完整系统 Appell 方程 Mei 对称性的共形不变性与守恒量*

韩月林[1)] 孙现亭[2)] 张耀宇[2)] 贾利群[1)†]

1) (江南大学理学院, 无锡 214122)

2) (平顶山学院电气信息工程学院, 平顶山 467002)

(2013年4月10日收到; 2013年4月28日收到修改稿)

研究完整系统 Appell 方程 Mei 对称性的共形不变性与守恒量. 引入无限小单参数变换群及其生成元向量, 定义完整系统动力学方程的 Mei 对称性和共形不变性, 给出该系统 Mei 对称性共形不变性的确定方程. 利用规范函数满足的结构方程导出系统相应的 Mei 守恒量. 举例说明结果的应用.

关键词: Appell 方程, Mei 对称性, 共形不变性, Mei 守恒量

PACS: 02.20.Sv, 11.30.−j, 45.20.Jj **DOI:** 10.7498/aps.62.160201

1 引 言

在现代力学和数理科学中, 约束力学系统的对称性和守恒量的研究占有重要地位 [1−3]. 1997 年, Galiullin 等 [4] 在研究 Birkhoff 系统分析动力学时提出了 Birkhoff 方程的共形不变性和共形因子的概念, 并讨论了 Pfaff 作用量在无限小变换下的不变性与共形不变性、Lie 对称性与共形不变性之间的关系. 21 世纪开始, 我国学者研究了动力学系统的 Noether 对称性、Lie 对称性和形式不变性. 近年来, 动力学系统中共形不变性的应用研究有了新的成果 [5,6]. 文献 [7] 研究了相对运动完整动力学系统的共形不变性与守恒量, 文献 [8] 研究了 Chetaev 型非完整系统 Mei 对称性的共形不变性与守恒量. Appell[9] 给出了约束力学系统的 Appell 方程, 并且 Appell 方程成为分析力学中一类非常重要的方程, 也是分析力学理论中三大力学体系之一. 近二十多年来, 中国学者在 Appell 方程的研究、推广及应用等方面取得了丰硕的成果 [10−16]. 2000 年以来, 中国学者在约束力学系统的对称性的研究方面取得了一些成果 [17−33]. 但是, 长期以来, 利用 Appell 方程的求解成果却很少, 尤其是目前还没有文献直接用 Appell 函数来表达 Appell 方程 Mei 对称性的共形不变性与守恒量. 为求解 Appell 方程, 梅凤翔首先由形式不变性通过 Noether 对称性间接得到了 Noether 守恒量 [34], 文献 [35] 研究了完整系统 Appell 方程 Mei 对称性的结构方程和 Mei 守恒量. 本文将研究完整系统 Appell 方程 Mei 对称性的共形不变性与守恒量. 首先, 建立完整系统的 Appell 方程; 其次, 引入无限小单参数变换群及其生成元向量, 定义完整系统动力学方程的 Mei 对称性和共形不变性, 给出该系统 Mei 对称性共形不变性的确定方程, 得到了利用规范函数满足的结构方程, 并导出了系统相应的 Mei 守恒量; 最后, 通过一个简例说明本文理论结果的应用.

2 完整系统的运动微分方程

假设力学系统的位形由 n 个广义坐标 q_s $(s = 1, 2, \cdots, n)$ 来确定. 系统的运动微分方程可以表示为

* 国家自然科学基金 (批准号: 11142014) 和江苏省普通高校研究生科研创新计划 (批准号: CXLX12_0720) 资助的课题.

† 通讯作者. E-mail: jlq0000@163.com

$$\frac{\partial S}{\partial \ddot{q}_s}=Q_s \quad (s=1,2,\cdots,n), \tag{1}$$

其中 S 为 Appell 函数, $Q_s=Q_s(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$ 为广义力, 假设系统非奇异, 从方程 (1) 还可解出所有的广义加速度, 记作:

$$\ddot{q}_s=\alpha_s(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}). \tag{2}$$

3 完整系统 Mei 对称性的共形不变性

引入时间和广义坐标的无限小变换方程:

$$\begin{aligned} &t^*=t+\varepsilon\xi_0(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}),\\ &q_s^*(t^*)=q_s(t)+\varepsilon\xi_s(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})\\ &\qquad (s=1,2,\cdots,n), \end{aligned} \tag{3}$$

其中 ε 为无限小参数, ξ_0 和 ξ_s 为无限小变换生成元. 引进无限小变换生成元向量以及它的一次扩展和二次扩展:

$$\tilde{X}^{(0)}=\xi_0\frac{\partial}{\partial t}+\xi_s\frac{\partial}{\partial q_s}, \tag{4}$$

$$\tilde{X}^{(1)}=\tilde{X}^{(0)}+\left(\frac{\bar{\mathrm{d}}\xi_s}{\mathrm{d}t}-\dot{q}_s\frac{\bar{\mathrm{d}}\xi_0}{\mathrm{d}t}\right)\frac{\partial}{\partial \dot{q}_s}, \tag{5}$$

$$\tilde{X}^{(2)}=\tilde{X}^{(1)}+\left[\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\bar{\mathrm{d}}\xi_s}{\mathrm{d}t}-\dot{q}_s\frac{\bar{\mathrm{d}}\xi_0}{\mathrm{d}t}\right)-\ddot{q}_s\frac{\bar{\mathrm{d}}\xi_0}{\mathrm{d}t}\right]\frac{\partial}{\partial \ddot{q}_s}, \tag{6}$$

其中函数沿系统运动轨道曲线对时间 t 的全导数

$$\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial}{\partial t}+\dot{q}_s\frac{\partial}{\partial q_s}+\alpha_s\frac{\partial}{\partial \dot{q}_s}+\dot{\alpha}_s\frac{\partial}{\partial \ddot{q}_s}. \tag{7}$$

假设经历无限小变换 (3) 式后, 系统的动力学函数 S 和 Q_s 分别变为 S^* 和 Q_s^*. 将 S^* 和 Q_s^* 在 $(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},\ddot{\boldsymbol{q}})$ 处做 Taylor 级数展开, 有

$$\begin{aligned} S^*&=S\left(\boldsymbol{q}^*,\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{q}^*}{\mathrm{d}t^*},\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{q}^*}{\mathrm{d}t^{*2}},t^*\right)\\ &=S(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},\ddot{\boldsymbol{q}},t)+\varepsilon\tilde{X}^{(2)}(S)+O(\varepsilon^2),\\ Q_s^*&=Q_s\left(\boldsymbol{q}^*,\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{q}^*}{\mathrm{d}t^*},t^*\right)\\ &=Q_s(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},t)+\varepsilon\tilde{X}^{(1)}(Q_s)+O(\varepsilon^2). \end{aligned} \tag{8}$$

定义 1 如果用经时间和广义坐标的无限小变换 (3) 式变换后的动力学函数 S^* 和 Q_s^* 代替动力学函数 S 和 Q_s, 系统 Appell 方程 (1) 的形式保持不变, 即

$$\frac{\partial S^*}{\partial \ddot{q}_s}=Q_s^*, \tag{9}$$

则称这种不变性为系统 Appell 方程 (1) 的 Mei 对称性.

将 (8) 式代入 (9) 式, 忽略 ε^2 及更高阶小项, 并利用方程 (1), 可得到完整系统 Appell 方程 Mei 对称性的确定方程为

$$\frac{\partial}{\partial \ddot{q}_s}[\tilde{X}^{(2)}(S)]-\tilde{X}^{(1)}(Q_s)=0. \tag{10}$$

定义 2 对于完整系统的 Appell 方程 (1), 如果存在矩阵 $\boldsymbol{M}_s^k$ 满足

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial \ddot{q}_s}[\tilde{X}^{(2)}(S)]-\tilde{X}^{(1)}(Q_s)=\boldsymbol{M}_s^k\left(\frac{\partial S}{\partial \ddot{q}_k}-Q_k\right)\\ &\qquad (s,k=1,2,\cdots,n), \end{aligned} \tag{11}$$

则方程 (1) 在无限小变换 (3) 式作用下具有 Mei 对称性的共形不变性. (11) 式是满足 Mei 对称性共形不变性的确定方程, 其中 $\boldsymbol{M}_s^k$ 为共形因子.

命题 1 如果方程 (1) 在无限小变换 (3) 式作用下是 Mei 对称性的, 且存在矩阵 $\boldsymbol{\Gamma}_s^k$ 满足

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial \ddot{q}_s}[\tilde{X}^{(2)}(S)]-\tilde{X}^{(1)}(Q_s)\\ &-\left\{\frac{\partial}{\partial \ddot{q}_s}[\tilde{X}^{(2)}(S)]-\tilde{X}^{(1)}(Q_s)\right\}\bigg|_{\frac{\partial S}{\partial \ddot{q}_s}=Q_s}\\ =&\boldsymbol{\Gamma}_s^k\left(\frac{\partial S}{\partial \ddot{q}_k}-Q_k\right)\\ &\qquad (s,k=1,2,\cdots,n), \end{aligned} \tag{12}$$

则方程 (1) 在无限小变换 (3) 式作用下具有共形不变性, 同时又具有 Mei 对称性的充分与必要条件为 $\boldsymbol{M}_s^k=\boldsymbol{\Gamma}_s^k$.

证明 由于方程 (1) 的 Mei 对称性满足 (10) 式, 如果存在一个矩阵 $\boldsymbol{\Gamma}_s^k$ 满足 (12) 式, 则 (12) 式成为

$$\frac{\partial}{\partial \ddot{q}_s}[\tilde{X}^{(2)}(S)]-\tilde{X}^{(1)}(Q_s)=\boldsymbol{\Gamma}_s^k\left(\frac{\partial S}{\partial \ddot{q}_k}-Q_k\right), \tag{13}$$

由定义 (11) 式, 系统的共形因子 $\boldsymbol{M}_s^k=\boldsymbol{\Gamma}_s^k$.

反之亦然, 由定义 (11) 和 (12) 式, 容易验证

$$\begin{aligned} &\left(\boldsymbol{M}_s^k-\boldsymbol{\Gamma}_s^k\right)\left(\frac{\partial S}{\partial \ddot{q}_k}-Q_k\right)\\ =&\left\{\frac{\partial}{\partial \ddot{q}_s}[\tilde{X}^{(2)}(S)]-\tilde{X}^{(1)}(Q_s)\right\}\bigg|_{\frac{\partial S}{\partial \ddot{q}_s}=Q_s}\\ &\qquad (s,k=1,2,\cdots,n), \end{aligned} \tag{14}$$

若 $\boldsymbol{M}_s^k=\boldsymbol{\Gamma}_s^k$, 则容易得到 (10) 式, 因而系统具有 Mei 对称性.

4 Mei 对称性导致的 Mei 守恒量

根据完整系统 Appell 方程的 Mei 对称性理论, Mei 对称性共形不变性满足一定条件时也可导致相应的守恒量.

命题 2 对于满足 Mei 对称性共形不变性的确定方程 (11) 的无限小生成元 ξ_0, ξ_s, 如果存在规范函数 $G_M = G_M(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})$ 满足结构方程:

$$\tilde{X}^{(2)}(S)\frac{\bar{d}\xi_0}{dt} + \tilde{X}^{(1)}\left[\tilde{X}^{(2)}(S)\right] + (\xi_s - \dot{q}_s\xi_0)\tilde{E}_s\left[\tilde{X}^{(2)}(S)\right] + \xi_0\left[\tilde{X}^{(1)}(Q_s)\right]\frac{\bar{d}\alpha_s}{dt} + \frac{\bar{d}G_M}{dt} = 0, \tag{15}$$

其中 $\tilde{E}_s = \frac{\bar{d}}{dt}\frac{\partial}{\partial\dot{q}_s} - \frac{\partial}{\partial q_s}$, 则相应的完整系统 Appell 方程 (1) 的 Mei 对称性可以导致 Mei 守恒量

$$I_M = \xi_0\tilde{X}^{(2)}(S) + \frac{\partial\tilde{X}^{(2)}(S)}{\partial\dot{q}_s}(\xi_s - \dot{q}_s\xi_0) + G_M = \text{const.} \tag{16}$$

证明 利用广义坐标下完整系统的微分方程 (1) 及其 Mei 对称共形不变性确定方程 (11), 可以得到

$$\frac{\partial}{\partial\ddot{q}_s}[\tilde{X}^{(2)}(S)] - \tilde{X}^{(1)}(Q_s) = M_s^k\left(\frac{\partial S}{\partial\ddot{q}_k} - Q_k\right) = 0, \tag{17}$$

从而有

$$\frac{\bar{d}I_M}{dt} = \xi_0\left[\frac{\partial\tilde{X}^{(2)}(S)}{\partial t} + \dot{q}_s\frac{\partial\tilde{X}^{(2)}(S)}{\partial q_s} + \alpha_s\frac{\partial\tilde{X}^{(2)}(S)}{\partial\dot{q}_s} + \dot{\alpha}_s\frac{\partial\tilde{X}^{(2)}(S)}{\partial\ddot{q}_s}\right] + \dot{\xi}_0\tilde{X}^{(2)}(S) + \frac{\bar{d}}{dt}\frac{\partial\tilde{X}^{(2)}(S)}{\partial\dot{q}_s}(\xi_s - \dot{q}_s\xi_0) + \frac{\partial\tilde{X}^{(2)}(S)}{\partial\dot{q}_s}\left(\dot{\xi}_s - \ddot{q}_s\xi_0 - \dot{q}_s\dot{\xi}_0\right) + \frac{\bar{d}G_M}{dt}. \tag{18}$$

将 (15) 式代入 (18) 式得

$$\begin{aligned}\frac{\bar{d}I_M}{dt} = {}& \xi_0\left[\frac{\partial\tilde{X}^{(2)}(S)}{\partial t} + \dot{q}_s\frac{\partial\tilde{X}^{(2)}(S)}{\partial q_s} + \alpha_s\frac{\partial\tilde{X}^{(2)}(S)}{\partial\dot{q}_s} + \dot{\alpha}_s\frac{\partial\tilde{X}^{(2)}(S)}{\partial\ddot{q}_s}\right] + \dot{\xi}_0\tilde{X}^{(2)}(S) \\ & + \frac{\bar{d}}{dt}\frac{\partial\tilde{X}^{(2)}(S)}{\partial\dot{q}_s}(\xi_s - \dot{q}_s\xi_0) + \frac{\partial\tilde{X}^{(2)}(S)}{\partial\dot{q}_s}\left(\dot{\xi}_s - \ddot{q}_s\xi_0 - \dot{q}_s\dot{\xi}_0\right) \\ & - \tilde{X}^{(2)}(S)\frac{\bar{d}\xi_0}{dt} - \tilde{X}^{(1)}\left[\tilde{X}^{(2)}(S)\right] - (\xi_s - \dot{q}_s\xi_0)\tilde{E}_s\left[\tilde{X}^{(2)}(S)\right] - \xi_0\left[\tilde{X}^{(1)}(Q_s)\right]\frac{\bar{d}\alpha_s}{dt} \\ = {}& \frac{\bar{d}\alpha_s}{dt}\xi_0\left[\frac{\partial}{\partial\ddot{q}_s}[\tilde{X}^{(2)}(S)] - \tilde{X}^{(1)}(Q_s)\right] \\ = {}& \frac{\bar{d}\alpha_s}{dt}\xi_0 M_s^k\left(\frac{\partial S}{\partial\ddot{q}_k} - Q_k\right) = 0.\end{aligned}$$

证毕.

5 举 例

下面, 我们将给出一个简单的例子, 仅用以说明上述结果的应用.

二维空间运动的单位质点, 其 Appell 函数和广义力分别为

$$S = \frac{1}{2}\left(\ddot{q}_1^2 + \ddot{q}_2^2\right) + \ddot{q}_1 q_2 + \ddot{q}_2 q_1 + t, \tag{19}$$

$$Q_1 = Q_2 = 0, \tag{20}$$

试研究系统 Appell 方程的共形不变性和 Mei 守恒量.

由方程 (1) 可得

$$\ddot{q}_1 + q_2 = 0,\ \ \ddot{q}_2 + q_1 = 0. \tag{21}$$

即系统的微分方程为

$$\ddot{q}_1 = -q_2 = \alpha_1,\ \ \ddot{q}_2 = -q_1 = \alpha_2, \tag{22}$$

或

$$F_1 = \ddot{q}_1 + q_2,\ \ F_2 = \ddot{q}_2 + q_1. \tag{23}$$

做计算, 有

$$\begin{aligned}\tilde{X}^{(2)}(S) = {}& \xi_0 + \xi_1\ddot{q}_2 + \xi_2\ddot{q}_1 + \left(\ddot{\xi}_1 - 2\ddot{q}_1\dot{\xi}_0 - \dot{q}_1\ddot{\xi}_0\right)(\ddot{q}_1 + q_2) \\ & + \left(\ddot{\xi}_2 - 2\ddot{q}_2\dot{\xi}_0 - \dot{q}_2\ddot{\xi}_0\right)(\ddot{q}_2 + q_1),\end{aligned} \tag{24}$$

$$\tilde{X}^{(1)}(Q_1) = 0,\quad \tilde{X}^{(1)}(Q_2) = 0, \tag{25}$$

$$\begin{aligned}& \frac{\partial}{\partial\ddot{q}_1}[\tilde{X}^{(2)}(S)] - \tilde{X}^{(1)}(Q_1) \\ = {}& \frac{\partial\xi_0}{\partial\ddot{q}_1} + \frac{\partial\xi_1}{\partial\ddot{q}_1}\ddot{q}_2 + \frac{\partial\xi_2}{\partial\ddot{q}_1}\ddot{q}_1 + \xi_2 + \frac{\partial\left(\ddot{\xi}_1 - 2\ddot{q}_1\dot{\xi}_0 - \dot{q}_1\ddot{\xi}_0\right)}{\partial\ddot{q}_1}(\ddot{q}_1 + q_2) \\ & + \left(\ddot{\xi}_1 - 2\ddot{q}_1\dot{\xi}_0 - \dot{q}_1\ddot{\xi}_0\right)\end{aligned}$$

$$+\frac{\partial\left(\dddot{\xi}_2-2\ddot{q}_2\dot{\xi}_0-\dot{q}_2\ddot{\xi}_0\right)}{\partial\ddot{q}_1}(\ddot{q}_2+q_1),\tag{26}$$

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial\ddot{q}_2}[\tilde{X}^{(2)}(S)]-\tilde{X}^{(1)}(Q_2)\\=&\frac{\partial\xi_0}{\partial\ddot{q}_2}+\frac{\partial\xi_1}{\partial\ddot{q}_2}\ddot{q}_2+\xi_1+\frac{\partial\xi_2}{\partial\ddot{q}_2}\ddot{q}_1\\&+\frac{\partial\left(\dddot{\xi}_1-2\ddot{q}_1\dot{\xi}_0-\dot{q}_1\ddot{\xi}_0\right)}{\partial\ddot{q}_2}(\ddot{q}_1+q_2)\\&+\frac{\partial\left(\dddot{\xi}_2-2\ddot{q}_2\dot{\xi}_0-\dot{q}_2\ddot{\xi}_0\right)}{\partial\ddot{q}_2}(\ddot{q}_2+q_1)\\&+\left(\dddot{\xi}_2-2\ddot{q}_2\dot{\xi}_0-\dot{q}_2\ddot{\xi}_0\right).\end{aligned}\tag{27}$$

取生成元

$$\xi_0=0,\ \ \xi_1=q_1,\ \ \xi_2=q_2,\tag{28}$$

则 (26) 和 (27) 式分别为

$$\frac{\partial}{\partial\ddot{q}_1}[\tilde{X}^{(2)}(S)]-\tilde{X}^{(1)}(Q_1)=2(\ddot{q}_1+q_2),\tag{29}$$

$$\frac{\partial}{\partial\ddot{q}_2}[\tilde{X}^{(2)}(S)]-\tilde{X}^{(1)}(Q_2)=2(\ddot{q}_2+q_1).\tag{30}$$

从而由 (11) 式可得共形因子

$$\boldsymbol{\Gamma}=\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}.\tag{31}$$

将 (21) 式代入 (29) 和 (30) 式得

$$\frac{\partial}{\partial\ddot{q}_1}[\tilde{X}^{(2)}(S)]-\tilde{X}^{(1)}(Q_1)=0,\tag{32}$$

$$\frac{\partial}{\partial\ddot{q}_2}[\tilde{X}^{(2)}(S)]-\tilde{X}^{(1)}(Q_2)=0.\tag{33}$$

从而系统满足 Mei 对称性. 此时, 系统既是共形不变性的又是 Mei 对称性的.

将 (28) 式代入 (24) 式得

$$\tilde{X}^{(2)}(S)=q_1\ddot{q}_2+q_2\ddot{q}_1.\tag{34}$$

做计算得

$$\tilde{X}^{(1)}\left[\tilde{X}^{(2)}(S)\right]=q_1\ddot{q}_2+q_2\ddot{q}_1,\tag{35}$$

$$\tilde{E}_1\left[\tilde{X}^{(2)}(S)\right]=-\ddot{q}_2,\tag{36}$$

$$\tilde{E}_2\left[\tilde{X}^{(2)}(S)\right]=-\ddot{q}_1.\tag{37}$$

将 (35)—(37) 式代入结构方程 (15) 得

$$\dot{G}_{\mathrm{M}}=0.\tag{38}$$

取

$$G_{\mathrm{M}}=\dot{q}_1\dot{q}_2+\frac{1}{2}q_1^2+\frac{1}{2}q_2^2.\tag{39}$$

将 (39) 式代入 (16) 式, 得到 Mei 守恒量

$$I_{\mathrm{M}}=\dot{q}_1\dot{q}_2+\frac{1}{2}q_1^2+\frac{1}{2}q_2^2.\tag{40}$$

6 结 论

共形不变性是一种具有普遍意义的更为广泛的对称性. 本文得到了完整系统 Appell 方程 Mei 对称性的共形不变性的确定方程, 并利用规范函数导出系统的 Mei 守恒量. 本文的结论不仅丰富了 Appell 方程的对称性和守恒量理论, 而且首次得到了直接用 Appell 函数来表达 Appell 方程 Mei 对称性的共形不变性与守恒量理论, 具有重要的理论创新意义.

[1] Lutzky M 1979 *J. Phys.* A *Math. Gen.* **12** 973

[2] Noether A E 1918 *Nachr. Akad. Math.* **2** 235

[3] Mei F X 2004 *Symmetries and Conserved Quantities of Constrained Mechanical Systems* (Beijing: Beijing Institute of Technology Press) (in Chinese) [梅凤翔 2004 约束力学系统的对称性与守恒量 (北京: 北京理工大学出版社)]

[4] Galiullin A S, Gafarov G G, Malaishka R P, Khwan A M 1997 *Analytical Dynamics of Helmholtz, Birkhoff and Nambu Systems* (Moscow: UFN) (in Russian)

[5] Zhang Y, Xue Y 2009 *Chin. Q. Mech.* **30** 216 (in Chinese) [张毅, 薛纭 2009 力学季刊 **30** 216]

[6] Cai J L, Shi S S, Fang H J 2012 *Meccanica* **47** 63

[7] Chen X W, Zhao Y H, Li Y M 2009 *Chin. Phys.* B **18** 3139

[8] Cai J L, Shi S S 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 030201 (in Chinese) [蔡建乐, 史生水 2012 物理学报 **61** 030201]

[9] Appell P 1953 *Traité de Mécanique Rationnelle* II (Paris: Gauthier-Villars) p335

[10] Xue W X 1987 *Acta Mech. Sin.* **19** 156

[11] Luo S K 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 712 (in Chinese) [罗绍凯 2002 物理学报 **51** 712]

[12] Cui J C, Zhang Y Y, Yang X F, Jia L Q 2010 *Chin. Phys.* B **19** 030304

[13] Li Y C, Xia L L, Wang X M, Liu X W 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 3639 (in Chinese) [李元成, 夏丽莉, 王小明, 刘晓巍 2010 物理学报 **59** 3639]

[14] Jia L Q, Xie Y L, Zhang Y Y, Cui J C, Yang X F 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 7552 (in Chinese) [贾利群, 解银丽, 张耀宇, 崔金超, 杨新芳 2010 物理学报 **59** 7552]

[15] Yang X F, Sun X T, Wang X X, Zhang M L, Jia L Q 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 111101 (in Chinese) [杨新芳, 孙现亭, 王肖肖, 张美玲, 贾利群 2011 物理学报 **60** 111101]

[16] Han Y L, Wang X X, Zhang M L, Jia L Q 2013 *Nonlinear Dyn.* **71** 401
[17] Mei F X 1999 *Applications of Lie Groups and Lie Algebras to Constrained Mechanical Systems* (Beijing: Science Press)
[18] Mei F X, Chen X W 2000 *Chin. Phys.* **9** 721
[19] Luo S K 2004 *Chin. Phys.* **13** 2182
[20] Cai J L 2008 *Chin. Phys. Lett.* **25** 1523
[21] Cai J L, Mei F X 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 5369 (in Chinese) [蔡建乐, 梅凤翔 2008 物理学报 **57** 5369]
[22] Cai J L, Luo S K, Mei F X 2008 *Chin. Phys.* B **17** 3170
[23] Zhang Y, Mei F X 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 2419 (in Chinese) [张毅, 梅凤翔 2004 物理学报 **53** 2419]
[24] Luo S K, Zhang Y F 2008 *Progress of Dynamics of Constrained Systems* (Beijing: Science Press) (in Chinese) [罗绍凯, 张永发 2008 约束系统动力学研究进展 (北京: 科学出版社)]
[25] Fang J H 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 3617 (in Chinese) [方建会 2009 物理学报 **58** 3617]
[26] Cai J L 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 22 (in Chinese) [蔡建乐 2009 物理学报 **58** 22]
[27] Cai J L 2009 *Acta Phys. Pol.* A **115** 854
[28] Xie Y L, Jia L Q 2010 *Chin. Phys. Lett.* **27** 120201
[29] Zheng S W, Xie J F, Chen X W 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 5209 (in Chinese) [郑世旺, 解佳芳, 陈向炜 2010 物理学报 **59** 5209]
[30] Jia L Q, Sun X T, Zhang M L, Wang X X, Xie Y L 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 084501 (in Chinese) [贾利群, 孙现亭, 张美玲, 王肖肖, 解银丽 2011 物理学报 **60** 084501]
[31] Jiang W A, Luo S K 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 060201 (in Chinese) [姜文安, 罗绍凯 2011 物理学报 **60** 060201]
[32] Jiang W A, Li Z J, Luo S K 2011 *Chin. Phys.* B **20** 030202
[33] Cai J L 2012 *Nonlinear Dyn.* **69** 487
[34] Mei F X 2001 *Chin. Phys.* **10** 177
[35] Jia L Q, Zhang Y Y, Cui J C 2009 *Journal of Yunnan University* **31** 52 (in Chinese) [贾利群, 张耀宇, 崔金超 2009 云南大学学报 **31** 52]

Conformal invariance and conserved quantity of Mei symmetry for Appell equations in holonomic system*

Han Yue-Lin[1)] Sun Xian-Ting[2)] Zhang Yao-Yu[2)] Jia Li-Qun[1)†]

1) (*School of Science, Jiangnan University, Wuxi* 214122, *China*)

2) (*School of Electric and Information Engineering, Pingdingshan University, Pingdingshan* 467002, *China*)

(Received 10 April 2013; revised manuscript received 28 April 2013)

Abstract

For a holonomic system, the conformal invariance and conserved quantity of Mei symmetry for Appell equations are studied. Firstly, by the infinitesimal one-parameter transformation group and the infinitesimal generator vector, we define Mei symmetry and conformal invariance of differential equations of motion for holonomic system, and the determining equation of Mei symmetry and conformal invariance for holonomic system are given. Then, taking advantage of a structure equation that gauge function satisfies, the system corresponding Mei conserved quantity is derived. Finally, an example is given to illustrate the application of the result.

Keywords: Appell equation, Mei symmetry, conformal invariance, Mei conserved quantity

PACS: 02.20.Sv, 11.30.−j, 45.20.Jj **DOI:** 10.7498/aps.62.160201

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 11142014) and the Scientific Research and Innovation Plan for College Graduates of Jiangsu Province, China (Grant No. CXLX12_0720).

† Corresponding author. E-mail: jlq0000@163.com