

# 累积放电模型及其符号动力学研究\*

陈冲<sup>1)</sup> 丁炯<sup>1)</sup> 张宏<sup>1)†</sup> 陈琢<sup>2)</sup>

1) (浙江大学生物医学工程系, 杭州 310027)

2) (浙江大学城市学院自动化系, 杭州 310015)

(2013年3月3日收到; 2013年4月1日收到修改稿)

基于累积释放模型提出了一种累积放电模型. 相比于累积释放模型, 累积放电模型无须变化的阈值调制, 即可出现多种状态, 例如混沌态、锁频等. 利用符号动力学对其进行研究, 发现在一定的参数条件下, 模型的输出符号序列可以被用于监测模型参数的变化, 而且与神经系统的测量相似, 都具有很高的分辨率. 计算机仿真和电路实验得到的结果也验证了上述说法. 电路实验结果显示模型的输出符号序列对输入频率的分辨率最高可以达到 0.05 Hz, 对电流幅值的分辨率可达到 1  $\mu$ A, 并且都具有很大的动态范围.

**关键词:** 符号动力学, 混沌, 累积释放模型, 非线性电路

**PACS:** 05.45.-a, 05.45.Ac, 07.07.Df, 87.15.A-

**DOI:** 10.7498/aps.62.140502

## 1 引言

在连续时间的神经元模型方面, H-H 方程模型<sup>[1,2]</sup>、FHN 模型<sup>[3,4]</sup>和累积释放模型<sup>[5,6]</sup>已经被广泛研究. 累积释放模型是一种最简单的神经元模型. 它虽然不是生理学的模型, 但是却表现了神经元兴奋性的两个关键方面: 1) 被动的; 2) 累积输入并且当充电到阈值时发放脉冲<sup>[7]</sup>. 累积释放模型的基本动力学过程如下: 输入电流给电容(神经元)充电, 当电容电压(膜电位)充电到上阈值时, 模型会释放一个脉冲, 同时电压被立刻置位到下阈值. 在累积释放模型中, 阈值调制扮演了一个极为重要的角色. 如果累积释放模型的阈值使用余弦或正弦调制, 在合适的参数区间范围内, 系统可以进入混沌状态. Brette<sup>[5]</sup>和 Hamanaka 等<sup>[8]</sup>分别在理论上和实验上证明了这一点. 如果累积释放模型的上阈值和下阈值都是恒定的, 那么脉冲的发放就一定是周期的了, 动力学特性就会大大减少. 基于累积释放模型, 我们提出了一种累积放电模型. 相比于累积释放模型, 累积放电模型有如下特点: 1) 它无须变化的阈值调制, 即可出现多种状态, 例如周期态、

混沌态等; 2) 累积放电模型的脉冲发放频率不会随着充电电流的增加而无限地增加, 它的脉冲发放频率都会低于或等于输入的充电频率.

本文接着利用符号动力学理论对该模型进行分析, 提出了一种简单的符号化方法. 由于符号序列的大小关系与模型参数的大小关系是相对应的, 所以从获得的符号序列可以方便地分辨出模型参数的变化, 从而达到监测模型参数变化的目的. 本文设计了累积放电模型电路和符号采集系统, 用实际的电路实验结果验证了符号化方法的有效性和监测的高精度性.

## 2 累积放电模型

累积放电模型的电路实现简图如图 1(a) 所示. 系统开始工作时, 开关 S 向 1 闭合然后立即断开. 充电周期到来时, S 向 2 闭合, 电容从 0 V 开始充电. 当电容充电到上阈值电压时, 比较器翻转, S 向 3 闭合, 电容进入放电状态. 当新的充电周期到来时, S 向 2 闭合, 电容又进入充电状态, 如此反复. 可以看出累积放电模型由两个过程组成: 一个是充电过程; 另一个是放电过程. 其中充电过程满足电容

\* 国家自然科学基金(批准号: 60871085)和浙江省自然科学基金(批准号: Y1100119)资助的课题.

† 通讯作者. E-mail: paulpeter@zju.edu.cn

充电方程:

$$C \frac{du(t)}{dt} = i(t), \quad (1)$$

放电过程满足电容放电方程:

$$RC \frac{du(t)}{dt} + u(t) = 0. \quad (2)$$

系统的输入参数有两个: 一个是充电电流; 另一个是充电频率, 如图 1(b) 所示. 每当电容电压充电到阈值时, 比较器就会有一个脉冲产生, 如图 1(c) 和图 1(d) 所示.

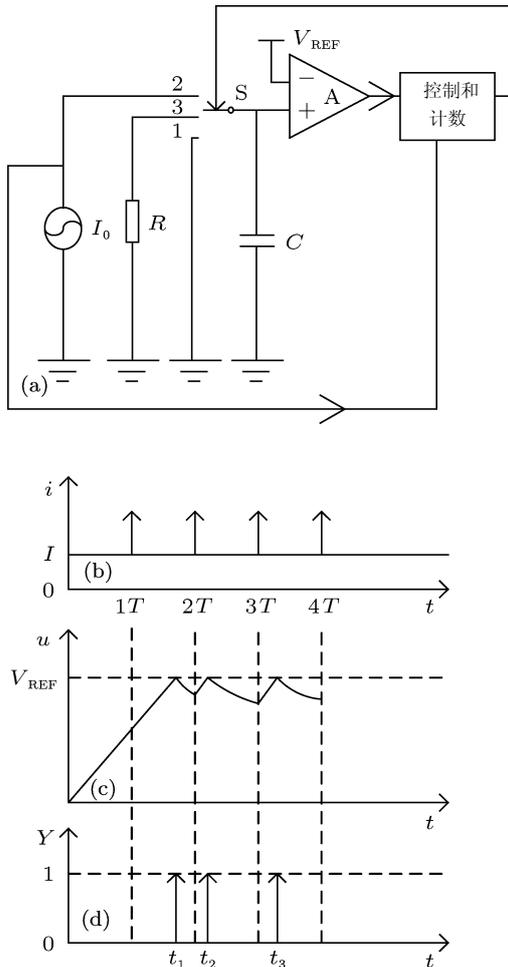


图 1 (a) 电路原理图; (b)  $I$  为电流幅值, 1, 2, 3, 4 为归一化的充电周期  $T$ ; (c)  $u(t)$  代表电容的电压,  $V_{REF}$  为上阈值电压; (d)  $Y(t)$  表示系统发放的脉冲,  $t_1, t_2, t_3$  为脉冲发放时刻

将产生脉冲的时刻用  $t_n$  表示, 所有脉冲产生的时刻按时间顺序排列起来就构成一个序列:  $t = \{t_1, t_2, t_3, \dots, t_n, \dots\}$ . 在区间  $[t_n, t_{n+1}]$  内, 对 (1) 式和 (2) 式积分得到:

$$V_{REF} \left( 1 - e^{-\frac{T - \text{mod}(t_n, T)}{RC}} \right) = \frac{I}{C} \left( t_{n+1} - \text{ceil} \left( \frac{t_n}{T} \right) T \right). \quad (3)$$

令  $\tau_n = t_n/T, \tau_{n+1} = t_{n+1}/T$ , (3) 式变为

$$\tau_{n+1} = \frac{V_{REF} C}{IT} \left( 1 - e^{-\frac{T(1 - \text{mod}(\tau_n, 1))}{RC}} \right) + \text{ceil}(\tau_n), \quad (4)$$

(4) 式可以简写为  $\tau_{n+1} = f(\tau_n)$ , 函数  $f$  是不连续的、单调递增的并且满足  $f(\tau + 1) = f(\tau) + 1$ . 我们把点  $(\tau_n, \tau_{n+1})$  画出的图叫做脉冲位置图. 令  $\theta_n = \text{mod}(\tau_n, 1), \theta_{n+1} = \text{mod}(\tau_{n+1}, 1), s_n = \text{floor}(\tau_{n+1}) - \text{ceil}(\tau_n)$ , (4) 式可以简化为

$$\theta_{n+1} = \frac{V_{REF} C}{IT} \left( 1 - e^{-\frac{T(1 - \theta_n)}{RC}} \right) - s_n. \quad (5)$$

(5) 式可以简写为:  $\theta_{n+1} = F(\theta_n) = f(\theta_n) \text{ mod}(1)$ ,  $F: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ . (5) 式中,  $s_n$  为相邻脉冲位置之间包含充电整周期的个数. 对于  $s_n$ , 在本文后面部分会有更详细的解释. 我们把  $(\theta_n, \theta_{n+1})$  画出的图叫做相位图. 相位图中第一个点, 也就是系统的初始点, 由 (6) 式给出:

$$\theta_1 = \frac{V_{REF} C}{IT} - s_0. \quad (6)$$

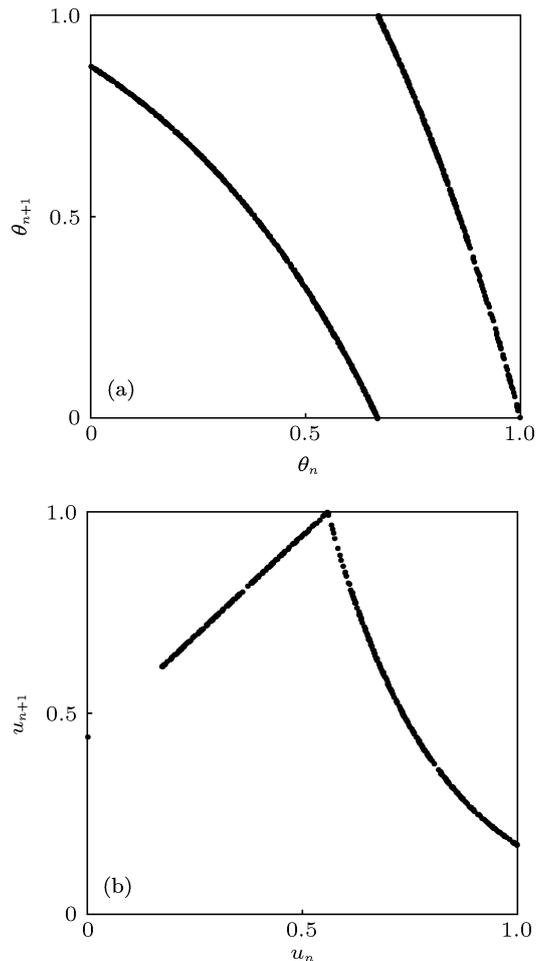


图 2 (a) 累积放电模型的相位图 系统参数如下:  $I = 180 \times 10^{-6}$  A,  $R = 2.85 \times 10^3 \Omega$ ,  $C = 1 \times 10^{-6}$  F,  $V_{REF} = 2.04$  V,  $f = 200$  Hz; (b) 庞加莱映射的一种特例, 系统参数与图 2(a) 所用的参数一样,  $u_n$  为电容上电压  $u(t)$  周期取样并归一化后的值

根据圆映射的定义知,  $F$  即为圆映射, 且是不可逆的, 如图 2(a) 所示. 在累积放电模型中, 存在一个周期为  $T$  的激励, 电容上电压变化形成的轨线在以  $T$  为周期的情况下形成庞加莱映射, 我们可以根据庞加莱截面上点的分布来判定系统的状态. 一维系统的庞加莱映射又称为 stroboscope map<sup>[9,10]</sup>. 累积放电模型电容上电压  $u(t)$  的 stroboscope map 分为两段, 一段上升, 一段下降, 如图 2(b) 所示, 很明显它属于人字映射.

### 3 累积放电模型的 Lyapunov 指数

如果都使用相位图或者庞加莱映射来观察模型在不同参数条件下的运动就过于烦琐了. 本文使用相位  $\theta_n$  的 Lyapunov 指数和电容上电压  $u(t)$  的分岔图来观察系统在不同参数条件下的运动情况. 一

维映射只有一个 Lyapunov 指数, 它可能大于、等于或小于零<sup>[11]</sup>. 正的 Lyapunov 指数表明运动轨道在每个局部都不稳定, 相邻轨道以指数速度分离, 轨道在整体性的稳定因素作用下反复折叠, 形成混沌吸引子<sup>[12]</sup>. 因此 Lyapunov 指数大于零可以作为系统进入混沌状态的依据. 负的 Lyapunov 指数表明轨道在此参数下整体上是稳定的, 对应周期运动. 系统的 Lyapunov 指数由负变正表明系统正在经历由周期态向混沌态的转变, 此过程可以对照分岔图来观察<sup>[13]</sup>. 对照图 3(a) 和图 3(b) 可以看出, 系统在输入充电频率由 200 Hz 逐渐增加的过程中, 经历着阵发混沌、周期三、再次进入混沌的过程. 对应的 Lyapunov 指数大小则是由正到负, 再到正. 对照图 3(b) 和图 3(c), 可以看出在系统处于周期三状态时, 系统的转数为 3, 表明系统处于锁频状态.

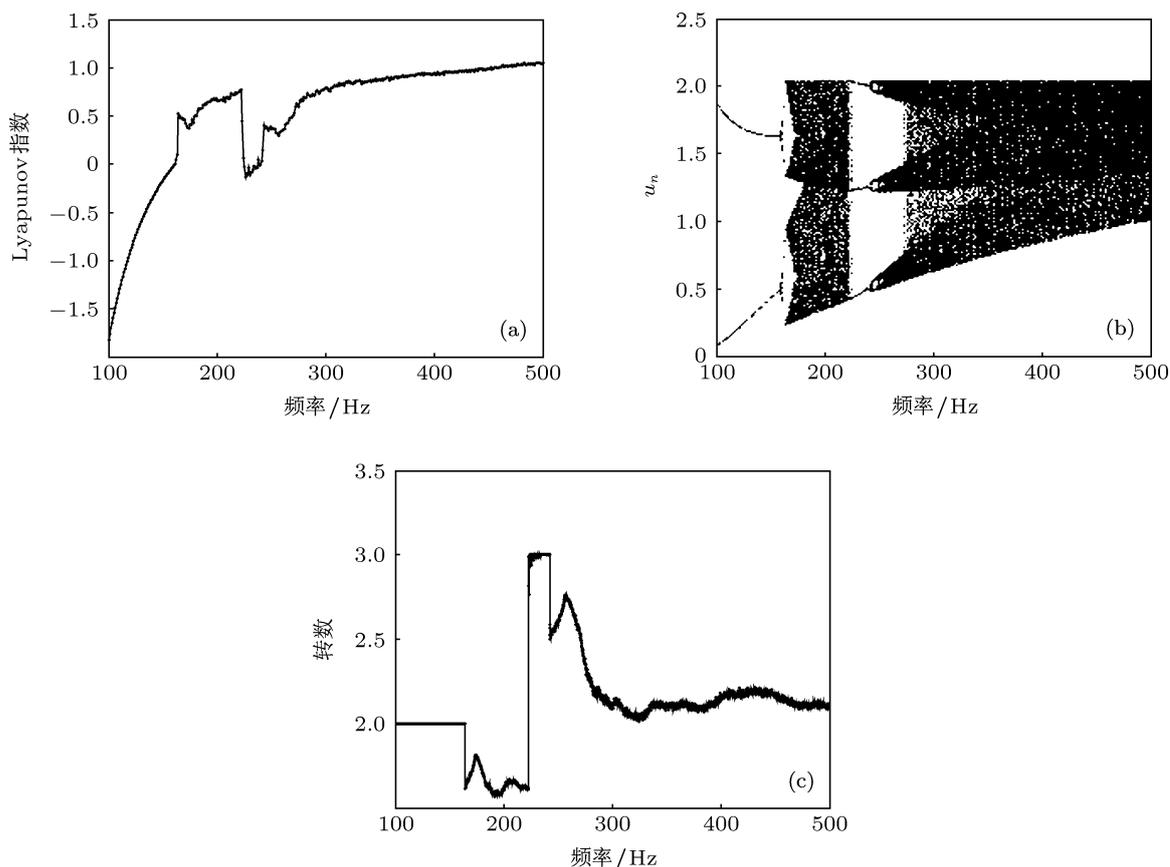


图 3 (a) 系统 Lyapunov 指数随充电频率的变化. 系统参数:  $I = 180 \times 10^{-6} \text{ A}$ ,  $R = 2.85 \times 10^3 \text{ } \Omega$ ,  $C = 1 \times 10^{-6} \text{ F}$ ,  $V_{\text{REF}} = 2.04 \text{ V}$ , 频率间隔 1 Hz, 连线仅仅是为了方便观看; (b) 系统中电容周期取样电压  $u_n$  随充电频率变化的分岔图, 此处  $u_n$  未归一化, 系统参数同图 3(a) 所用参数, 从图中可以清晰地看到倍周期分岔、周期三到混沌的过程; (c) 累积放电模型转数随充电频率的变化情况, 系统参数同图 3(a)

### 4 累积放电模型的参数测量原理

累积放电模型的相位图由几段单调的支组成,

每一支都是单调递减的, 其中支的个数与模型的参数有关. 如果在相位图中把每个  $\theta_n$  对应的  $s_n$  画出来,  $\theta_n$  与  $s_n$  存在的对应关系就显而易见了, 如图

4(a) 和图 4(b) 所示. 如图 4(a) 所示, 当  $\theta_n$  在间断点左边时,  $s_n$  为 1; 当  $\theta_n$  在间断点右边时,  $s_n$  为 0. 既然有这样的对应关系,  $s_n$  就可以认为是符号. 所以累积放电模型的符号序列的获取方式是: 脉冲发放的间隔时间对充电周期取整, 得到的整数就作为符号. 这样取符号的方式相比于根据相位来取符号有三点好处: 1) 不需要得到间断点; 2) 取符号时不需要精确的时钟; 3) 取符号电路可以做得非常简单. 由于累积放电模型的每条支都是单调递减的, 所以排序规则就是: 奇数位置的符号越大, 符号序列越大; 偶数位置的符号越小, 符号序列越大. 符号序列的大小关系表示初始点的大小关系<sup>[14]</sup>. 累积放电模型都是从 0 V 开始充电, 不同的模型参数得到不

同的初始点, Brown 和 Chua<sup>[15]</sup> 就曾指出混沌系统的参数敏感性相当于初值敏感性, 这也就是说符号序列的大小关系与模型参数的大小关系是相对应的. 如果累积放电模型的输入周期相比于 RC 放电时间比较短的话, 放电就可以将 RC 近似看作直流放电, 那么累积放电模型的相位递推方程就与倒锯齿映射的相位递推方程一样了. 这样电路参数、初值和符号序列的关系就建立起来了 (倒锯齿映射初值与符号序列的关系见附录). 根据前人的经验<sup>[16]</sup>, 本文不是直接利用符号序列来计算电路参数, 而只是利用符号序列的排序规则对不同参数下电路输出的符号序列进行排序, 以此来达到检测电路参数变化的目的, 这样的做法使得测量分辨率大大提高.

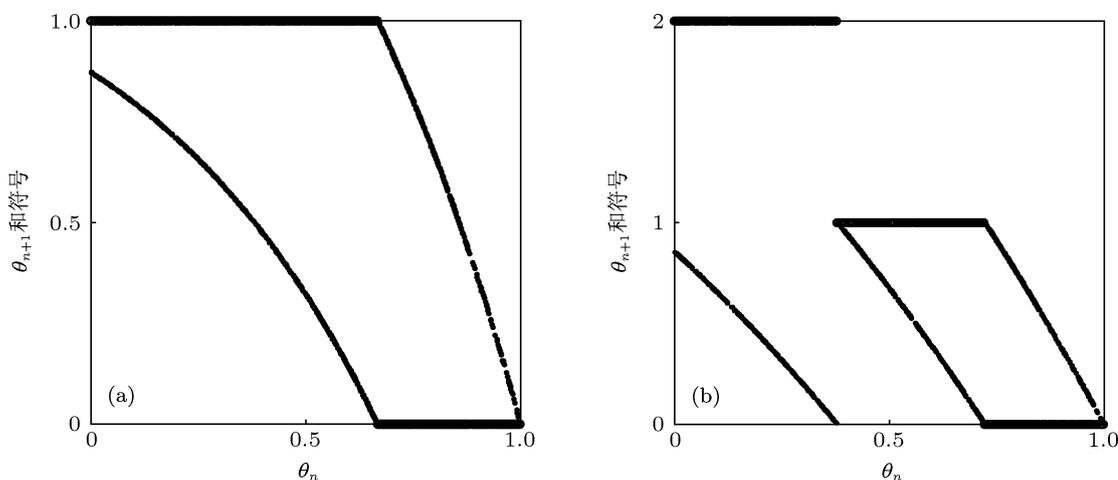


图 4 (a) 图 2(a) 所示相位图加上每个相位对应的符号, 细线表示相位, 粗线表示符号,  $\theta_n$  相位与  $s_n$  符号相对应, 第一个符号  $s_0$  未画出; (b) 相位图加上每个相位相对应的符号, 参数部分除了充电频率  $f = 500$  Hz 与图 2(a) 所用不一样外, 其他参数都是一样的

表 1 (a) 输入充电频率与符号序列的对应关系 (Matlab 仿真结果 1), 系统参数除充电频率与图 2(a) 所用的不同外, 其他所用参数都相同, 下画线标出数字是这组符号序列与前一组符号序列第一个不相同的符号; (b) 充电电流幅值与符号序列的对应关系 (Matlab 仿真结果 2), 系统参数除电流与图 4(b) 所用的不同外, 其他参数都相同

(a)		(b)	
频率/Hz	符号序列	电流/ $\mu$ A	符号序列
500	5 1 2 1 0 0 2 2 1 0 2 0 1 1 0 0 2 1 2 2	140	7 2 0 1 1 2 2 1 0 0 2 3 3 1 1 1 0 2 0
500.00001	5 1 2 1 0 0 2 2 1 0 2 0 1 1 <u>1</u> 2 2 2 2 2	140.01	7 2 0 1 1 2 <u>1</u> 2 0 2 0 0 0 0 3 3 3 2 3 3
500.00002	5 1 2 1 0 0 2 2 1 0 2 0 1 1 1 1 <u>1</u> 1 1 1 2	140.02	7 2 0 1 1 <u>3</u> 3 2 3 2 1 0 1 1 3 1 1 3 3 2
500.00003	5 1 2 1 0 0 2 2 <u>2</u> 2 0 1 1 1 1 2 1 2 1 0	140.03	7 2 0 1 1 3 <u>2</u> 1 0 1 3 2 2 3 2 2 0 1 0 1
500.00004	5 1 2 1 0 0 2 2 2 2 0 1 1 1 1 2 <u>2</u> 1 0 0	140.04	7 2 0 1 1 3 <u>1</u> 2 3 2 1 1 0 3 2 1 0 3 2 0
500.00005	5 1 2 1 0 0 2 2 2 2 0 1 1 1 1 1 <u>1</u> 1 2 1 0	140.05	7 2 0 1 <u>0</u> 1 0 3 2 2 2 1 3 1 0 3 2 1 0 1
500.00006	5 1 2 1 0 0 2 2 2 2 0 1 1 1 1 1 <u>2</u> 1 2 0	140.06	7 2 0 1 <u>0</u> <u>1</u> 3 2 3 2 0 2 2 2 3 2 1 1 0 2
500.00007	5 1 2 1 0 0 2 2 2 2 0 1 1 1 1 <u>0</u> 1 0 1 0	140.07	7 2 0 1 0 1 <u>1</u> 0 3 2 0 3 2 2 0 1 2 2 0 0
500.00008	5 1 2 1 0 0 2 2 2 2 0 1 1 1 <u>2</u> 2 1 2 0 0	140.08	7 2 0 1 0 <u>2</u> 3 1 2 3 1 0 2 2 0 2 3 2 3 2
500.00009	5 1 2 1 0 0 2 2 2 2 0 1 1 1 2 2 <u>2</u> 2 1 1	140.09	7 2 0 1 0 2 <u>2</u> 2 2 2 1 1 0 3 1 0 1 2 3 2

### 5 计算机仿真及电路实现

用符号动力学来研究一维映像的特性非常方便<sup>[17]</sup>. 符号动力学具有粗粒化特性, 可以在一定程度上滤除噪声, 而且还避免了采集信号时对电路产生影响<sup>[18]</sup>. 根据以上对累积放电模型工作原理的分析, 本文对它进行了计算机仿真研究和电路实验研究. 计算机仿真得到的符号序列如表 1(a) 和表 1(b) 所示, 可以看出所得的符号序列都是满足第 4 部分提到的累积放电模型的排序规则的, 并且分辨率非常高. 我们通过计算机仿真也发现, 电路的输出符号序列不仅可以对电路充电频率和充电电流幅值排序, 还可以对电路其他参数如电容、放电电阻进行排序.

累积放电模型电路硬件上由上位机和 FPGA (Altera 公司的 EP3C10E144C8) 开发板和累积放电电路板构成. 从功能上划分, 实验系统可分为信号发生器模块、逻辑控制模块、累积放电模块、数据采集模块、数据通信模块及数据处理模块. 累积放电电路模块是整个电路模型的核心, 由电容、比较器组成. 数据采集模块用于采集累积放电电路所产生的符号数据和相位数据. 数据通信模块负责上位机和 FPGA 开发板之间的数据传输. 数据处理模块用于对相位数据和符号数据进行分析处理, 画出相位图并验证得到的符号是否满足第 4 部分提

到的累积放电模型的排序规则. 各个模块之间的关系如图 5 所示. 图 6 所示为基于累积放电模型的电路示意图, 图中的电流源器件由电压信号发生模块和跨导组成, 每当新的周期开始时就向外发出一个脉冲信号. 表 2(a) 和表 2(b) 是电路实验得到的符号序列, 跟计算机仿真一样都满足第 4 部分提到的累积放电模型的排序规则, 可见取符号方法和排序规则都是有正确的. 图 7 是电路实验得到的相位图, 与计算机仿真的相位图是符合的. 混沌电路不但对被测量敏感, 对环境因素也很敏感, 由于电路存在噪声的原因, 分辨的精度达不到计算机模拟仿真的精度.

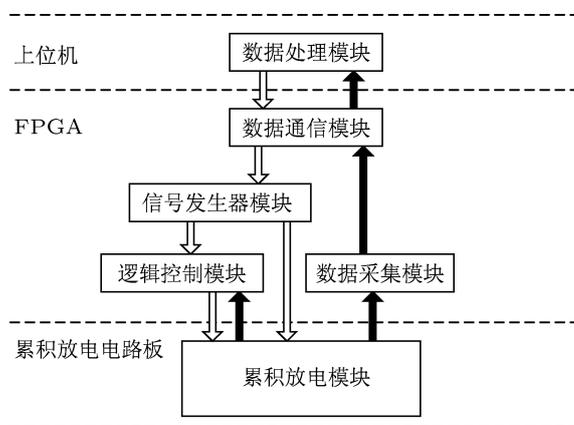


图 5 累积放电模型各个模块之间的关系 图中空心箭头、实心箭头分别表示信号在不同模块间流动的方向

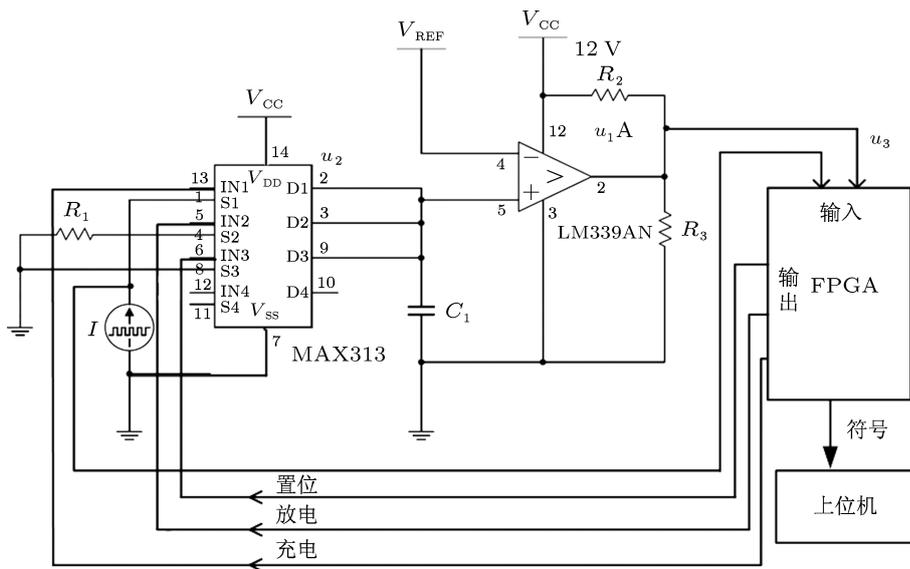


图 6 累积放电模型的电路示意图

表 2 (a) 充电频率与符号序列的对应关系(电路实验结果 1), 参数:  $I = 140 \times 10^{-6} \text{ A}$ ,  $R = 3.3 \times 10^3 \Omega$ ,  $C = 1 \times 10^{-6} \text{ F}$ ,  $V_{\text{REF}} = 2.04 \text{ V}$ ; (b) 电流幅值与符号序列的对应关系(电路实验结果 2), 充电电流幅值是通过线性跨导 NE5517 产生的, 其中控制电压是通过 DAC904 数模转换得到, 参数为  $R = 3.3 \times 10^3 \Omega$ ,  $C = 1 \times 10^{-6} \text{ F}$ ,  $V_{\text{REF}} = 2.04 \text{ V}$ ,  $f = 500 \text{ Hz}$ ; 下划线注释同表 1

(a)	
频率/Hz	符号序列
500	8 2 3 2 1 1 3 2 4 3 1 2 4 3 1 3 1 2 3 1
500.05	8 2 3 2 1 1 4 3 2 2 3 4 4 4 4 3 2 3 4 3
500.1	8 2 3 2 2 4 3 1 3 1 2 3 2 2 3 2 2 3 3 2
500.15	8 2 3 2 2 3 1 3 1 2 3 1 1 3 3 2 2 4 3 2
500.2	8 2 3 2 2 3 1 3 2 3 4 4 4 3 2 2 3 3 2
500.25	8 2 3 2 2 3 3 4 4 3 2 4 3 1 1 3 3 3 3 4
500.3	8 2 3 2 2 2 1 4 3 1 3 2 2 3 2 3 2 3 2 3
500.35	8 2 3 2 2 2 1 3 1 3 2 2 2 1 2 2 2 1 2 3
500.4	8 2 3 2 2 2 2 1 2 4 3 1 2 3 1 1 2 4 4 3
500.45	8 2 3 2 2 2 3 3 1 1 1 2 2 3 2 1 2 1 3 2

(b)	
电流/ $\mu\text{A}$	符号序列
139	8 1 1 1 1 3 4 3 2 4 3 1 2 1 2 4 3 2 2 1
140	8 2 4 4 3 1 1 3 3 1 3 1 2 3 1 3 2 2 3 1
141	8 2 3 3 2 1 1 3 4 4 4 4 3 2 3 1 3 2 1 2
143	8 2 2 2 1 3 3 2 1 4 3 1 3 2 2 2 1 2 3 3
144	8 2 1 2 3 3 3 2 3 1 2 2 2 1 1 1 2 3 1 3
145	8 3 4 3 1 3 2 2 3 3 1 2 1 3 2 3 2 2 1 3
146	8 3 3 2 2 1 4 3 1 2 2 3 3 2 2 3 2 1 2 1
147	8 3 3 3 1 2 2 1 1 3 3 3 3 3 3 3 1 3 2 1
148	8 3 2 2 3 4 3 1 3 1 1 1 2 1 3 2 3 3 2 1
150	8 3 2 3 1 1 2 3 1 1 2 2 2 2 3 3 3 1 2 1

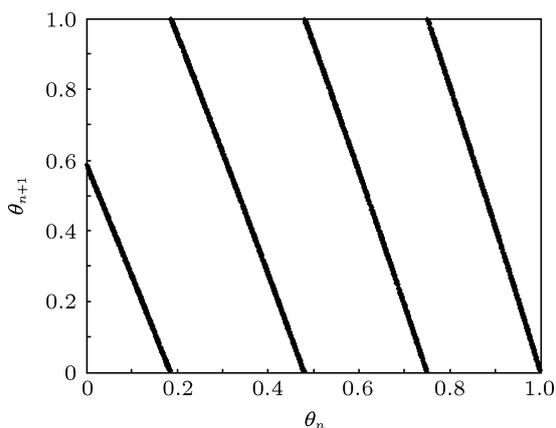


图 7 电路实验得到的相位图 参数如下:  $I = 187 \times 10^{-6} \text{ A}$ ,  $R = 3 \times 10^3 \Omega$ ,  $C = 2.2 \times 10^{-6} \text{ F}$ ,  $V_{\text{REF}} = 2.04 \text{ V}$ ,  $f = 500 \text{ Hz}$

## 6 结论

累积放电模型在一定参数下的相位图可以出现混沌映射, 对初值非常敏感. 利用这一特性与符

号动力学结合可以用来监测模型参数变化, 如充电频率、充电电流幅值、放电电阻值、电容大小等, 分辨精度非常高. 计算机仿真和电路实验结果都表明所用方法分辨率非常高, 证明了所用方法的优越性. 当然累积放电模型电路还存在很多不足之处, 如模型只能用来监测电路参数的变化, 而不能精确得到电路参数. 电路的输出符号序列对电路所有参数都十分敏感(甚至包括温度, 虽然不是很敏感, 但是由于电路中的器件有些是半导体器件, 所以还是有些影响的), 所以可以说电路的输出结果反映的是电路全部参数的变化. 神经网络中必须有神经网络的存在, 而这里只是简单仿真单个神经元的活动, 以后的研究方向应该是分析大量神经元的耦合, 并用简单电路实现之.

## 附录 倒锯齿映射模型初值测量原理

倒锯齿映射的迭代公式可以写为  $\theta_{n+1} = \text{mod}(k(1 - \theta_n), 1)$ ,  $\theta_n \in [0, 1]$ . 如果仔细观察倒锯齿映射的迭代公式就会发现, 倒锯齿映射迭代公式中蕴含着符号. 比如说当参数  $k$  为 2 的时候, 倒锯齿映射的公式可以写为  $\theta_{n+1} = \begin{cases} 1 - 2\theta_n & \theta_n \in [0, 0.5] \\ 2 - 2\theta_n & \theta_n \in [0.5, 1] \end{cases}$ , 也可以写为  $\theta_{n+1} = \begin{cases} 1 + \varepsilon_n - 2\theta_n & \theta_n \in [0, 0.5] \\ 2 + \varepsilon_n - 2\theta_n & \theta_n \in [0.5, 1] \end{cases}$ , 这里的  $\varepsilon_n$  就是代表符号. 当  $\theta_n$  在间断点的左边, 符号  $\varepsilon_n$  为 0; 当  $\theta_n$  在间断点右边, 符号  $\varepsilon_n$  为 1. 更为通用的公式为  $\theta_{n+1} = \text{mod}(k, 1) + \varepsilon_n - k\theta_n$ ,  $\theta_n \in [0, 1]$ . 符号  $\varepsilon_n$  的种类与迭代出的支的条数有关. 如果从  $\theta_n$  逆推  $\theta_{n+1}$ , 则可以得到初值与符号序列的关系. 由上式可得

$$\begin{aligned} \theta_n &= \frac{\text{mod}(k, 1) + \varepsilon_n}{k} - \frac{1}{k} \theta_{n+1} \\ &= \frac{\text{mod}(k, 1) + \varepsilon_n}{k} - \frac{1}{k} \left( \frac{\text{mod}(k, 1) + \varepsilon_{n+1}}{k} - \frac{1}{k} \theta_{n+2} \right) \\ &= \frac{\text{mod}(k, 1) + \varepsilon_n}{k} - \frac{\text{mod}(k, 1) + \varepsilon_{n+1}}{k^2} + \frac{1}{k^2} \theta_{n+2} \\ &= \sum_{i=0}^m \frac{\text{mod}(k, 1) + \varepsilon_{n+i}}{k^{i+1}} (-1)^i + \frac{(-1)^{i+1}}{k^{m+1}} \theta_{n+m+1}, \end{aligned}$$

当  $n = 1$  时,

$$\theta_1 = \sum_{i=0}^m \frac{\text{mod}(k, 1) + \varepsilon_{i+1}}{k^{i+1}} (-1)^i + \frac{(-1)^{i+1}}{k^{m+1}} \theta_{m+1}.$$

当迭代很多次后,  $\frac{(-1)^{i+1}}{k^{m+1}} \theta_{m+1}$  项趋于 0. 所以可得到系统初值  $\theta_1$  与系统输出符号序列  $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \dots, \varepsilon_n, \dots\}$  之间的关系表达式:

$$\theta_1 = \sum_{i=0}^m \frac{\text{mod}(k, 1) + \varepsilon_{i+1}}{k^{i+1}} (-1)^i,$$

上式就是倒锯齿映射模型利用符号序列来测量初值的原理.

- [1] Buhry L, Grassia F, Giremus A, Grivel E, Renaud S, Saighi S 2011 *Neural Comput.* **23** 2599
- [2] Ding J, Zhang H, Tong Q Y 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 150505 (in Chinese) [丁炯, 张宏, 童勤业 2012 物理学报 **61** 150505]
- [3] Meucci R, Euzzor S, Geltrude A, Al-Naimie K, De Nicola S, Arecchi F T 2012 *Phys. Lett. A* **376** 834
- [4] Zhang J J, Jin Y F 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 130502 (in Chinese) [张静静, 靳艳飞 2012 物理学报 **61** 130502]
- [5] Brette R 2004 *J. Math. Bio.* **48** 38
- [6] Hertag L, Hass J, Golovko T, Durstewitz D 2012 *Front. Comput. Neurosci.* **6** 62
- [7] Koch C 1999 *Biophysics of Computation* (New York: New York Oxford University Press) pp11–13
- [8] Hamanaka H, Torikai H, Saito T 2006 *Circuits and Systems II: Express Briefs, IEEE Transactions on* **53** 1049
- [9] Ott E 1993 *Chaos in Dynamical Systems* (New York: Cambridge University Press) pp6–44
- [10] Saito T, Kabe T, Ishikawa Y, Matsuoka Y, Torikai H 2007 *Int. J. Bifurcat. Chaos* **17** 3373
- [11] Zhou D, Sun Y, Rangan A V, Cai D 2010 *J. Comput. Neurosci.* **28** 229
- [12] Hao B L 1993 *Starting with Parabolas: An Introduction to Chaotic Dynamics* (Shanghai: Shanghai Science and Technology Education Press) p123 (in Chinese) [郝柏林 1993 从抛物线谈起 - 混沌动力学引论 (上海: 上海科技教育出版社) 第 123 页]
- [13] Zhou G H, Xu J P, Bao B C, Zhang F, Liu X S 2010 *Chin. Phys. Lett.* **27** 090504
- [14] Zheng W M, Hao B L 1990 *Applied Symbolic Dynamics, in Experimental Study and Characterization of Chaos* (Singapore: World Scientific) pp363–459
- [15] Brown R, Chua L 1992 *Int. J. Bifurcat. Chaos* **2** 193
- [16] Huang W G, Tong Q Y 2002 *J. Electron. Informat. Technol.* **24** 6 (in Chinese) [黄文高, 童勤业 2002 电子与信息学报 **24** 6]
- [17] Zhang Z J, Chen S G 1989 *Acta Phys. Sin.* **38** 8 (in Chinese) [张忠建, 陈式刚 1989 物理学报 **38** 8]
- [18] Kohda T, Horio Y, Takahashi Y, Aihara K 2012 *Int. J. Bifurcat. Chaos* **22** 1230031

## Study of an integrate-and-discharge model with symbolic dynamics\*

Chen Chong<sup>1)</sup> Ding Jiong<sup>1)</sup> Zhang Hong<sup>1)†</sup> Chen Zhuo<sup>2)</sup>

1) (Department of Biomedical Engineering, Zhejiang University, Hangzhou 310027, China)

2) (Department of Automation, Zhejiang University City College, Hangzhou 310015, China)

(Received 3 March 2013; revised manuscript received 1 April 2013)

### Abstract

An integrate-and-discharge model (IDM) is proposed on the basis of an integrate-and-fire model (IFM). Compared with the IFM, the IDM can obtain rich dynamic information including chaos, phase locking, etc., without using varying threshold modulation. The corresponding relation between output symbolic sequences and parameters (i.e., frequency, amplitude, resistance and capacity) of the IDM is established by using symbolic dynamics. Moreover, a method of obtaining symbolic sequence as well as an ordering rule is presented. Simulation and circuit experiment validate the correctness of the method and the rule. The results of circuit experiment show that the frequency resolution can reach up to 0.05 Hz in some frequency ranges and the amplitude resolution can reach up to 1  $\mu$ A.

**Keywords:** nonlinear circuit, chaos, integrate-and-discharge model, symbolic dynamics

**PACS:** 05.45.–a, 05.45.Ac, 07.07.Df, 87.15.A–

**DOI:** 10.7498/aps.62.140502

\* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 60871085) and the Natural Science Foundation of Zhejiang Province, China (Grant No. Y1100119).

† Corresponding author. E-mail: paulpeter@zju.edu.cn