

噪声下时滞复杂网络的局部自适应 H 无穷一致性*

涂俐兰[†] 刘红芳 余乐

(武汉大学, 冶金工业过程系统科学湖北省重点实验室, 武汉 430065)

(2013年2月20日收到; 2013年4月2日收到修改稿)

针对具有噪声的一般时滞复杂动力网络, 研究了它的局部自适应 H 无穷一致性问题, 其中网络包含未知但有界的非线性耦合函数、节点和耦合项都具有时变时滞. 基于李雅普诺夫稳定性理论, 线性矩阵不等式优化技术以及自适应控制方法, 提出了局部自适应 H 无穷一致充分条件, 这些条件不仅可以保证受噪声扰动的网络获得鲁棒渐近一致, 而且可以让网络达到一个给定的鲁棒 H 无穷水平. 数值模拟验证了所提出的方法的可行性和有效性.

关键词: H 无穷一致, 时滞复杂网络, 噪声, 线性矩阵不等式

PACS: 05.45.Xt

DOI: 10.7498/aps.62.140506

1 引言

复杂网络的每个动力节点的一致性问题是复杂动力网络研究中的一个有趣且有意义的问题. 最主要的原因是网络的一致性在各个领域都有许多应用, 譬如在通信网络中的信息交换一致、数值信号、模拟信号的一致性转换等等^[1-4]. 在过去的 20 年里, 各种各样的复杂网络的一致性问题的研究已被深入地探讨^[2,5-11].

但是, 在这些文献中, 很少涉及具有噪声扰动的复杂网络. 在实际生活中, 因为不确定因素的存在, 例如在物理系统中的随机力以及由环境的不确定所产生的噪声等, 需要考虑噪声造成的干扰, 而且在网络之间或在子系统中的信号传输存在环境干扰是不可避免的. 当分析复杂网络的动力学行为时, 获得的结果经常受到外部噪声的极大影响^[4,12]. 文献 [4] 研究了因特网的鲁棒性和脆弱性. 文献 [12] 探讨了基因调控网络在外部干扰下的鲁棒性和演化能力. 不具有外部噪声干扰的复杂网络的一致性问题的研究得不多^[13-17]. 文献 [13, 14] 研究了随机扰动下的离散复杂网络的一致性问题的研究; 文献 [15] 提出了具有马尔可夫跳跃随机复杂动力网

络的一致标准; Li 等^[16] 研究了利用 H 无穷控制方法使得具有外部扰动的线性复杂网络达到一致; Ke 等^[17] 研究了具有随机扰动的一般时滞复杂动力网络的一致性问题的研究.

因为有噪声干扰的存在, 在时滞复杂动力网络的实际研究中, 必须考虑噪声因素, 这对于研究具有噪声的复杂网络的稳定性非常重要. 在经典控制理论中, 对控制系统的外部干扰和内部的参数扰动, 人们利用反馈和前馈来尽量消除它们的影响, 改善系统的性能. H 无穷控制方法和自适应控制方法是处理这类问题的两个有效的方法^[18-20]. 基于 H 无穷控制和自适应控制, Wei 和 Wang^[18] 对混沌系统的一致性进行了研究; Wang 等^[19] 讨论了不确定系统的控制问题; Lin 等^[20] 研究了不确定分数阶混沌系统的一致性问题的研究. 利用 H 无穷方法, 复杂网络不仅可以获得内部的稳定性 (鲁棒稳定) 而且可以满足外部一定的相容性 (鲁棒水平). 同时将自适应方法和 H 无穷方法应用到具有外部噪声的复杂动力网络中将是一个具有挑战性的问题.

基于以上分析, 本文研究具有噪声的时滞复杂动力网络的自适应 H 无穷一致性问题, 其中网络包含未知但有界的非线性耦合函数、节点和耦合项都具有时变时滞, 这种网络代表了实际生活中的很多网络. 利用李雅普诺夫方法和线性矩阵不等式

* 国家自然科学基金 (批准号: 60904060, 61104127) 资助的课题.

[†] 通讯作者. E-mail: tulilan2012@163.com

(LMI) 方法, 提出了两个新的局部自适应 H 无穷一致性充分条件. 根据这些控制技术, 复杂网络的内部将达到自适应渐近一致, 而复杂网络外部则因为有外部噪声的存在而达到了一个鲁棒 H 无穷水平. 所以, 本文具有两个创新点: 1) 研究的复杂网络较其他文献更具有一般性, 因为我们考虑的网络不仅包含外部噪声, 而且含有非线性的耦合函数、时变时滞同时出现在节点系统和网络耦合项中; 2) 利用自适应控制和 H 无穷控制方法, 从理论上提出了这种网络的局部自适应 H 无穷一致性充分条件, 这些条件简单易行.

2 问题的提出和预备知识

2.1 问题的提出

考虑一个由 N 个相同节点构成的时滞复杂动力网络, 网络中每个节点都是一个 n 维系统. 整个网络的状态方程可表示为

$$\begin{aligned} \dot{x}_i(t) &= f(x_i(t - \tau(t))) \\ &+ c \sum_{j=1}^N A_{ij} H(x_j(t), x_j(t - \tau(t))) + G w_i(t), \\ i &= 1, 2, \dots, N, \end{aligned} \quad (1)$$

其中 $f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ 是一个连续可微的有界非线性函数, $x_i = (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{in})^T \in \mathbf{R}^n$ 是第 i 个节点的状态变量, $\tau(t)$ 是每个节点的时变时滞, 它连续可微且满足

$$\dot{\tau}(t) \leq \tau < \infty, \quad (2)$$

其中 τ 是已知的非零常数, 常数 $c > 0$ 是耦合强度, $A = (A_{ij})_{N \times N}$ 是网络的外部耦合矩阵. 其中 A_{ij} 定义如下: 若节点 i 和节点 $j (j \neq i)$ 之间有连接, 那么 $A_{ij} = A_{ji} = 1$; 否则, $A_{ij} = A_{ji} = 0 (j \neq i)$. 而且矩阵 A 的对角线元素定义为

$$A_{ii} = - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N A_{ij} = - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N A_{ji}, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (3)$$

G 是一个具有适当维数的矩阵, $w_i(t) \in \mathbf{R}^n$ 是外部噪声, $H: \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ 是未知但有界的非线性函数. 特别地, 当 H 是线性函数时, 网络 (1) 可以写成

$$\begin{aligned} \dot{x}_i(t) &= f(x_i(t - \tau(t))) \\ &+ c \sum_{j=1}^N A_{ij} (C x_j(t) + D x_j(t - \tau(t))) + G w_i(t), \end{aligned}$$

$$i = 1, 2, \dots, N. \quad (4)$$

其中 C 和 D 是两个具有适当维数的矩阵.

注 1 在本文, 我们主要讨论网络 (1) 在控制器 $u_i (i = 1 \dots N)$ 的作用下的局部自适应 H 无穷一致性问题, 所以, 网络 (1) 的状态方程施加控制器可表示为

$$\begin{aligned} \dot{x}_i(t) &= f(x_i(t - \tau(t))) \\ &+ c \sum_{j=1}^N A_{ij} H(x_j(t), x_j(t - \tau(t))) + G w_i(t) + u_i, \\ i &= 1, 2, \dots, N. \end{aligned} \quad (5)$$

定义 1 (自适应渐近一致^[9]) 一般地, 若

$$x_1(t) = x_2(t) = \dots = x_N(t) = s(t) \quad (t \rightarrow \infty), \quad (6)$$

则称复杂动力网络 (5) 渐近一致, 其中 $s(t) \in \mathbf{R}^n$ 是下面孤立节点系统的解

$$\dot{s}(t) = f(s(t - \tau(t))). \quad (7)$$

假设 $e_i(t) = x_i(t) - s(t)$, 由网络 (5) 和系统 (7), 我们有误差系统

$$\begin{aligned} \dot{e}_i(t) &= \bar{f}(e_i(t - \tau(t))) \\ &+ c \sum_{j=1}^N A_{ij} \bar{H}(e_j(t), e_j(t - \tau(t))) + G w_i(t) + u_i, \\ i &= 1, 2, \dots, N, \end{aligned} \quad (8)$$

其中 $\bar{f}(e_i(t - \tau(t))) = f(x_i(t - \tau(t))) - f(s(t - \tau(t)))$ 且

$$\begin{aligned} \bar{H}(e_j(t), e_j(t - \tau(t))) \\ = H(x_j(t), x_j(t - \tau(t))) - H(s(t), s(t - \tau(t))). \end{aligned}$$

注 2 由上面分析可知, 复杂网络 (5) 达到一致的充分必要条件是误差系统 (8) 在控制器的作用下的状态变量趋于零, 所以我们的问题就转而研究误差系统 (8).

下面, 我们给出自适应 H 无穷一致的定义.

定义 2 (自适应 H 无穷一致^[21]) 给定零初始值和一个噪声扰动衰减水平值 $\gamma > 0$, 在合适的控制器 u_i 下, 当网络的误差系统 (8) 满足如下条件 (9), 则称网络 (5) 达到自适应 H 无穷一致,

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e_i^T(t) S e_i(t) dt < \gamma^2 \int_0^\infty w_i^T(t) w_i(t) dt, \\ i &= 1, 2, \dots, N, \end{aligned} \quad (9)$$

其中 S 为正定对称矩阵.

2.2 预备知识

为了更好地说明问题, 本文总假设 \mathbf{E} 是具有合适维数的单位矩阵, 所用的范数 $\|\cdot\|$ 为 1-范数, 并给出下面几个假设和引理.

假设 1 设 $\mathbf{B}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{D}f(s(t)) = (b_{ij}(t))_{n \times n} \in \mathbf{R}^{n \times n}$ 是 $f(x(t))$ 在 $s(t)$ 上的雅可比矩阵. 同时, 假设 $\mathbf{B} = (b_{ij})_{n \times n} \in \mathbf{R}^{n \times n}$, 其中 b_{ij} 是 $b_{ij}(t)$ ($t \in \mathbf{R}$) 的最大值.

假设 2 设对于所有的 $x \in \mathbf{R}^n$, 存在矩阵 $\mathbf{K}_1, \mathbf{K}_2 \in \mathbf{R}^{n \times n}$ 使得

$$\begin{aligned} & \|\bar{\mathbf{H}}(x(t), x(t - \tau(t)))\|^2 \\ & \leq \|\mathbf{K}_1 x(t)\|^2 + \|\mathbf{K}_2 x(t - \tau(t))\|^2. \end{aligned} \quad (10)$$

引理 1 对于任意矩阵 $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathbf{R}^{n \times m}$, 下面的矩阵不等式成立

$$\mathbf{X}^T \mathbf{Y} + \mathbf{Y}^T \mathbf{X} \leq \mathbf{X}^T \mathbf{A} \mathbf{X} + \mathbf{Y}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{Y},$$

其中 $\mathbf{A}^T = \mathbf{A} > 0, \mathbf{A} \in \mathbf{R}^{n \times n}$.

引理 2 (Schur complement^[22]) 假设 $\mathbf{Q}(x) = \mathbf{Q}(x)^T, \mathbf{R}(x) = \mathbf{R}(x)^T$ 和 $\mathbf{S}(x)$ 都是 x 的矩阵函数, 下列线性矩阵不等式

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Q}(x) & \mathbf{S}(x) \\ \mathbf{S}(x)^T & \mathbf{R}(x) \end{bmatrix} < 0$$

等价于下列条件中的任何一个

- 1) $\mathbf{R}(x) < 0, \mathbf{Q}(x) - \mathbf{S}(x)\mathbf{R}(x)^{-1}\mathbf{S}(x)^T < 0,$
- 2) $\mathbf{Q}(x) < 0, \mathbf{R}(x) - \mathbf{S}^T(x)\mathbf{Q}(x)^{-1}\mathbf{S}(x) < 0.$

3 主要结果

在本节, 我们将提出复杂动力网络 (5) 的局部自适应 H 无穷一致性充分条件.

定理 1 当假设 1 和 2 成立时, 对于给定的 $\mathbf{S} = \mathbf{S}^T > 0$ 和 $\gamma > 0$, 若存在两个正定的矩阵 \mathbf{P} 和 \mathbf{Q} 使得

$$\begin{bmatrix} -2\alpha_i^* \mathbf{P} + \mathbf{Q} + \mathbf{S} + \frac{1}{\gamma^2} \mathbf{P} \mathbf{G} \mathbf{G}^T \mathbf{P} & \mathbf{P} \mathbf{B} & \mathbf{K}_1^T & 0 \\ \mathbf{B}^T \mathbf{P} & -(1 - \tau) \mathbf{Q} & 0 & \mathbf{K}_2^T \\ \mathbf{K}_1 & 0 & \frac{-1}{c \sum_{j=1}^N |A_{ji}|} \mathbf{E} & 0 \\ 0 & \mathbf{K}_2 & 0 & \frac{-1}{c \sum_{j=1}^N |A_{ji}|} \mathbf{E} \end{bmatrix} < 0, \quad (11)$$

成立, 那么网络 (1) 在控制器

$$u_i(t) = -\alpha_i e_i(t) \quad (12)$$

和自适应律

$$\dot{\alpha}_i = 2\beta_i e_i^T(t) \mathbf{P} e_i(t) \quad (13)$$

的作用下达到自适应 H 无穷一致, 其中 α_i^* 是 α_i 的近似值, 而 β_i 为正常数.

证明 对网络 (8) 关于 $s(t)$ 进行线性化, 我们有

$$\begin{aligned} \dot{e}_i(t) &= \mathbf{B}(t - \tau(t)) e_i(t - \tau(t)) \\ &+ c \sum_{j=1}^N \mathbf{A}_{ij} \bar{\mathbf{H}}(e_j(t), e_j(t - \tau(t))) + \mathbf{G} w_i(t) + u_i, \\ &i = 1, 2, \dots, N. \end{aligned} \quad (14)$$

构造一个李雅普诺夫函数为

$$\begin{aligned} V(t) &= \sum_{i=1}^N \left[e_i^T(t) \mathbf{P} e_i(t) + \int_{t-\tau(t)}^t e_i^T(s) \mathbf{Q} e_i(s) ds \right] \\ &+ \sum_{i=1}^N \frac{(\alpha_i - \alpha_i^*)^2}{2\beta_i}, \end{aligned} \quad (15)$$

则 $V(t)$ 在控制器 (12) 和自适应律 (13) 的作用下, 关于误差系统 (14) 的导数有

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= \sum_{i=1}^N \left(\dot{e}_i^T(t) \mathbf{P} e_i(t) + e_i^T(t) \mathbf{P} \dot{e}_i(t) + e_i^T(t) \mathbf{Q} e_i(t) \right. \\ &\quad \left. - (1 - \dot{\tau}(t)) e_i^T(t - \tau(t)) \mathbf{Q} e_i(t - \tau(t)) \right) \\ &+ \sum_{i=1}^N \left[\frac{(\alpha_i - \alpha_i^*) \dot{\alpha}_i}{\beta_i} \right] \\ &= \sum_{i=1}^N \left[e_i^T(t - \tau(t)) \mathbf{B}^T(t - \tau(t)) \mathbf{P} e_i(t) \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + c \sum_{j=1}^N \mathbf{A}_{ij} \bar{\mathbf{H}}^T(e_j(t), e_j(t-\tau(t))) \mathbf{P} e_i(t) \\
 & + w_i^T(t) \mathbf{G}^T \mathbf{P} e_i(t) \\
 & + e_i^T(t) \mathbf{P} \mathbf{B}(t-\tau(t)) e_i(t-\tau(t)) \\
 & + c \sum_{j=1}^N \mathbf{A}_{ij} e_i^T(t) \mathbf{P} \bar{\mathbf{H}}(e_j(t), e_j(t-\tau(t))) \\
 & + e_i^T(t) \mathbf{P} \mathbf{G} w_i(t) + e_i^T(t) \mathbf{Q} e_i(t) \\
 & - (1-\tau(t)) e_i^T(t-\tau(t)) \mathbf{Q} e_i(t-\tau(t)) \\
 & - 2\alpha_i^* e_i^T(t) \mathbf{P} e_i(t) \Big].
 \end{aligned}$$

由引理 1, 有

$$\begin{aligned}
 & w_i^T(t) \mathbf{G}^T \mathbf{P} e_i(t) + e_i^T(t) \mathbf{P} \mathbf{G} w_i(t) \\
 & \leq \gamma^2 w_i^T(t) w_i(t) + \frac{1}{\gamma^2} e_i^T(t) \mathbf{P} \mathbf{G} \mathbf{G}^T \mathbf{P} e_i(t) \quad (16)
 \end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned}
 & \bar{\mathbf{H}}^T(e_j(t), e_j(t-\tau(t))) \mathbf{P} e_i(t) \\
 & + e_i^T(t) \mathbf{P} \bar{\mathbf{H}}(e_j(t), e_j(t-\tau(t))) \\
 & \leq \bar{\mathbf{H}}^T(e_j(t), e_j(t-\tau(t))) \bar{\mathbf{H}}(e_j(t), e_j(t-\tau(t))) \\
 & + e_i^T(t) \mathbf{P}^2 e_i(t), \quad (17)
 \end{aligned}$$

所以,

$$\begin{aligned}
 \dot{V}(t) & \leq \sum_{i=1}^N \left[e_i^T(t-\tau(t)) \mathbf{B}^T(t-\tau(t)) \mathbf{P} e_i(t) + e_i^T(t) \mathbf{P} \mathbf{B}(t-\tau(t)) e_i(t-\tau(t)) + \gamma^2 w_i^T(t) w_i(t) + e_i^T(t) \mathbf{Q} e_i(t) \right. \\
 & \quad \left. - (1-\tau(t)) e_i^T(t-\tau(t)) \mathbf{Q} e_i(t-\tau(t)) + \frac{1}{\gamma^2} e_i^T(t) \mathbf{P} \mathbf{G} \mathbf{G}^T \mathbf{P} e_i(t) - 2\alpha_i^* e_i^T(t) \mathbf{P} e_i(t) \right] \\
 & \quad + c \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \mathbf{A}_{ij} \left(\bar{\mathbf{H}}^T(e_j(t), e_j(t-\tau(t))) \times \bar{\mathbf{H}}(e_j(t), e_j(t-\tau(t))) + e_i^T(t) \mathbf{P}^2 e_i(t) \right).
 \end{aligned}$$

根据 (10) 式, 上面的不等式表示为

$$\begin{aligned}
 \dot{V}(t) & \leq \sum_{i=1}^N \left[e_i^T(t-\tau(t)) \mathbf{B}^T(t-\tau(t)) \mathbf{P} e_i(t) + e_i^T(t) \mathbf{P} \mathbf{B}(t-\tau(t)) e_i(t-\tau(t)) + \gamma^2 w_i^T(t) w_i(t) \right. \\
 & \quad \left. + e_i^T(t) \mathbf{Q} e_i(t) - (1-\tau) e_i^T(t-\tau(t)) \mathbf{Q} e_i(t-\tau(t)) + \frac{1}{\gamma^2} e_i^T(t) \mathbf{P} \mathbf{G} \mathbf{G}^T \mathbf{P} e_i(t) - 2\alpha_i^* e_i^T(t) \mathbf{P} e_i(t) \right] \\
 & \quad + \sum_{i=1}^N \left(c \sum_{j=1}^N |\mathbf{A}_{ji}| \right) \left(e_i^T(t) \mathbf{K}_1^T \mathbf{K}_1 e_i(t) + e_i^T(t-\tau(t)) \mathbf{K}_2^T \mathbf{K}_2 e_i(t-\tau(t)) \right) \\
 & = \sum_{i=1}^N \left[e_i^T(t) \left(\frac{1}{\gamma^2} \mathbf{P} \mathbf{G} \mathbf{G}^T \mathbf{P} - 2\alpha_i^* \mathbf{P} + \mathbf{Q} + \mathbf{S} + \left(c \sum_{j=1}^N |\mathbf{A}_{ji}| \right) \mathbf{K}_1^T \mathbf{K}_1 \right) e_i(t) + \gamma^2 w_i^T(t) w_i(t) \right. \\
 & \quad \left. + e_i^T(t-\tau(t)) \left(\left(c \sum_{j=1}^N |\mathbf{A}_{ji}| \right) \mathbf{K}_2^T \mathbf{K}_2 - (1-\tau) \mathbf{Q} \right) e_i(t-\tau(t)) - e_i^T(t) \mathbf{S} e_i(t) \right] \\
 & \quad + \sum_{i=1}^N \left(e_i^T(t-\tau(t)) \mathbf{B}^T \mathbf{P} e_i(t) + e_i^T(t) \mathbf{P} \mathbf{B} e_i(t-\tau(t)) \right). \quad (18)
 \end{aligned}$$

假设

$$\left[\begin{array}{cc} \frac{1}{\gamma^2} \mathbf{P} \mathbf{G} \mathbf{G}^T \mathbf{P} - 2\alpha_i^* \mathbf{P} + \mathbf{Q} + \mathbf{S} + \left(c \sum_{j=1}^N |\mathbf{A}_{ji}| \right) \mathbf{K}_1^T \mathbf{K}_1 & \mathbf{P} \mathbf{B} \\ \mathbf{B}^T \mathbf{P} & \left(c \sum_{j=1}^N |\mathbf{A}_{ji}| \right) \mathbf{K}_2^T \mathbf{K}_2 - (1-\tau) \mathbf{Q} \end{array} \right] < 0, \quad (19)$$

则

$$\dot{V}(t) \leq \sum_{i=1}^N \left[-e_i^T(t) \mathbf{S} e_i(t) + \gamma^2 w_i^T(t) w_i(t) \right]. \quad (20)$$

对不等式 (20) 求从 0 到 ∞ 的定积分, 有

$$V(\infty) - V(0)$$

$$< \sum_{i=1}^N \left[- \int_0^\infty e_i^T(t) \mathbf{S} e_i(t) dt + \gamma^2 \int_0^\infty w_i^T(t) w_i(t) dt \right].$$

因为 $V(\infty) \geq 0$, 且 $V(0) = 0$, 所以

$$V(\infty) + \sum_{i=1}^N \int_0^\infty e_i^T(t) \mathbf{S} e_i(t) dt < \sum_{i=1}^N \gamma^2 \int_0^\infty w_i^T(t) w_i(t) dt.$$

从而,

$$\int_0^\infty e_i^T(t) S e_i(t) dt < \gamma^2 \int_0^\infty w_i^T(t) w_i(t) dt,$$

上式意味着在各种假设下, 复杂网络 (8) 达到了局部自适应 H 无穷渐近一致. 而且, 要注意到不等式 (19) 不是标准的 LMI 形式, 利用引理 2, 可以把它改写为不等式 (11). 至此, 证毕.

定理 1 提出了噪声下的复杂网络 (1) 达到自适应 H 无穷一致的标准. 下面的定理 2 表明了当复杂网络 (1) 没有外部噪声的时候, 网络内部获得自适应渐近一致的充分条件.

定理 2 当假设 1 和 2 成立时, 对于给定的 $S = S^T > 0$, 若存在两个正定矩阵 P 和 Q , 使得

$$\begin{bmatrix} -2\alpha_i^* P + Q + S & PB & K_1^T & 0 \\ B^T P & -(1-\tau)Q & 0 & K_2^T \\ K_1 & 0 & \frac{-1}{c \sum_{j=1}^N |A_{ji}|} E & 0 \\ 0 & K_2 & 0 & \frac{-1}{c \sum_{j=1}^N |A_{ji}|} E \end{bmatrix} < 0 \quad (21)$$

成立, 则没有噪声的复杂网络 (1) 在控制器 (12)、自适应律 (13) 的作用下, 达到自适应渐近一致.

证明 假设 $w_i(t) = 0$, 类似于定理 1 的证明, 由 (18) 式, 我们有

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) \leq & \sum_{i=1}^N \left[-2\alpha_i^* e_i^T(t) P e_i(t) + e_i^T(t) Q e_i(t) - (1-\tau) e_i^T(t-\tau(t)) Q e_i(t-\tau(t)) + e_i^T(t) P B e_i(t-\tau(t)) \right. \\ & \left. + \left(c \sum_{j=1}^N |A_{ji}| \right) \left(e_i^T(t) K_1^T K_1 e_i(t) + e_i^T(t-\tau(t)) K_2^T K_2 e_i(t-\tau(t)) \right) + e_i^T(t-\tau(t)) B^T P e_i(t) \right] \end{aligned}$$

当

$$\begin{bmatrix} -2\alpha_i^* P + Q + S + \left(c \sum_{j=1}^N |A_{ji}| \right) K_1^T K_1 & PB \\ B^T P & \left(c \sum_{j=1}^N |A_{ji}| \right) K_2^T K_2 - (1-\tau)Q \end{bmatrix} < 0,$$

由引理 2, 它等价于不等式 (21), 我们有

$$\dot{V}(t) \leq \sum_{i=1}^N [-e_i^T(t) S e_i(t)].$$

所以, 没有噪声的网络 (1) 在控制器 (12)、自适应律 (13) 的作用下, 达到自适应渐近一致. 证毕.

注 3 当耦合函数 H 是线性函数时, 也即网络 (4), 则同样可以获得复杂网络 (4) 达到自适应 H 无穷一致的充分条件. 这时, 定理 1 和定理 2 中的线性矩阵不等式 (11) 和 (21) 将更简单, 只需要把 $K_1 = C$ 和 $K_2 = D$ 代入定理 1 和定理 2 即可.

4 数值模拟

为了验证前面理论分析的主要结果, 下面我们将对一个由 100 个节点构成的小世界网络进行数

值模拟. 考虑一个具有 100 个节点的小世界网络 (1), 网络 (1) 的平均路径长度为 0.5814, 它的每个节点动力系统都是具有时滞的 Lorenz 系统

$$\begin{cases} \dot{x}_{i1} = a_1(x_{i2} - x_{i1}), \\ \dot{x}_{i2} = a_3 x_{i1} - x_{i1} x_{i3} - x_{i2}, \\ \dot{x}_{i3} = x_{i1} x_{i2} - a_2 x_{i3}, \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, 100,$$

其中 a_1, a_2, a_3 是实数. 当 $a_1 = 10, a_2 = 8/3, a_3 = 28$ 时, Lorenz 系统是混沌的. 同时, 本数值模拟中, 设网络 (1) 的耦合函数为

$$\begin{aligned} H(x_i(t), x_i(t-\tau(t))) \\ = (x_{i1}^2(t), x_{i2}(t-\tau(t)), -x_{i3}(t-\tau(t)))^T \\ i = 1, 2, \dots, 100, \end{aligned}$$

设 $w_i(t)$ 是高斯噪声. 为了简单起见, 给定网络中的

参数分别为 $\tau(t) = 1$, $\mathbf{G} = (1, 1, 1)^T$, $c = 0.3$, $\gamma = 0.5$ 和 $\mathbf{S} = \text{diag}(0.1, 0.1, 0.1)$. 在所有的数值模拟中, 设初始值为 $\alpha_i = \beta_i = 0.5 * i$ ($i = 1, 2, \dots, 50$), 且设孤立系统的初始值为 $s = (3, -10, 8)$. 图 1 和图 2 分别是无噪声和有噪声的小世界网络 (1) 的动力轨迹图, 其中网络 (1) 的初始值为 $x_i = (-0.05i, 0.05i, 0.5i)$, $i = 1, 2, \dots, 100$. 因为噪声的存在, 在初始值完全相同的情形下, 图 1 系统轨迹在短时间内不同于图 2.

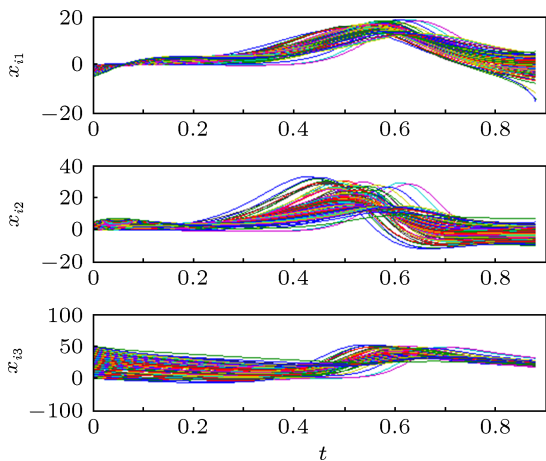


图 1 无噪声小世界网络 (1) 的运动轨迹

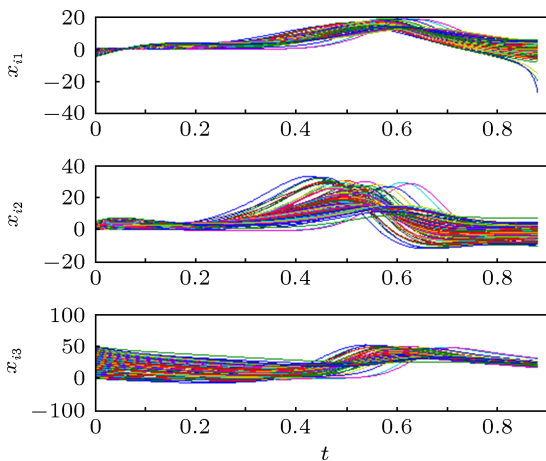


图 2 噪声下小世界网络 (1) 的运动轨迹

根据定理 1, 利用 Matlab 的 LMI 工具箱, 可以找到正定矩阵 \mathbf{P} 和 \mathbf{Q}

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 124.9420 & 6.7632 & -2.2380 \\ 6.7632 & 41.7484 & -36.0151 \\ -2.2380 & -36.0151 & 74.8563 \end{bmatrix},$$

使得满足定理 1 的条件 (11). 在上述条件下, 对无噪声和有噪声的网络 (1) 施加控制器 (12), (13), 获得了无噪声和有噪声情况下误差系统 (8) 的运动轨迹图, 如图 3 和图 5 所示. 图 3 的轨迹很快都渐近趋于零, 说明无噪声的网络 (1) 在控制器 (12), (13) 的作用下, 网络内部很快达到一致. 图 5 的第二个、第三个子图也很快趋于零, 而从第一个子图可以看出, 误差系统的轨迹在零的附近有很小的摆动, 说明在网络外部施加噪声的干扰, 网络的误差系统没有大的改变, 它的运动轨迹是有界的. 图 4 和图 6 分别表示无噪声和有噪声的情况下自适应律 (13) 的轨迹图, 它们都表明自适应控制律很快都趋于稳定值. 更进一步地, 图 7 说明在零初始条件下, 误差的 H_∞ 范数和外部噪声 H_∞ 范数的比值开方在扰动衰减水平 $\gamma = 0.5$ 之内, 证明了

$$\int_0^\infty e_i^T(t) \mathbf{S} e_i(t) dt \leq \gamma^2 \int_0^\infty w_i^T(t) w_i(t) dt,$$

也即网络 (1) 的各个节点达到了自适应 H 无穷一致, 从而验证了本文提出的理论的正确性和有效性.

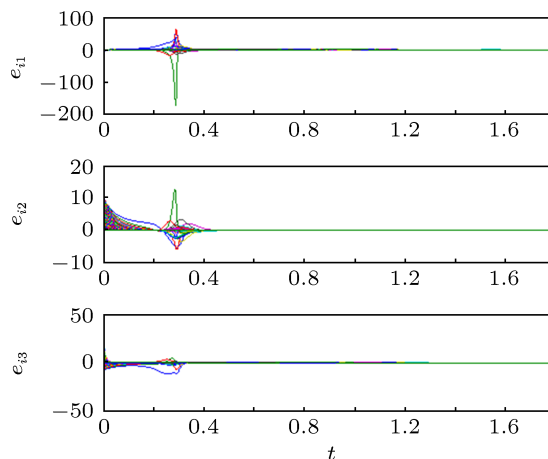


图 3 无噪声的误差系统 (8) 轨迹图

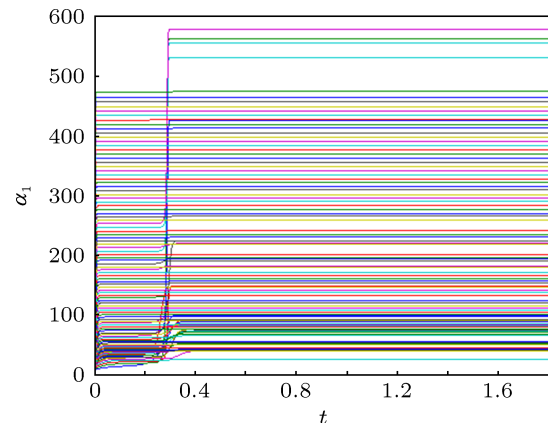


图 4 无噪声的自适应律轨迹图

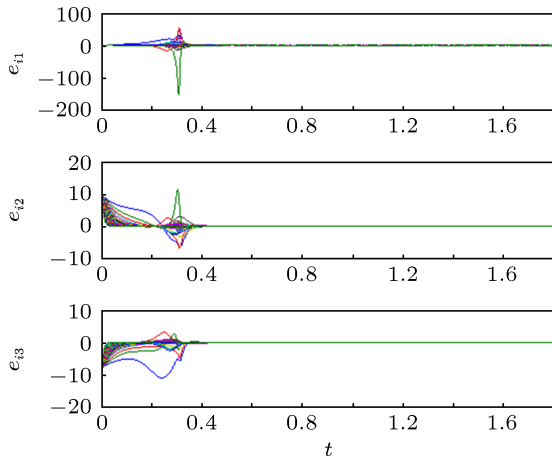


图5 有噪声的误差系统(8)轨迹图

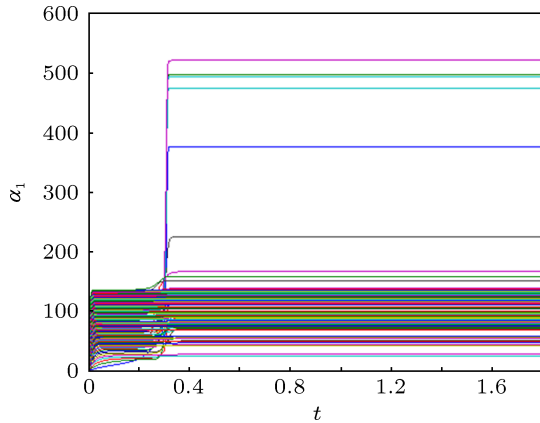


图6 有噪声的自适应律轨迹图

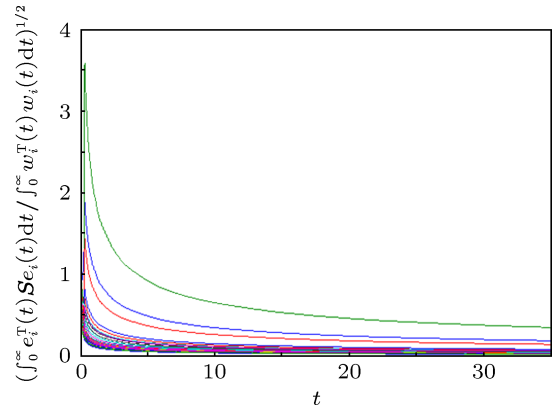


图7 误差的 H_∞ 范数和外部噪声的 H_∞ 范数的比值开方与时间关系图

5 结论

本文研究了具有噪声的时滞复杂动力网络的一致性问题, 其中网络具有非线性耦合函数、节点系统和耦合项都有时变时滞. 这种形式的网络代表了实际中的很多网络, 在以往的文献中很少涉及. 基于李亚普诺夫稳定性理论、LMI 技术、H 无穷控制和自适应控制方法, 本文提出了几个局部自适应 H 无穷一致充分条件. 这些条件能够保证网络的每个节点内部达到自适应 H 无穷一致, 在此基础上, 网络外部也达到了一定的 H 无穷衰减水平. 而且, 我们的假设和所获得的自适应控制器形式非常简单, 在实际中也便于实现. 最后, 本文做了非常详细的数值模拟, 这些数值模拟证明了我们所提出的理论的正确性和有效性.

- [1] Albert R, Barabási A L 2002 *Rev. Mod. Phys.* **74** 47
- [2] Wang X F, Chen G 2002 *IEEE Trans. Circuits Syst. I, Fundam. Theory Appl.* **49** 54
- [3] Wang X F, Li X, Chen G R 2006 *Theory and Application of Complex Networks* (Beijing: Tsinghua University Press) p7 (in Chinese) [汪小帆, 李翔, 陈关荣 2006 复杂网络理论及其应用 (北京: 清华大学出版社) 第 7 页]
- [4] Doyle J C, Alderson D L, Li L 2005 *PNAS* **102** 14497
- [5] Wang X F, Chen G R 2002 *Physica A* **310** 521
- [6] Kocarev L, Amato P 2005 *Chaos* **15** 024101
- [7] Zhou J, Chen T 2006 *IEEE Trans. Circuits Syst. I* **53** 733
- [8] Tu L L, Lu J A 2009 *Comput. Math. Appl.* **57** 28
- [9] Zhang Q J, Lu J A, Lü J H 2008 *IEEE Trans. Circuits Syst. II* **55** 183
- [10] Liu J L 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 040503 (in Chinese) [刘金良 2013 物理学报 **62** 040503]
- [11] Liang Y, Wang X Y 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 018901 (in Chinese) [梁义, 王兴元 2013 物理学报 **62** 018901]
- [12] Aldana M, Ballezaa E, Kauffman S, Resendiz O 2007 *J. Theor. Biol.* **245** 433
- [13] Liang J L, Wang Z D, Liu X H 2008 *Nonlinear Dyn.* **53** 153
- [14] Park J H, Lee S M, Jung H Y 2009 *J. Optim. Theory Appl.* **143** 357
- [15] Li H J, Yue D 2010 *J. Phys. A: Math. Theor.* **43** 105101
- [16] Li Z K, Duan Z S, Chen G R 2009 *Chin. Phys. B* **18** 5228
- [17] Ke C, Wang Z M, Tu L L 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 010508 (in Chinese) [柯超, 王志明, 涂俐兰 2013 物理学报 **62** 010508]
- [18] Wei R, Wang X Y 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 3298 (in Chinese) [魏荣, 王行愚 2004 物理学报 **53** 3298]
- [19] Wang Z Y, Huang L H, Zuo Y, Zhang L L 2010 *Int. J. Control Automat. Syst.* **8** 266
- [20] Lin T C, Kuo C H 2011 *ISA Trans.* **50** 548
- [21] Ahn C K, Jung S T, Kang S K, Joo S C 2010 *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.* **15** 2168
- [22] Boyd S, Ghaoui L E, Feron E, Balakrishnan V 1994 *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory* (Philadelphia: SIAM)

Local adaptive H_∞ consistency of delayed complex networks with noise*

Tu Li-Lan[†] Liu Hong-Fang Yu Le

(Hubei Province Key Laboratory of Systems Science in Metallurgical Process, Wuhan University of Science and Technology, Wuhan 430065, China)

(Received 20 February 2013; revised manuscript received 2 April 2013)

Abstract

The local adaptive H_∞ consistency is intensively investigated for delayed complex dynamical networks with noise. The network under consideration contains unknown but bounded nonlinear coupling functions and time-varying delays which appear in the coupling term and the node system simultaneously. Based on the Lyapunov stability theory, linear matrix inequality optimization technique and adaptive control, several local adaptive H_∞ consistency schemes are established which guarantee robust asymptotically consistency for each node of noise-perturbed network as well as achieving a prescribed robust H_∞ performance level. Finally, detailed and satisfactory numerical simulations validate the feasibility and the correctness of the proposed techniques.

Keywords: H_∞ consistency, delayed complex networks, noise, linear matrix inequality

PACS: 05.45.Xt

DOI: 10.7498/aps.62.140506

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 60904060, 61104127).

[†] Corresponding author. E-mail: tulilan2012@163.com