = b_0 \exp(-t) + 6 \int_0^t \frac{1}{(1 + 3 \exp(-3\epsilon \tau))^{1/2}} \times \cos \tau \exp(t - \tau) d\tau. \quad (39)$$

当在初始条件 $T(0) = h(0) = 1, \epsilon = 0.5$ 下, 震荡近似解 (38), (39) 曲线图见图 1 和图 2 所示. 由图 1 和图 2 可以看出, ENSO 耦合振子动力学模型 (24), (25) 具有震荡型的近似解.

5 结论

由于大气物理中的复杂性, 需要建立它的基本模型系统的方程, 并去求解它. 参数变值法和平均

法是一个简单而有效的方法. 它类同于变系数非齐次常微分方程的常数变易法, 但比常数变易法更深入, 加上了取变量函数平均值的过程, 以达到求得近似解的目的. 这种方法对消去解的长期项的有界解用相应的近似解来替代很有效, 同样, 这种近似解保留了解析表达式的特点, 以便可以继续对它使用解析运算. 因此可以利用它对模型的相应的定性性质做进一步的探讨, 这对进一步了解和预测模型的有关性质更为方便和实用, 特别是对大气物理方面的气象预报等的描述.

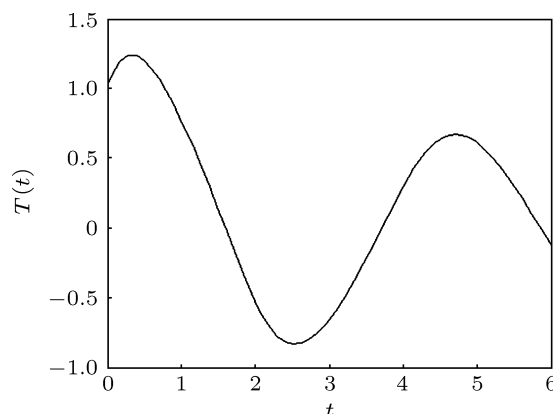


图 1 ENSO 耦合振子海表温度 $T(t)$ 近似震荡曲线图

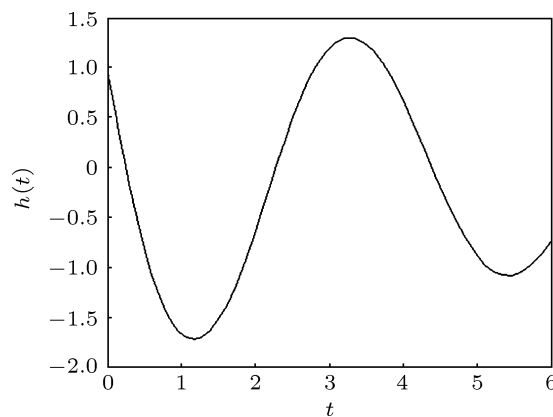


图 2 ENSO 耦合振子温跃层厚度 $h(t)$ 近似震荡曲线图

[1] Feng G L, Dong W J, Jia X J, Cao H X 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 1181 (in Chinese) [封国林, 董文杰, 贾晓静, 曹鸿兴 2002 物理学报 **51** 1181]
 [2] Guan X P, He Y H, Fan Z P 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 276 (in Chinese) [关新平, 何宴辉, 范正平 2003 物理学报 **52** 276]
 [3] Li C G 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 2114 (in Chinese) [李春贵 2003 物理学报 **52** 2114]
 [4] Li Z, Han C Z 2002 *Chin. Phys.* **11** 9

[5] Lin J, Xu Y S 2003 *Chin. Phys.* **12** 1049
 [6] Hu Y Q 2002 *Introductory to Atmospheric Thermodynamics and Dynamics—Linear and Nonlinear Thermodynamics of the Atmospheric Non-equilibrium State* (Beijing: Geology Pub.) (in Chinese) [胡隐樵 2002 大气热力动力学导论——大气非平衡态线性和非线性热力学 (北京: 地质出版社)]
 [7] Jin F F 1997 *J. Atmos. Sci.* **54** 811
 [8] Jin F F 1997 *J. Atmos. Sci.* **54** 830

- [9] Wang C 2001 1999 *J. Adv. Atmosph. Sci.* **18** 674
- [10] Feng G L, Dong W J 2005 *Acta Metro. Sin.* **63** 864 (in Chinese) [封国林, 董文杰 2005 气象学报 **63** 864]
- [11] Zhao Q, Liu S K, Liu S D 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 220201 (in Chinese) [赵强, 刘式适, 刘式达 2012 物理学报 **61** 220201]
- [12] Liu S K, Liu S D 2012 *Nonlinear Equations in Physics* (Beijing: Peking University Press) (in Chinese) [刘式适, 刘式达 2012 物理学中的非线性方程 (北京: 北京大学出版社)]
- [13] de Jager E M, Jiang F R 1996 *The Theory of Singular Perturbation* (Amsterdam: North-Holland Publishing Co.)
- [14] Barbu L, Morosanu G 2007 *Singularly Perturbed Boundary-Value Problems* (Basel: Birkhauserm Verlag AG)
- [15] Ramos M 2009 *J. Math. Anal. Appl.* **352** 246
- [16] D'Aprile T, Pistoia A 2010 *J. Diff. Eqs.* **248** 556
- [17] Faye L, Frenod E, Seck D 2011 *Discrete Contin. Dyn. Sys.* **29** 1001
- [18] Lin W T, Ji Z Z, Wang B 2002 *Prog. Nat. Sci.* **12** 102 (in Chinese) [林万涛, 季仲贞, 王斌 2002 自然科学进展 **12** 102]
- [19] Lin W T, Mo J Q 2004 *Chin. Sci. Bull.* **48** (suppl II) 5
- [20] Lin W T, Lin Y H, Mo J Q 2012 *Chin. Phys. B* **21** 010204
- [21] Shi L F, Ouyang C, Chen L H, Mo J Q 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 050203 (in Chinese) [石兰芳, 欧阳成, 陈丽华, 莫嘉琪 2012 物理学报 **61** 050203]
- [22] Shi L F, Lin W T, Lin Y H, Mo J Q 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 010201 (in Chinese) 石兰芳, 林万涛, 林一骅, 莫嘉琪 2013 物理学报 **62** 010201]
- [23] Mo J Q, Lin Y H, Lin W T, Chen L H 2012 *Chin. Geog. Sci.* **22** 42
- [24] Mo J Q 2009 *Science in China G* **39** 568
- [25] Mo J Q, Lin Y H, Lin W T 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 6701 (in Chinese) [莫嘉琪, 林一骅, 林万涛 2010 物理学报 **59** 6701]
- [26] Mo J Q, Lin W T, Lin Y H 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 080202 (in Chinese) [莫嘉琪, 林万涛, 林一骅 2011 物理学报 **60** 080202]
- [27] Mo J Q 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 090203 (in Chinese) [莫嘉琪 2011 物理学报 **60** 090203]
- [28] Mo J Q 2010 *Commun. Theor. Phys.* **53** 440
- [29] Mo J Q, Lin Y H, Lin W T 2010 *Chin. Phys. B* **19** 030202
- [30] Mo J Q, Lin W T, Lin Y H 2011 *Chin. Phys. B* **20** 070205

Vibrating approximate solution for a class of El Nino-southern coupled oscillation dynamic model*

Lin Wan-Tao¹⁾ Lin Yi-Hua¹⁾ Shi Lan-Fang²⁾ Mo Jia-Qi^{3)†}

1) (State Key Laboratory of Numerical Modeling for Atmospheric Sciences and Geophysical Fluid Dynamic, Institute of Atmospheric Physics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100029, China)

2) (College of Mathematics and Statistics, Nanjing University of Information Science and Technology, Nanjing 210044, China)

3) (College of Mathematics and Computer Science, Anhui Normal University, Wuhu 241003, China)

(Received 14 February 2013; revised manuscript received 22 March 2013)

Abstract

A class of sea-air coupled oscillator dynamic model is studied. Using the parameter modification and average method for the singular perturbation, the vibrating approximate solution corresponding to El Nino-Southern Oscillation (ENSO) coupled oscillation dynamic model equations is obtained.

Keywords: ENSO oscillator, singular perturbation, approximate solution

PACS: 02.30.Mv

DOI: 10.7498/aps.62.140202

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 41275062, 41175058, 11202106) and the State Key Laboratory of Numerical Modeling for Atmospheric Sciences and Geophysical Fluid Dynamic Special Fund, China (Grant No. XDA01020304).

† Corresponding author. E-mail: mojqiaqi@mail.ahnu.edu.cn