

## 分数阶布朗马达在闪烁棘齿势中的合作运输现象\*

赖莉 周薛雪 马洪 罗懋康†

(四川大学数学学院, 成都 610065)

(2013年1月20日收到; 2013年4月10日收到修改稿)

引入分数阶微积分理论, 建立耦合分数阶布朗马达在闪烁棘齿势中的合作运输模型, 利用分数阶差分法求得模型数值解并分析了模型参数对合作定向运输性质的影响. 发现在具有记忆性的分数阶棘齿系统中, 系统阶数与粒子间耦合强度不仅可影响粒子链运输速度, 还可使粒子链出现与整数阶方向相反的定向流; 在阶数固定下, 定向运输速度将随参数 (噪声强度、耦合强度、棘齿势峰值高度) 变化出现广义随机共振现象.

**关键词:** 分数阶布朗马达, 闪烁棘齿势, 合作定向运输, 广义随机共振

**PACS:** 05.10.Gg, 45.10.Hj

**DOI:** 10.7498/aps.62.150502

## 1 引言

非线性系统运输现象在许多方面都有体现且具体行为各异, 如漂移、扩散、热传导及随机共振等, 而能量和物质的定向运输在诸多运输现象中尤为重要<sup>[1]</sup>. 特别地, 棘齿系统即生物学中分子马达<sup>[2,3]</sup>的定向运输现象吸引了不同领域学者的广泛关注. 物理学方面, 棘齿系统能够从涨落 (噪声) 或非定向外界驱动力中吸收能量转化为定向运动能量; 生物学方面, 生物体内的各种生命活动 DNA 复制、细胞内物质运输以及肌肉收缩等均属于定向运输过程, 这些都是分子马达提供动力的结果<sup>[4]</sup>.

个体之间的耦合作用在定向运输中扮演了重要角色. 一方面, 多个布朗马达间的合作可主导定向运输的性质. Souza 等指出每个棘齿势周期内粒子数的奇偶将影响定向运输的方向<sup>[5]</sup>; Igarashi 等在研究弹性耦合粒子链在闪烁棘齿势中的定向运输中发现, 耦合粒子链的运输效率高于单个粒子<sup>[6]</sup>; Wang 等研究了耦合布朗马达的效应, 发现其在运输速度与效率等方面均优于单个马达<sup>[7,8]</sup>; Ai 等也在其研究中指出系统外界驱动力频率对马达链的运动方向有着重要影响<sup>[9]</sup>. 另一方面, 耦合作用在某些情况下甚至是产生定向运输的必要条件. Chen

等在研究中发现, 当阻尼力过大时, 单个马达被钉扎于势阱底部, 不能形成定向运输, 只有多个马达一起合作才能越过势垒产生定向运动<sup>[10]</sup>.

目前关于耦合布朗马达的定向运输引起了学者们的极大关注, 并取得了大量的研究成果, 但大多数研究关注的仍是整数阶系统<sup>[1-13]</sup>. 然而, 许多物理、生物过程以及黏弹性材料均具有“记忆性”, 整数阶动力系统在刻画这些过程时, 其局限性越来越突出; 特别地, 在一些远离平衡的复杂系统中, 弛豫为关于时间的幂律衰减, 朗之万方程中的阻尼速度不再适用. 处理上述局限的核心是引入分数阶微积分, 把轨道的历史贡献进来, 将通常的阻尼速度改为分数阶速度, 即位置的分数阶导数<sup>[14]</sup>. 由于分数阶微积分具有时间记忆性以及长程空间相关性, 近年来得到了迅速发展并广泛应用于黏弹性材料、反常扩散和运输机制的研究中<sup>[14,15]</sup>.

本文将分数阶微积分理论引入布朗马达合作运输, 建立了分数阶简谐耦合粒子在闪烁棘齿势场中的运输模型, 进而研究了粒子链的定向运输现象, 并通过数值模拟分析了模型参数对粒子链平均位移和平均速度的影响. 发现系统阶数与粒子间耦合强度不仅可影响粒子链运输速度, 还可使粒子链出现与整数阶方向相反的定向流; 此外, 在系统阶数固定时, 定向运输速度将随系统参数 (噪声强度、

\* 国家自然科学基金 (批准号: 11171238) 资助的课题.

† 通讯作者. E-mail: makaluo@scu.edu.cn

耦合强度、棘齿势峰值高度) 变化出现广义随机共振现象. 所谓广义随机共振是指系统响应的某些函数随系统的特征参数非单调变化的现象 [16], 也就是说存在最佳参数使得函数值达到最大.

## 2 模型

简谐耦合粒子在闪烁棘齿势场中的运输模型如图 1 所示 [6]. 所有  $N$  个粒子均附着在一个可伸缩的弹簧上, 粒子在弹簧上附着点的自由间距即弹簧自由长度为  $a$ . 粒子间近邻耦合强度为  $k$ . 这些粒子处于周期为  $L$  的非对称棘齿势  $W(x)$  中, 对单个粒子而言, 该棘齿势是独立闪烁 (开关) 的, 分别为  $W_{\text{on}}$  与  $W_{\text{off}}$ .

在整数阶模型中, 阻尼系数  $\gamma$  为恒定常数, 即考虑各布朗粒子所受阻尼力只与自身当前速度有关, 从而可将阻尼项记为  $\gamma\dot{x}_i = \gamma \int_0^t \delta(t-\tau)\dot{x}_i(\tau)d\tau$ ; 然而在很多物理和生物过程中, 非均匀介质, 特别是具有记忆性的黏弹性材料对粒子速度具有记忆性 [17], 粒子当前所受阻尼力不仅与当前速度有关, 还受到历史速度影响, 即粒子运动不具有马氏性, 且距当前时刻越近, 历史速度影响越大. 为此, 引入具有幂律记忆性的阻尼核函数  $\gamma(t)$  [18,19], 并将阻尼项改写为  $\int_0^t \gamma(t-\tau)\dot{x}_i(\tau)d\tau$ , 粒子运动方程可表述为

$$\int_0^t \gamma(t-\tau)\dot{x}_i(\tau)d\tau = k(x_{i+1} - 2x_i + x_{i-1}) - h_i(t) \frac{\partial W(x_i)}{\partial x_i} + \sqrt{2D}\xi_i(t), \quad i = 2, \dots, N-1. \quad (1)$$

其中  $x_i (i = 1, \dots, N)$  为第  $i$  个粒子位移, 系统棘齿势的闪烁由  $h_i(t)$  控制,  $D$  为噪声强度,  $\xi_i(t)$  为高斯白噪声, 满足  $\langle \xi_i(t) \rangle = 0, \langle \xi_i(t)\xi_j(t') \rangle = \delta_{ij}\delta(t-t')$ .

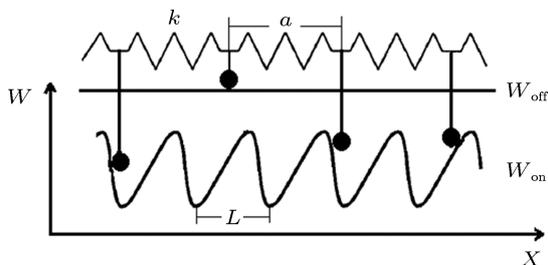


图 1 简谐耦合系统在闪烁棘齿势中的布朗马达运输模型

阻尼核函数  $\gamma(t) = \frac{\gamma_0}{\Gamma(1-\alpha)}|t|^{-\alpha}$  的函数图像如图 2 所示, 从图中可看到, 随时间  $t$  增大,  $\gamma(t)$  按

幂函数衰减, 且  $\alpha$  越大衰减越快. 由此可知, 该阻尼核函数能较好地刻画粒子在黏性介质中的运动特性. 不妨令  $\gamma_0 = 1$ , 则具有幂律记忆性阻尼核的系统模型描述为

$$\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{-\alpha} \dot{x}_i(\tau) d\tau = k(x_{i+1} - 2x_i + x_{i-1}) - h_i(t) \frac{\partial W(x_i)}{\partial x_i} + \sqrt{2D}\xi_i(t), \quad i = 2, \dots, N-1. \quad (2)$$

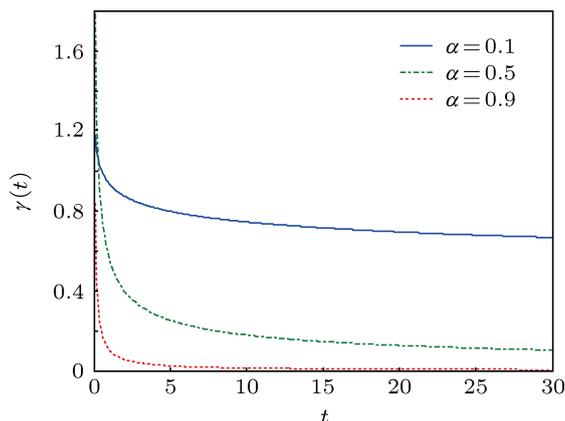


图 2 幂律记忆性阻尼核函数  $\gamma(t)$

另一方面, 根据 Caputo 分数阶微积分定义 [20]

$${}_0^C D_t^\alpha x(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{-\alpha} \dot{x}(\tau) d\tau, \quad (0 < \alpha < 1) \quad (3)$$

可得简谐耦合系统的分数阶布朗马达运输模型

$${}_0^C D_t^\alpha x_i = k(x_{i+1} - 2x_i + x_{i-1}) - h_i(t) \frac{\partial W(x_i)}{\partial x_i} + \sqrt{2D}\xi_i(t), \quad i = 2, \dots, N-1, \quad 0 < \alpha < 1. \quad (4)$$

下面的讨论我们采用周期边界条件, 即假设  $x_{N+1} = x_1 + Na, x_0 = x_N - Na$ , 可得第 1 个与第  $N$  个粒子运动方程为

$${}_0^C D_t^\alpha x_1 = k(x_2 - 2x_1 + x_N - Na) - h_1(t) \frac{\partial W(x_1)}{\partial x_1} + \sqrt{2D}\xi_1(t), \quad (5)$$

$${}_0^C D_t^\alpha x_N = k(x_1 - 2x_N + x_{N-1} + Na) - h_N(t) \frac{\partial W(x_N)}{\partial x_N} + \sqrt{2D}\xi_N(t). \quad (6)$$

我们选用  $W(x)$  为正弦棘齿势,  $h_i(t)$  为闪烁函数, 分别表述如下:

$$W(x) = -\frac{1}{2}U_0 \left[ \sin(2\pi x/L) + \frac{1}{4} \sin(4\pi x/L) \right], \quad (7)$$

其中  $L$  是势场的空间周期,  $U_0$  是正弦棘齿势的峰值高度;

$$h_i(t) = h(t) = \begin{cases} 1, & n\tau \leq t < n\tau + \tau_{\text{on}}, \\ 0, & n\tau + \tau_{\text{on}} \leq t < (n+1)\tau, \end{cases} \quad (8)$$

其中  $\tau_{\text{on}}$  是势存在的时间,  $\tau_{\text{off}}$  是势消失的时间, 闪烁周期为  $\tau = \tau_{\text{on}} + \tau_{\text{off}}$ .  $W(x)$  和  $h(t)$  的函数图象如图 3 所示.

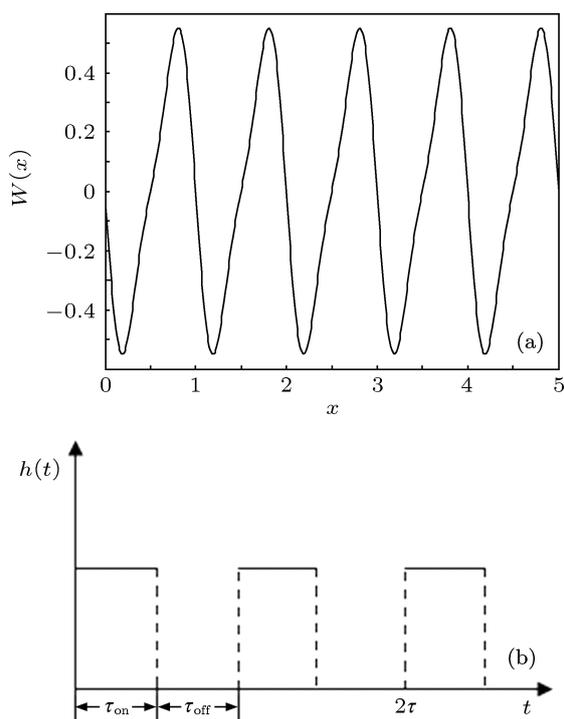


图 3 正弦棘齿势函数  $W(x)$  与闪烁函数  $h(t)$  (a) 正弦棘齿势函数  $W(x)$ ; (b) 闪烁函数  $h(t)$

### 3 数值模拟与分析

为了模拟方程 (4)—(6) 所刻画的布朗粒子运动, 我们采用分数阶差分法 [21], 其数值计算公式如下:

$$x_i(t_j) = T_s^\alpha \left\{ k [x_{i+1}(t_{j-1}) - 2x_i(t_{j-1}) + x_{i-1}(t_{j-1})] - h_i(t_{j-1}) \frac{\partial W(x_i)}{\partial x_i} + \sqrt{2D} \xi_i(t_{j-1}) \right\} - \sum_{l=1}^{j-1} (-1)^l \binom{\alpha}{l} x_i(t_{j-l}), \quad (9)$$

其中  $T_s$  是采样时间,  $t_j = (j-1)T_s$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ ,

$\binom{\alpha}{l} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-l+1)l!}$ . 我们主要关注粒子的合作运输现象, 为此我们选用粒子链平均速度描述粒子的运动:

$$V = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{x_i(t) - x_i(t_0)}{t - t_0}. \quad (10)$$

这里  $N$  为粒子数,  $t$  和  $t_0$  分别为数值模拟起始和终止时间. 在模拟实验中, 我们用  $\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{x_i(t) - x_i(t_0)}{t - t_0}$  ( $t$  充分大) 近似表示  $V$ . 采样时间  $T_s = 0.005$  s, 模拟时间为 50 s, 粒子数  $N = 10$ . 如无特别说明, 正弦棘齿势峰值高度  $U_0 = 5.5$ , 空间周期  $L = 1$ , 闪烁周期为 1.6 s, 其中势存在时间  $\tau_{\text{on}} = 0.8$  s, 耦合系数  $k = 1$ , 噪声强度  $D = 0.5$ .

#### 3.1 粒子链平均位移

当正弦棘齿势开启时, 大部分粒子被棘齿势束缚在势阱底部, 其粒子间距小于无势场时粒子的自由间距; 当势关闭时, 各粒子自由扩散, 由于简谐耦合作用相互远离, 将恢复到无势场时的平衡状态, 经过势消失时间  $\tau_{\text{off}}$  后, 粒子在空间的分布被展宽; 当正弦棘齿势重新开启时, 粒子将落入势阱中, 由于势的不对称性 (如图 3(a) 所示), 粒子落入棘齿势  $x$  轴负向一端的概率将高于落入  $x$  轴正向一端的概率. 因此, 随着棘齿势的不停开关, 从整体上看, 粒子将实现沿  $x$  轴负方向的定向运动.

另一方面, 在我们所讨论的分数阶模型中, 第  $i$  个粒子在  $t$  时刻所受阻尼力为  $\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{-\alpha} \dot{x}_i(\tau) d\tau$ , 即为粒子速度  $\dot{x}_i(t)$  在时间  $[0, t]$  内关于幂律记忆性阻尼核函数  $\gamma(t)$  的加权和. 由前述分析可知,  $\alpha$  越小  $\gamma(t)$  衰减越慢, 记忆性越强, 即第  $i$  个粒子的历史速度对  $t$  时刻阻尼力影响越大, 将使第  $i$  个粒子所受阻尼力越大, 即导致定向运动速度越小. 进一步, 当阻尼力足够大时, 将促使粒子反向越过势垒, 形成与整数阶反向的定向流, 即沿  $x$  轴正方向的定向运动.

图 4 给出了在系统其他参数不变只改变系统阶数情况下  $N = 10$  个粒子的平均位移  $x(t) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i(t)$  随时间的变化关系. 从图中可以看到, 当  $\alpha = 1$ , 即模型退化为整数阶时, 在非对称正弦棘齿势的作用下粒子链形成了负向的定向流; 随着  $\alpha$  的减小 (图 4(b), (c)), 粒子所受阻尼力增大, 粒子链负向流的速度减慢; 当  $\alpha$  进一步减小时, 进一步增

大的阻尼力使粒子反向越过势垒, 形成了正向的定向流, 且速度明显快于负向流速度.

### 3.2 粒子链平均速度与阶数的关系

图 5 给出了在不同噪声强度 (图 5(a)) 及不同棘齿势峰值高度 (图 5(b)) 下粒子链平均速度  $V$  与阶数  $\alpha$  的关系. 由于我们选取的正弦棘齿势在空间上具有周期性, 使得阻尼力随阶数  $\alpha$  变化发生振

荡, 因此, 在过阻尼情况下, 无论是固定噪声强度还是棘齿势峰值高度, 粒子链平均速度均相应地发生振荡. 图 5(a), (b) 中, 均能观测到明显的两个随阶数  $\alpha$  变化的共振峰, 并且阶数  $\alpha$  越小, 对当前阻尼力有实质贡献的历史也就越长, 粒子链所受阻尼力越强, 使得粒子链定向输运速度越慢, 故阶数越小, 共振峰峰值高度越低. 从图 5(a) 可以看到, 当  $\alpha < 0.7$  时, 粒子链保持正向运动, 且噪声强度越大, 输运速度越慢; 当  $\alpha > 0.7$  时, 噪声的作用使得粒子链产生

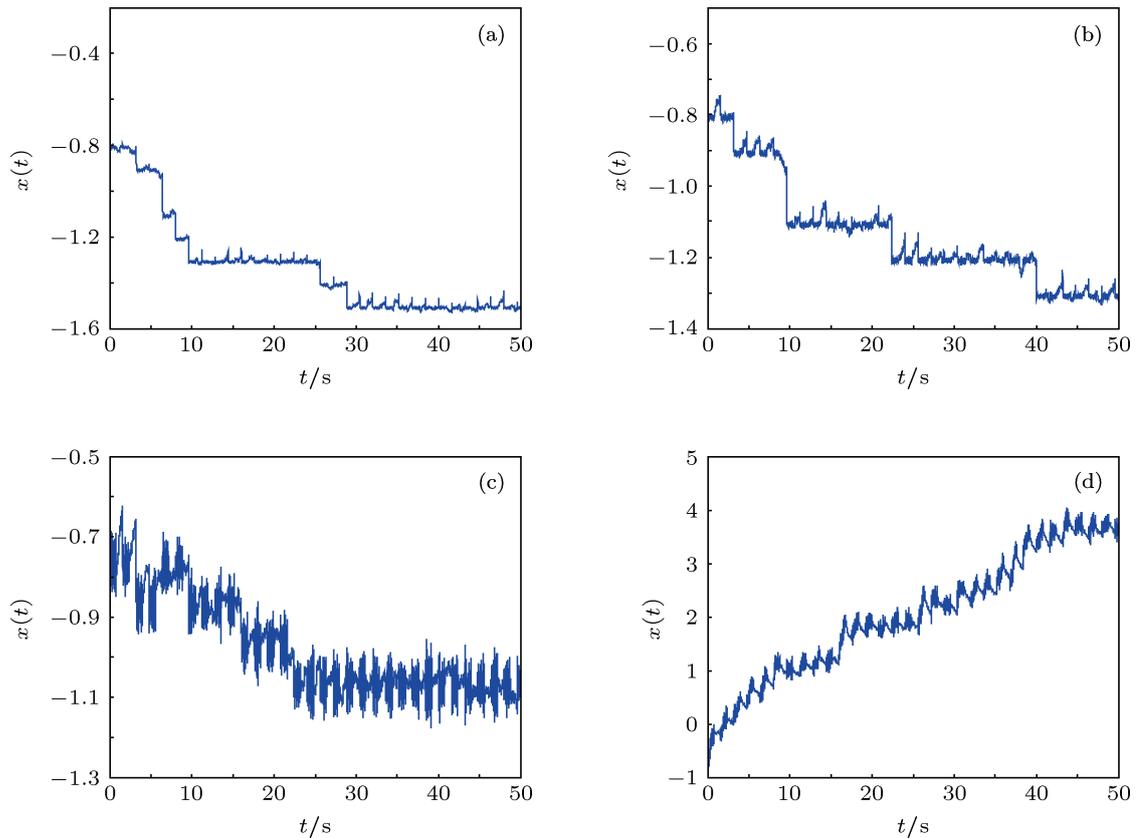


图 4 不同阶数情况下粒子链的平均位移 (a)  $\alpha = 1$ ; (b)  $\alpha = 0.89$ ; (c)  $\alpha = 0.79$ ; (d)  $\alpha = 0.69$

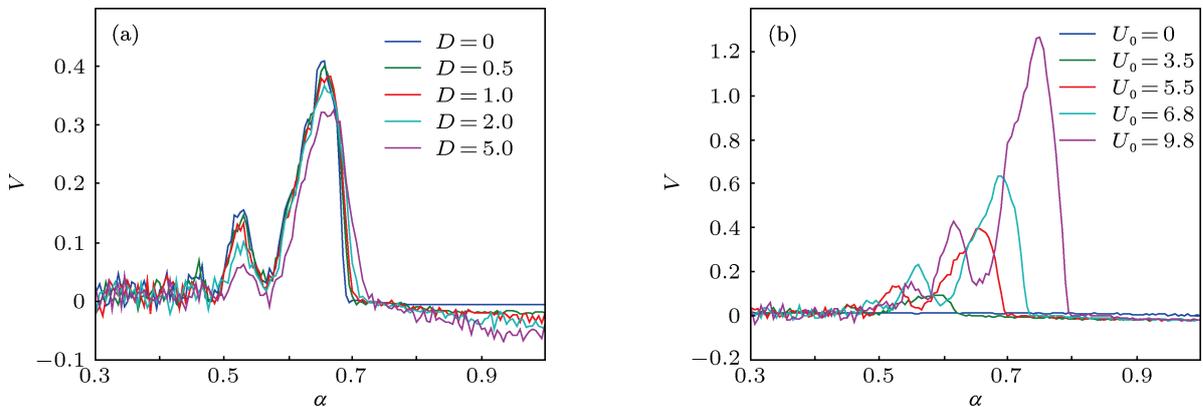


图 5 粒子链平均速度  $V$  与阶数  $\alpha$  的关系  $V(\alpha)$  (a) 不同噪声强度下  $V$  与  $\alpha$  关系  $V(\alpha)$ ; (b) 不同峰值高度下  $V$  与  $\alpha$  关系  $V(\alpha)$

负向运动,且随着噪声强度的增大,粒子链平均速度增大.从图 5(b) 可以看到,在无势场情况下 ( $U_0 = 0$ ),粒子链并未发生定向运动,势场存在时,无论势场峰值高低,粒子链均在某一阶数  $\alpha$  后由正向运动转变为负向运动,但其速度远慢于正向运动时的速度.当粒子链保持正向运动时,棘齿势峰值高度越大,粒子链极大平均速度就越大,且达到极大值的阶数  $\alpha$  越大.

### 3.3 阶数固定时,粒子链平均速度与系统其他参数的关系

本节给出了在阶数固定情况下,粒子链平均速度作为不同系统参数的函数与各参数的关系.通过模拟我们可看到粒子链平均速度对不同参数的依赖性,也能更好地分析各参数对分数阶布朗马达合作输运现象的影响.

#### 3.3.1 阶数固定时,粒子链平均速度与耦合强度的关系

我们考虑  $V$  为耦合强度  $k$  的函数(如图 6),在整数阶系统中,即  $\alpha = 1$  时,粒子链始终保持负向运动,在  $k < 2$  时,速度有较快的增长, $k > 2$  时速度并无明显变化.在分数阶系统中,如  $\alpha = 0.69, 0.7, 0.71$  时,由前面分析可知,在阻尼力作用下粒子链实现了正向运动,随着耦合强度的增强,粒子间相互作用增大,粒子链运动更为协调,故平均流速增大,但随着耦合强度进一步增强,各粒子被束缚在一起,限制了粒子链的输运速度,甚至存在一临界耦合强度  $k_0$ ,当  $k > k_0$  时,阻尼力不再足以使得粒子越过势垒实现正向运动,粒子流出现反转.从图中我们可以看到,正向和反向的输运速度均出现了随耦合强度变化的广义随机共振现象,即两个方向均存在使得粒子链达到极大平均速度的最佳  $k$  值,且阶数越大,最佳耦合强度也越大.由此,通过分析粒子链平均速度与耦合强度的关系,我们可选择相应的耦合强度调整粒子的输运方向及输运速度.

#### 3.3.2 阶数固定时,粒子链平均速度与噪声强度和棘齿势峰值高度的关系

图 7(a) 给出了粒子链平均速度  $V$  与噪声强度  $D$  的关系.当  $\alpha = 1$  时,系统无记忆,粒子链为负向运动,在  $D < 5$  时,速度有明显增长, $D > 5$  时速度无明显变化,但随着噪声强度的增大,速度波动不断加剧.当  $\alpha = 0.69, 0.71$  时,系统具有记忆性,粒子链为正向运动,随着噪声强度的增大,速度波动

也不断加剧,并且对不同的阶数,平均速度  $V$  均存在随噪声强度  $D$  变化的随机共振现象.进一步,由于阶数越低,系统对历史速度记忆性越强,而历史速度直接受到噪声强度的影响,故使得平均速度达到极大值的噪声强度明显下降.

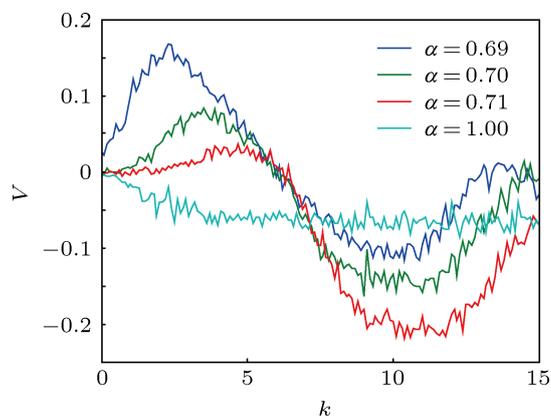


图 6  $V$  与耦合强度  $k$  的关系  $V(k)$

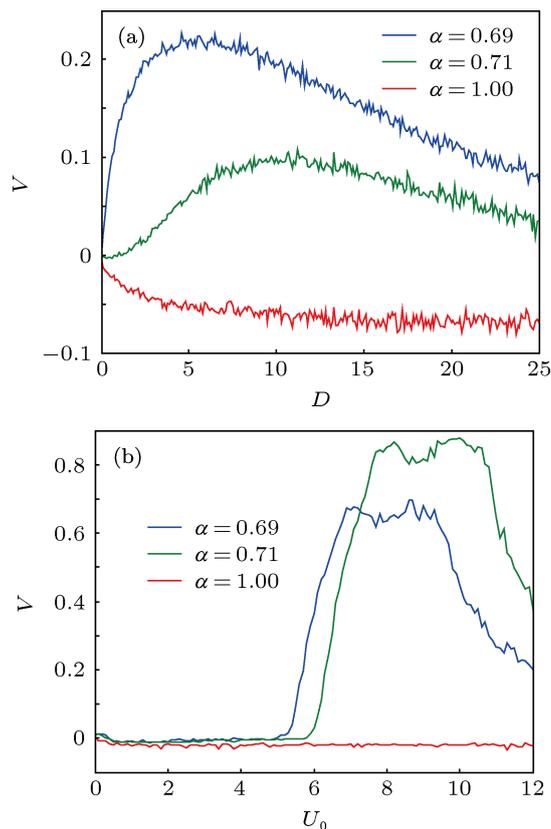


图 7 阶数固定情况下,粒子链平均速度  $V$  与各参数的关系 (a)  $V$  与噪声强度  $D$  的关系  $V(D)$ ; (b)  $V$  与势峰值高度  $U_0$  的关系  $V(U_0)$

最后,我们讨论  $V$  为正弦棘齿势峰值高度  $U_0$  的函数(如图 7(b)).可以看到,  $U_0$  对分数阶系统的影响远大于对整数阶系统的影响.随着  $U_0$  的增大,

整数阶系统由于无记忆性, 在其余各参数(阻尼力、噪声强度、耦合强度)相对固定情况下, 粒子链平均流速并无明显变化; 分数阶系统当峰值高度较低时 ( $U_0 < 5$ ), 情况与整数阶类似, 速度并无明显增长, 但在  $U_0 = 5$  附近, 平均速度明显增长. 这主要是由于峰值高度越大, 在势场空间周期  $L$  不变的前提下, 势场倾斜度越大, 粒子将以更快的速度落入势阱中, 由于分数阶系统具有记忆性, 当前速度不仅与当前各参数有关, 而且还是历史速度的累积效果, 当  $U_0$  增大到某一临界值时平均速度将出现一明显跃迁. 但速度的增大并不是无限的, 随着  $U_0$  继续增大, 势垒高度增加, 粒子越过势垒的概率随之减小, 故输运速度也会逐渐下降.

## 4 结论

近年来, 耦合棘齿系统中的定向输运问题引起

了学者们的广泛关注, 并取得了大量的研究成果, 但大多数研究仍受限于整数阶系统的固有刻画能力. 本文为此引入分数阶微积分理论, 建立分数阶简谐耦合粒子在开关棘齿势场中的输运模型, 并利用分数阶差分法求得模型数值解. 数值分析结果表明: 1) 在系统其他参数不变的情况下, 改变系统阶数不仅可影响粒子链定向输运速度的大小, 还可改变其方向, 使系统出现与整数阶情况方向相反的定向输运现象, 且随着阶数的变化定向输运速度将出现振荡与广义随机共振现象; 2) 在阶数固定情况下, 随着粒子间耦合强度的增大系统也会出现反向流, 并在两个方向均出现广义随机共振; 3) 粒子链定向输运速度同样受到噪声强度与棘齿势峰值高度的影响, 并随参数变化出现广义随机共振. 由此表明, 所有这些性质, 为我们对分数阶耦合棘齿系统中定向输运的方向、速度、振荡、共振等现象施加作用、影响甚至进行控制, 提供了充分的方法和途径.

- 
- [1] Zheng Z G 2004 *Spatiotemporal Dynamics and Collective Behaviors in Coupled Nonlinear Systems* (Beijing: Higher Education Press) p276 (in Chinese) [郑志刚 2004 耦合非线性系统的时空动力学与合作行为 (北京: 高等教育出版社) 第 276 页]
- [2] Riemann P 2002 *Phys. Rep.* **361** 57
- [3] Kay E R, Leigh D A, Zerbetto F 2007 *Angew. Chem. Int. Ed.* **46** 72
- [4] Jülicher F, Ajdari A, Prost J 1997 *Rev. Mod. Phys.* **69** 1269
- [5] Souza S, Van V J, Morelle M 2006 *Nature* **440** 651
- [6] Igarashi A, Tsukamoto S, Goko H 2001 *Phys. Rev. E* **64** 051908
- [7] Wang H Y, Bao J D 2004 *Physica A* **337** 13
- [8] Wang H Y, Bao J D 2005 *Physica A* **357** 373
- [9] Ai B Q, He Y F, Zhong W R 2011 *Phys. Rev. E* **83** 051106
- [10] Chen H B, Zheng Z G 2011 *Mod. Phys. Lett. B* **25** 1179
- [11] Bao J D 2003 *Phys. Lett. A* **314** 203
- [12] Guo H Y, Li W, Ji Q, Zhan Y, Zhao T J 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 3684 (in Chinese) [郭鸿涌, 李微, 纪青, 展永, 赵同军 2004 物理学报 **53** 3684]
- [13] Cheng H T, He J Z, Xiao Y L 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 010502 (in Chinese) [程海涛, 何济洲, 肖宇玲 2012 物理学报 **61** 010502]
- [14] Bao J D 2012 *Introduction to Anomalous Statistics Dynamics* (Beijing: Science Press) p196 (in Chinese) [包景东 2012 反常统计动力学导论 (北京: 科学出版社) 第 196 页]
- [15] Bai W S M, Peng H, Tu Z, Ma H 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 210501 (in Chinese) [白文斯密, 彭皓, 屠浙, 马洪 2012 物理学报 **61** 210501]
- [16] Gitterman M 2005 *Phys. Stat. Mech. Appl.* **352** 309
- [17] Bao J D 2009 *Random Simulation Method of Classical and Quantum Dissipation System* (Beijing: Science Press) p80 (in Chinese) [包景东 2009 经典和量子耗散系统的随机模拟方法 (北京: 科学出版社) 第 80 页]
- [18] Oldham K B, Spanier J 1974 *The Fractional Calculus* (New York, Academic Press)
- [19] Gao S L, Zhong S C, Wei K, Ma H 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 100502 (in Chinese) [高仕龙, 钟苏川, 韦鹏, 马洪 2012 物理学报 **61** 100502]
- [20] Podlubny I 1998 *Fractional Differential Equation* (San Diego: Academic Press)
- [21] Petráš I 2011 *Fractional-Order Nonlinear Systems Modeling, Analysis and Simulation* (1st Ed.) (Beijing: Higher Education Press) p19

# Transport properties of fractional coupled Brownian motors in flash ratchet potential\*

Lai Li Zhou Xue-Xue Ma Hong Luo Mao-Kang<sup>†</sup>

(College of Mathematics, Sichuan University, Chengdu 610065, China)

(Received 20 January 2013; revised manuscript received 10 April 2013)

## Abstract

Based on the fractional calculus theory, the transport model of fractional coupled Brownian motors in flashing ratchet potential is established. Using the fractional difference, the numerical solution of the model is obtained, and the directional transport properties at various parameters are investigated. Numerical results show that in fractional ratchet system, the fractional order and spring constant not only affect the transport velocity of the particles, but also reverse the current direction. Moreover, when the fractional order is fixed, the generalized stochastic resonance phenomena are observed in the mean transport velocity as the noise density, spring constant or the depth of the ratchet potential varies.

**Keywords:** fractional Brownian motors, flashing ratchet potential, coupled directed transport, generalized stochastic resonance

**PACS:** 05.10.Gg, 45.10.Hj

**DOI:** 10.7498/aps.62.150502

---

\* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 11171238).

<sup>†</sup> Corresponding author. E-mail: makaluo@scu.edu.cn