物 理 学 报 Acta Phys. Sin. Vol. 62, No. 16 (2013) 160202

一类具时滞的厄尔尼诺 - 南方涛动充电 - 放电振子模型的 Hopf 分岔与周期解问题*

李晓静† 陈绚青 严静

(江苏理工学院数理学院, 常州 213001)

(2013年3月16日收到; 2013年5月6日收到修改稿)

研究了一类具时滞的厄尔尼诺 - 南方涛动充电 - 放电振子模型. 给出了产生 Hopf 分岔的临界时滞条件, 利用 Mawhin 重合度理论, 探讨了该模型的周期解问题.

关键词: 时滞, 厄尔尼诺 - 南方涛动模型, Hopf 分岔, 周期解

PACS: 02.30.Hq **DOI:** 10.7498/aps.62.160202

1 引 言

厄尔尼诺 - 南方涛动 (ENSO) 是发生在赤道太平洋的大气和海洋运动相互作用的自然现象, 它所导致的气候和生态等方面的异常变化严重影响了全球各地区的经济发展和人类生活, 因此, ENSO 规律和预防的研究已经成为国际学术界关注的焦点[1−8]. 文献 [9—13] 研究了由 Jin[5,6] 所提出的 ENSO 充电 - 放电振子理论而得到的振子模型:

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = CT + Dh - \varepsilon T^3, \tag{1a}$$

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = -ET - R_h h, \tag{1b}$$

其中 T 表示赤道东太平洋的海表温度 (SST) 距平, h 表示赤道西太平洋的温跃层厚度距平, C, D, E, R_h 和 ε 表示正的模式参数, 有关它们的详细定义和物理意义参见文献 [5]. 文献 [9,10] 分别利用变分迭代方法和同伦映射方法得到了模型 (1) 的近似解. 文献 [11] 利用 Mawhin 重合度拓展定理得到了模型 (1) 的周期解. 文献 [12] 利用改进变分迭代方法 (MVIM) 得到了模型 (1) 的近似解. 文献 [13] 通过数学变换将模型 (1) 转换成 van der Pol 方程, 由 van der Pol 方程的定性分析严格证明了模型 (1) 存在一个稳定的极限环.

但是对具时滞的厄尔尼诺 - 南方涛动充电 - 放电振子模型 [8]

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = \frac{ad}{R_{\tau_1}}T - \frac{b_1 d}{R_{\tau_1}}T(t-\eta) + \frac{b_2 e}{R_{\tau_2}}h(t-\delta) - \varepsilon T^3, \tag{2a}$$

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = -\frac{cd}{R_{\tau_1}}T(t-\lambda) - R_h h \tag{2b}$$

的研究并不多见, 显然模型 (1) 是模型 (2) 当 $\eta = \delta = \lambda = 0$ 时, 并令 $\frac{ad - b_1 d}{R_{\tau_1}} = C$, $\frac{b_2 e}{R_{\tau_2}} = D$, $\frac{cd}{R_{\tau_1}} = E$ 的特殊情形. 本文首先讨论了模型 (2) 当 $\eta = \lambda = 0$ 时, 即模型

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = CT + Dh(t-\delta) - \varepsilon T^3, \tag{3a}$$

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = -ET - R_h h \tag{3b}$$

产生 Hopf 分岔的临界时滞条件. 其次利用 Mawhin 重合度理论研究了模型 (2) 的周期解问题. 用这种方法作者曾成功解决了一些非线性问题的周期解问题 [11,14−19].

* 国家自然科学基金 (批准号: 11071205, 11101349) 和江苏省自然科学基金 (批准号: BK2011042) 资助的课题.

† 通讯作者. E-mail: lixiaojing14@jstu.edu.cn

 http://wulixb.iphy.ac.cn

2 系统 (3) 平衡点的稳定性和 Hopf 分岔的存在性

假设 $CR_h < DE$ 成立, 则系统 (3) 有惟一的平衡点 $O(0,0)$. 显然, 系统 (3) 的线性化方程为

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = CT + Dh(t-\delta), \tag{4a}$$

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = -ET - R_h h, \tag{4b}$$

其特征方程为

$$\lambda^2 + (R_h - C)\lambda - CR_h + DE\,\mathrm{e}^{-\lambda\delta} = 0, \tag{5}$$

可以发现时滞 δ 的变化可引起特征根 λ 的改变, 当 $\delta > 0$ 时, 由条件 $CR_h \neq DE$ 可知 $\lambda = 0$ 不是特征方程的根, 故方程 (5) 具有负实部的特征根随时滞 δ 变化成为具有正实部的特征根时必须通过虚轴. 由于复特征根是成对出现的, 不失一般性, 假设 $\lambda = u + v\mathrm{i}$ 为方程 (5) 的特征根, u 和 v 为实数且 $v > 0$, 将其代入方程 (5) 分离实虚部并令 $u = 0$ 得

$$DE\cos(\delta v) = v^2 + CR_h, \tag{6a}$$

$$DE\sin(\delta v) = (C - R_h)v. \tag{6b}$$

从方程 (6) 中消去时滞参数 δ, 得

$$v^4 + (C^2 + R_h^2)v^2 + C^2R_h^2 - D^2E^2 = 0. \tag{7}$$

由条件 $CR_h < DE$ 可知方程 (7) 中有一个正实根, 记为 ω_+ 且

$$\omega_+^2 = \frac{-(C^2 + R_h^2) + \sqrt{\Delta}}{2}, \tag{8}$$

其中 $\Delta = (C^2 + R_h^2)^2 - 4(C^2R_h^2 - D^2E^2)$. 由 (6) 式可以得到

$$\delta_k = \frac{1}{\omega_+}\left(\arccos\frac{\omega_+^2 + CR_h}{DE} + 2k\pi\right), \tag{9}$$

此时,

$$\mathrm{Re}\left(\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}\delta}\right)\Big|_{\lambda=\mathrm{i}\omega_+} > 0.$$

综合上述的分析, 并由文献 [20] 可知系统 (3) 产生 Hopf 分岔的临界时滞条件如下:

定理 1 假设 $CR_h < DE$, 则对系统 (3) 有如下结论:

1) $\delta \in [0, \delta_0)$, 其零解是渐近稳定的;

2) $\delta > \delta_0$, 其零解是不稳定的;

3) $\delta = \delta_k (k = 0,1,2,\cdots)$ 是 Hopf 分岔值, 其中 δ_k 由 (9) 式定义.

3 系统 (2) 周期解的存在性结果

定理 2 在系统 (2) 中, 如果 $A - B < \dfrac{DE}{R_h}$, 则系统 (2) 至少存在一个 ω-周期解.

证明 显然, (0,0) 是系统 (2) 的平凡周期解, 不失一般性, 假设 (T,h) 是系统 (2) 的非平凡解. 为了行文方便, 定义 $\|T\|_p = \left(\int_0^\omega |T(t)|^p\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}}$, $p \geqslant 1$, 并令 $\dfrac{ad}{R_{\tau_1}} = A$, $\dfrac{b_1 d}{R_{\tau_1}} = B$, $\dfrac{b_2 e}{R_{\tau_2}} = D$, $\dfrac{cd}{R_{\tau_1}} = E$, 则系统 (2) 化为

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = AT - BT(t-\eta) + Dh(t-\delta) - \varepsilon T^3, \tag{10a}$$

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = -ET(t-\lambda) - R_h h. \tag{10b}$$

由常微分方程知识可知, 若 T 是以 $\omega > 0$ 为周期的连续函数, 则方程 (10b) 有惟一的 ω-周期解

$$h(t) = \frac{E}{1-\mathrm{e}^{R_h\omega}}\int_t^{t+\omega}\mathrm{e}^{R_h(s-t)}T(s-\lambda)\,\mathrm{d}s. \tag{11}$$

易证若 T 为以 ω 为周期的函数, 则 h 也是以 ω 为周期的函数. 将 (11) 式代入 (10a) 得

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} &= AT - BT(t-\eta)\\ &\quad + \frac{DE}{1-\mathrm{e}^{R_h\omega}}\int_{t-\delta}^{t-\delta+\omega}\mathrm{e}^{R_h(s-t+\delta)}\\ &\quad \times T(s-\lambda)\,\mathrm{d}s - \varepsilon T^3,\end{aligned} \tag{12}$$

故系统 (10) 存在 ω- 周期解当且仅当方程 (12) 存在 ω- 周期解.

我们取如下记号: $X = \{x | x \in C(\mathbb{R},\mathbb{R}), x(t+\omega) \equiv x(t)\}$, 其模为 $|\varphi|_0 = \max\limits_{t\in[0,\omega]}|\varphi(t)|$, $\forall\varphi \in X$, 显然 X 是 Banach 空间. 同时定义算子

$$L: D(L) \subset X \to X, \quad LT = T', \tag{13}$$

$N: X \to X$,

$$\begin{aligned}[NT](t) &= AT - BT(t-\eta)\\ &\quad + \frac{DE}{1-\mathrm{e}^{R_h\omega}}\int_{t-\delta}^{t-\delta+\omega}\mathrm{e}^{R_h(s-t+\delta)}\\ &\quad \times T(s-\lambda)\,\mathrm{d}s - \varepsilon T^3,\end{aligned} \tag{14}$$

其中 $D(L) = \{x | x \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R}), x(t+\omega) \equiv x(t)\}$. 易见 $\mathrm{Ker}\,(L) = \mathbb{R}$, $\mathrm{Im}(L) = \{x | x \in X, \int_0^\omega x(s)\,\mathrm{d}s = 0\}$, 因此 L 是指标为零的 Fredholm 算子 [21]. 再定义投影算子:

$$P: X \to \mathrm{Ker}\,L, Px = x(0),$$

$$Q: X \to \operatorname{Im} Q, \quad Qy = \frac{1}{\omega}\int_0^{\omega} y(s)\,\mathrm{d}s,$$

那么 $\operatorname{Im} P = \operatorname{Ker} L$, $\operatorname{Ker} Q = \operatorname{Im} L$. 令 $L_P = L|_{\operatorname{Ker} P \cap D(L)}: \operatorname{Ker} P \cap D(L) \to \operatorname{Im} L$, 定义 $L_p^{-1}: \operatorname{Im} L \longrightarrow \operatorname{Ker} P \cap D(L)$ 为算子 L_P 的逆算子. 由数学分析的知识和周期函数的性质可知

$$[L_p^{-1}y](t) = \int_0^t y(s)\,\mathrm{d}s, \tag{15}$$

从 (14) 和 (15) 式可知, N 在 $\overline{\Omega}$ 是 L- 紧的, 这里 Ω 是 X 中的任意有界开集.

考虑方程 $LT = \lambda NT, \lambda \in (0,1)$, 其中 L 和 N 分别由 (13) 和 (14) 式所定义. 如果 $T(t)$ 是算子方程 $LT = \lambda NT, \lambda \in (0,1)$ 的任一解, 则

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = {}& \lambda AT - \lambda BT(t-\eta) \\ & + \lambda\frac{DE}{1-\mathrm{e}^{R_h\omega}}\int_{t-\delta}^{t-\delta+\omega} \mathrm{e}^{R_h(s-t+\delta)} \\ & \times T(s-\lambda)\,\mathrm{d}s - \lambda\varepsilon T^3, \end{aligned}\tag{16}$$

在方程 (16) 两边乘以 T, 并从 0 到 ω 积分有

$$\begin{aligned}\varepsilon\|T\|_4^4 = {}& A\int_0^{\omega}|T(t)|^2\,\mathrm{d}t - B\int_0^{\omega}T(t-\eta)T(t)\,\mathrm{d}t \\ & + \frac{DE}{1-\mathrm{e}^{R_h\omega}}\int_0^{\omega}\left(\int_{t-\delta}^{t-\delta+\omega}\mathrm{e}^{R_h(s-t+\delta)}\right. \\ & \left.\times T(s-\lambda)\,\mathrm{d}s\right)T(t)\,\mathrm{d}t \\ \leqslant {}& \left(A + B + \frac{DE\,\mathrm{e}^{R_h\omega}\omega}{|1-\mathrm{e}^{R_h\omega}|}\right)\sqrt{\omega}\|T\|_4^2. \end{aligned}$$

所以, 存在 $M_1 > 0$, 使得

$$\|T\|_4 \leqslant M_1. \tag{17}$$

另一方面, 在方程 (16) 两边乘以 T', 并从 0 到 ω 积分, 结合 (17) 式和 Hölder 不等式, 有

$$\begin{aligned}\|T'\|_2^2 = {}& -\lambda B\int_0^{\omega}T(t-\eta)T'(t)\,\mathrm{d}t \\ & + \frac{\lambda DE}{1-\mathrm{e}^{R_h\omega}}\int_0^{\omega}\left(\int_{t-\delta}^{t-\delta+\omega}\mathrm{e}^{R_h(s-t+\delta)}\right. \\ & \left.\times T(s-\lambda)\,\mathrm{d}s\right)T'(t)\,\mathrm{d}t \\ \leqslant {}& \left(B + \frac{DE\,\mathrm{e}^{R_h\omega}\omega}{|1-\mathrm{e}^{R_h\omega}|}\right)\omega^{\frac{1}{4}}M_1\|T'\|_2, \end{aligned}$$

所以, 存在 $M_2 > 0$, 使得

$$\|T'\|_2 \leqslant M_2. \tag{18}$$

又由文献 [22] 和 (17), (18) 两式可知, 存在 $M > 0$, 使得

$$\begin{aligned}|T|_0 & \leqslant \sqrt{\frac{1+\sqrt{1+\omega^2}}{2\omega}}\left(\int_0^{\omega}|T(t)|^2\,\mathrm{d}t + \int_0^{\omega}|T'(t)|^2\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}} \\ & \leqslant \sqrt{\frac{1+\sqrt{1+\omega^2}}{2\omega}}\left(M_1^2\omega^{\frac{1}{2}} + M_2^2\right)^{\frac{1}{2}} := M. \end{aligned}$$

令 $\Omega = \{T \in X: |T|_0 < M\}$, 当 $T \in \partial\Omega \bigcap \operatorname{Ker} L$ 时, 有

$$\begin{aligned}QNT = {}& \frac{T}{\omega}\int_0^{\omega}\left(A - B + \frac{DE}{1-\mathrm{e}^{R_h\omega}}\right. \\ & \left.\times\int_{t-\delta}^{t-\delta+\omega}\mathrm{e}^{R_h(s-t+\delta)}\,\mathrm{d}s - \varepsilon T^2\right)\mathrm{d}t \\ = {}& \frac{T}{\omega}\int_0^{\omega}\left(A - B - \frac{DE}{R_h} - \varepsilon T^2\right)\mathrm{d}t \neq 0. \end{aligned}$$

另一方面, 令 $J: \operatorname{Im} Q \to \operatorname{Ker} L$ 为恒同映射, 且取变换

$$\begin{gathered} H(T,\mu) = -\mu T + (1-\mu)JQNT, \\ (T,\mu) \in \Omega \times [0,1], \end{gathered}$$

那么, $\forall (T,\mu) \in (\partial\Omega \cap \operatorname{Ker} L) \times [0,1]$, 有 $H(T,\mu) \neq 0$. 因此

$$\begin{aligned} & \deg\{JQN, \Omega \cap \operatorname{Ker} L, 0\} \\ = {}& \deg\{H(T,0), \Omega \cap \operatorname{Ker} L, 0\} \\ = {}& \deg\{H(T,1), \Omega \cap \operatorname{Ker} L, 0\} \\ = {}& \deg\{-I, \Omega \cap \operatorname{Ker} L, 0\} \neq 0. \end{aligned}$$

根据 Mawhin 重合度拓展定理 [21] 可知, 方程 (12) 至少存在一个 ω-周期解, 即系统 (2) 至少存在一个 ω-周期解.

4 结 论

1) 由于 ENSO 在年代际变化的某些时段存在周期性特征, 所以本文的研究结论从理论上给出了 ENSO 循环的周期性, 证明了 ENSO 的年代际变化存在着周期性现象. 这样, 对进一步解释 ENSO 循环的规律, 改进 ENSO 预报模式, 具有一定的理论意义和实用价值.

2) 文献 [9—13] 研究的方程 (1) 是本文研究的方程 (2) 的特殊情形.

3) 文献 [11] 利用 Mawhin 重合度理论, 得到了方程 (1) 的周期解存在性结果, 由于本文研究的方程 (2) 具有时滞, 文献 [11] 的方法不再适用, 故本文的结果推广和改进了文献 [11] 的相应工作.

[1] Feng G L, Dong W J, Jia X J 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 1181 (in Chinese) [封国林, 董文杰, 贾晓静 2002 物理学报 **51** 1181]
[2] Feng G L, Dong W J 2005 *Acta Meteo. Sin.* **63** 864 (in Chinese) [封国林, 董文杰 2005 气象学报 **63** 864]
[3] Liu S S, Fu Z T, Liu S D 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 10 (in Chinese) [刘式适, 傅遵涛, 刘式达 2002 物理学报 **51** 10]
[4] Zhang J S, Xiao X C 2000 *Acta Phys. Sin.* **49** 1221 (in Chinese) [张家树, 肖先赐 2000 物理学报 **49** 1221]
[5] Jin F F 1997 *J. Atmos. Sci.* **54** 811
[6] Jin F F 1997 *J. Atmos. Sci.* **54** 830
[7] Wang B, Feng Z 1999 *J. Atmos. Sci.* **56** 5
[8] Wang C Z 2001 *J. Climate* **14** 98
[9] Mo J Q, Lin W T, Zhu J 2006 *Adv. Math.* **35** 232
[10] Mo J Q, Lin W T, Wang H 2009 *Acta Math. Sci.* **29** 101
[11] Li X J 2010 *Chin. Phys.* B **19** 030201
[12] Cao X Q, Song J Q, Zhang W M, Zhao J, Zhu X Q 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 030203 (in Chinese) [曹小群, 宋君强, 张卫民, 赵军, 朱小谦 2012 物理学报 **61** 030203]
[13] Zhao Q, Liu S S, Liu S D 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 220201 (in Chinese) [赵强, 刘式适, 刘式达 2012 物理学报 **61** 220201]
[14] Li X J 2007 *Chin. Phys.* **16** 2837
[15] Li X J 2008 *Chin. Phys.* B **17** 1946
[16] Li X J 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 5366 (in Chinese) [李晓静 2008 物理学报 **57** 5366)
[17] Li X J 2010 *Chin. Phys.* B **19** 020202
[18] Li X J, Chen X Q 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 210201 (in Chinese) [李晓静, 陈绚青 2012 物理学报 **61** 210201]
[19] Li X J, Chen X Q, Yan J 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 090202 (in Chinese) [李晓静, 陈绚青, 严静 2013 物理学报 **62** 090202]
[20] Hale J, Lunel S V 1993 *Introduction to Functional Differential Equations* (New York: Springer-Verlag)
[21] Gaines R E, Mawhin J L 1977 *Coincidence Degree and Nonlinear Differential Equations* (Berlin: Springer)
[22] Tang X H, Li X 2009 *Nonlinear Anal.* **71** 1140

Hopf bifurcation and the problem of periodic solutions in a recharge-discharge oscillator model for El Niño and southern oscillation with time delay*

Li Xiao-Jing† Chen Xuan-Qing Yan Jing

(*College of Mathematics and Physics, Jiangsu University of Technology, Changzhou* 213001*, China*)

(Received 16 March 2013; revised manuscript received 6 May 2013)

Abstract

In this paper, a recharge-discharge oscillator model for El Niño and southern oscillation with time delay is investigated. We obtain the critical time delay associated with Hopf bifurcation, and discuss the problem of periodic solutions for the model by using Maehin's continuation theorem.

Keywords: time delay, El Niño and southern oscillation model, Hopf bifurcation, periodic solution

PACS: 02.30.Hq **DOI:** 10.7498/aps.62.160202

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 11071205, 11101349) and the Natural Science Foundation of Jiangsu Province, China (Grant No. BK2011042).

† Corresponding author. E-mail: lixiaojing14@jstu.edu.cn