

# (2+1) 维扰动时滞破裂孤波方程行波解的摄动方法\*

欧阳成<sup>1)†</sup> 石兰芳<sup>2)</sup> 林万涛<sup>3)</sup> 莫嘉琪<sup>4)</sup>

1) (湖州师范学院理学院, 湖州 313000)

2) (南京信息工程大学数学与统计学院, 南京 210044)

3) (中国科学院大气物理研究所大气科学和地球流体力学数值模拟国家重点实验室, 北京 100029)

4) (安徽师范大学数学系, 芜湖 241003)

(2013年5月5日收到; 2013年5月18日收到修改稿)

研究了一类(2+1)维扰动时滞破裂孤波方程. 首先讨论了对应的无时滞情形下的破裂方程, 利用待定系数投射方法得到了孤波精确解. 再利用同伦、摄动近似方法得到了扰动破裂孤波方程的行波渐近解.

**关键词:** 孤波, 行波解, 近似解

**PACS:** 02.30.Lt

**DOI:** 10.7498/aps.62.170201

## 1 引言

许多非线性现象的描述都涉及到孤波方程<sup>[1–4]</sup>. 当前, 由于对非线性理论研究的不断深入, 提出了许多非线性孤波求解的新方法, 如双线性法, 齐次平衡法, 截断函数法, 同伦映射法等等<sup>[5–9]</sup>. 在不同的非线性系统中得到了许多局域激发结构, 研究其局域激发模式, 仍然是非线性理论工作者研究的重要课题. 目前非线性方程的定量和定性相结合的各种方法不断地涌现. 作者等也研究了有关非线性反应扩散、孤波、激光脉冲、生态、大气物理等问题<sup>[10–21]</sup>. 本文是讨论一类高维扰动时滞破裂孤波方程. 利用非线性的研究方法和理论, 得到了相应方程的渐近近似解.

## 2 扰动时滞破裂孤波方程

考虑如下(2+1)维扰动时滞破裂孤波方程:

$$\begin{aligned} & u_{xt} - a_1 u_{xy} u_x - a_2 u_{xx} u_y - a_3 u_{xxx} \\ & = b f(u_{tt}(t - \tau, x, y)), \end{aligned} \quad (1)$$

其中  $x, y$  为空间变量,  $t$  为时间变量,  $a_i(i=1,2)$ ,  $a_3 > 0$  和  $b$  为参数;  $b f(u_{tt}(t - \tau, x, y))$  为时滞扰动项, 它为充分光滑的函数,  $\tau$  为小时滞数. 破裂孤波方程具有广泛的物理背景, 它在理论物理学, 化学动力学, 生态学, 大气物理学等领域中都有重要的应用, 这类方程的性态以及所连带相应解的孤波和混沌行为等, 可参见文献[1, 9].

先将扰动时滞函数  $u(t - \tau)$ , 按小时滞数  $\tau$  展开

$$u(t - \tau, x, y) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-\tau)^i}{i!} \frac{\partial^{i+2} u(t, x, y)}{\partial t^{i+2}}. \quad (2)$$

再作行波变换

$$z = x + y + ct, \quad (3)$$

其中  $c$  为待定正常数. 将(3)式代入方程(1)并考虑到(2)式, 有

$$\begin{aligned} & c u_{zz} - (ca_1 + a_2) u_z u_{zz} - a_3 u_{zzzz} \\ & = bc^2 f \left( \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-c\tau)^i}{i!} \frac{\partial^{i+2} u}{\partial z^{i+2}} \right). \end{aligned} \quad (4)$$

引入一个同伦映射<sup>[22,23]</sup>  $H(u, s) : R \times I \rightarrow R$ :

$$H(u, s) = L(u) - L(u_0) + s \left( L(u_0) - (ca_1 + a_2) u_z u_{zz} \right)$$

\* 中国科学院战略性先导科技项目(批准号: XDA01020304)、国家自然科学基金(批准号: 41275062, 11202106)、浙江省自然科学基金(批准号: Y6110502, LY13A010005)和江苏省高校自然科学项目(批准号: 13KJB170016)资助的课题.

† 通讯作者. E-mail: oyc@hutc.zj.cn

$$-bc^2f\left(\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-c\tau)^i}{i!}\frac{\partial^{i+2}u}{\partial z^{i+2}}\right)\right), \quad (5)$$

其中  $R = (-\infty, +\infty)$ ,  $I = [0, 1]$ ,  $s$  为人工参数, 而线性算子  $L$  为

$$L(u) = cu_{zz} - a_3u_{zzzz}, \quad (6)$$

且  $u_0 = u_0(z)$  为初始孤波函数, 它由(4)式中当  $b = 0$  时的方程的孤波解所确定:

$$cu_{zz} - (ca_1 + a_2)u_zu_{zz} - a_3u_{zzzz} = 0. \quad (7)$$

显然, 由关系式(5),  $H(u, 1) = 0$  与方程(4)相同. 故方程(4)的孤波解  $u(\xi)$  就是对应  $H(u, s) = 0$  的孤波解当  $s = 1$  的情形.

下面来决定由(7)式决定的孤波解  $u_0 = u_0(z)$ . 为此我们采用待定系数投射方法<sup>[1,9]</sup> 来寻找方程(7)具有如下的形式的孤波解:

$$u_z = A_1v + A_2v^2 + B_0(1 - v^2)^{1/2}, \quad (8)$$

其中  $A_1, A_2, B_0$  为待定常数, 而  $v$  满足方程

$$v' = -v(1 - v^2)^{1/2}. \quad (9)$$

不难知道, 方程(9)的解为

$$v = \operatorname{sech}z. \quad (10)$$

由(8)–(10)式, 代入方程(7), 有

$$\begin{aligned} &c(A_1v + A_2v^2) + cB_0(1 - v^2)^{1/2} \\ &- \frac{1}{2}(ca_1 + a_2)((A_1v + 2A_2v^2)^2 + B_0^2(1 - v^2)) \\ &- \frac{1}{2}(ca_1 + a_2)B_0(A_1v + A_2v^2)(1 - v^2)^{1/2} \\ &- a_3[A_1(v - 2v^3) + 2A_2(2v^2 - 3v^4) \\ &+ 2B_0v^2(1 - v^2)^{1/2}] = 0. \end{aligned}$$

合并上式等号左端  $v^i, v^i(1 - v^2)^{1/2}$  同次幂项, 并令其系数为零. 可选定

$$A_1 = 0, \quad A_2 = \frac{3a_3}{ca_1 + a_2},$$

$$B_0 = 0, \quad c = 4a_3.$$

于是由(8), (10)式

$$u_z = \frac{3a_3}{ca_1 + a_2} \operatorname{sech}^2 z.$$

由此我们便得到了方程(7)的一个精确孤波解

$$u_0(z) = \frac{3a_3 \tanh^2 z}{4a_1a_3 + a_2}. \quad (11)$$

设  $a_t = 1 (t = 1, 2, 3)$ , 由(11)式表示的初始孤波函数  $u_0(z)$  的曲线图形如图1所示.

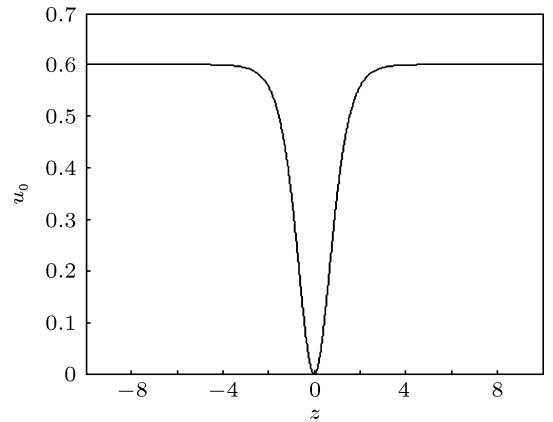


图1 初始孤波函数  $u_0(z)$  的曲线图形

### 3 扰动时滞破裂孤波方程的近似解

现用同伦映射关系式(5)来求得扰动破裂孤波非线性方程(4)的近似解(不妨假设  $\frac{d^i u(0)}{dz^i} = 0 (i = 0, 1, 2, 3)$ ). 设

$$u(z) = \sum_{j=0}^{\infty} u_j(z)s^j. \quad (12)$$

将(12)式代入  $H(u, s) = 0$ , 再按  $s$  展开非线性项, 合并  $s^j$  的同次幂的系数, 并令其为零.

当  $s^0$  的系数为零, 它就是初始孤波函数  $u_0(z)$  满足的方程

$$u_{0zz} - 2u_{0z}u_{0zz} - u_{0zzzz} = 0. \quad (13)$$

显然, 方程(13)具有形如(11)式的解, 即

$$u_0(z) = \frac{3a_3 \tanh^2 z}{4a_1a_3 + a_2}. \quad (14)$$

当  $s^1$  的系数为零, 得

$$4u_{1zz} - u_{1zzzz} = 16a_3bf\left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-4a_3\tau)^i}{i!} \frac{\partial^{i+2}u_0}{\partial z^{i+2}}\right). \quad (15)$$

方程(15)的解为

$$\begin{aligned} &u_1(z) \\ &= 4ba_3 \int_0^z \int_0^{z_1} \int_0^{z_2} f\left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-4a_3\tau)^i}{i!} \frac{\partial^{i+2}u_0(z_3)}{\partial z_3^{i+2}}\right) \\ &\times [\exp(-2(z_2 - z_3)) - \exp(2(z_2 - z_3))] dz_3, \end{aligned} \quad (16)$$

其中  $u_0$  由(14)式表示.

同理, 当  $s^j (j = 2, 3, \dots)$  的系数为零, 得

$$4u_{jzz} - u_{jzzz} = \frac{1}{a_3} \lim_{m \rightarrow \infty} F_{mj}(z), \quad (17)$$

其中  $F_{mj}(z)$  为

$$\begin{aligned} F_{mj}(z) = & \frac{1}{j!} \left[ \frac{\partial^j}{\partial s^j} \left( -(4a_1 a_3 + a_2) \left( \sum_{j=0}^{\infty} u_j(z) s^j \right)_z \right. \right. \\ & \times \left. \left. \left( \sum_{j=0}^{\infty} u_j(z) s^j \right)_{zz} \right. \right. \\ & - 16 b a_3^2 f \left( \sum_{i=0}^m \frac{(-4a_3 \tau)^i}{i!} \frac{\partial^{i+2}}{\partial z^{i+2}} \right. \\ & \times \left. \left. \left( \sum_{j=0}^{\infty} u_j(z) s^j \right) \right) \right]_{s=0}, \\ & (j = 2, 3, \dots). \end{aligned}$$

因此方程 (17) 的解  $u_i(z)$  为

$$\begin{aligned} u_j(z) = & \frac{1}{4} \int_0^z \int_0^{z_1} \int_0^{z_2} \lim_{m \rightarrow \infty} F_j(z_3) \\ & \times [\exp(-2(z_2 - z_3)) - \exp(2(z_2 - z_3))] dz_3, \\ & (j = 2, 3, \dots). \end{aligned} \quad (18)$$

于是, 根据同伦映射和摄动理论<sup>[22-25]</sup>, 由 (12), (14), (16), (18) 式, 我们便得到扰动破裂孤波非线性方程 (4) 一致有效的  $(m, n)$  次近似解为

$$\begin{aligned} u_{(m,n)\text{app}}(z) = & \frac{3a_3 \tanh^2 z}{4a_1 a_3 + a_2} \\ & + 4ba_3 \int_0^z \int_0^{z_1} \int_0^{z_2} f \left( \sum_{i=0}^m \frac{(-4a_3 \tau)^i}{i!} \frac{\partial^{i+2} u_0(z_3)}{\partial z_3^{i+2}} \right) \\ & \times [\exp(-2(z_2 - z_3)) - \exp(2(z_2 - z_3))] dz_3 \\ & + \frac{1}{4} \int_0^z \int_0^{z_1} \int_0^{z_2} \sum_{j=2}^n F_{mj}(z_3) \\ & \times [\exp(-2(z_2 - z_3)) - \exp(2(z_2 - z_3))] dz_3 \\ & + O(\tau^{m+1}), \quad 0 < \tau \ll 1. \end{aligned} \quad (19)$$

再利用行波变换 (3) 式, 我们便得到扰动时滞破裂孤波非线性方程 (1) 一致有效的  $(m, n)$  次近似行波解

$$\begin{aligned} u_{(m,n)\text{app}}(x + y + 4a_3 t) = & \frac{3a_3 \tanh^2(x + y + 4a_3 t)}{4a_1 a_3 + a_2} \\ & + 4ba_3 \int_0^{x+y+4a_3 t} \int_0^{z_1} \int_0^{z_2} f \left( \sum_{i=0}^m \frac{(-4a_3 \tau)^i}{i!} \right. \\ & \left. \left. \frac{\partial^{i+2} u_0(z_3)}{\partial z_3^{i+2}} \right) \right. \\ & \times [\exp(-2(z_2 - z_3)) - \exp(2(z_2 - z_3))] dz_3. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times \frac{\partial^{i+2} u_0(z_3)}{\partial z_3^{i+2}} \Big) \\ & \times [\exp(-2(z_2 - z_3)) - \exp(2(z_2 - z_3))] dz_3 \\ & + \frac{1}{4} \int_0^{x+y+4a_3 t} \int_0^{z_1} \int_0^{z_2} \sum_{j=2}^n F_{mj}(z_3) \\ & \times [\exp(-2(z_2 - z_3)) - \exp(2(z_2 - z_3))] dz_3 \\ & + O(\tau^{m+1}), \quad 0 < \tau \ll 1. \end{aligned} \quad (20)$$

#### 4 举 例

作为一个简单的例子, 在方程 (1) 及行波变换 (3) 式中, 设  $a_t = 1 (i = 1, 2, 3)$ ,  $f(u(t - \tau, x, y)) = u_{tt}(t - \tau, x, y)$ . 则相应的扰动时滞破裂孤波非线性方程为

$$u_{xt} - u_{xy} u_x - u_{xx} u_y - u_{xxx} = bu_{tt}(t - \tau, x, y), \quad (21)$$

在行波变换  $z = x + y + 4t$  下对应的方程 (21) 为

$$4u_{zz} - 2u_z u_{zz} - u_{zzz} = 16b \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-4\tau)^i}{i!} \frac{\partial^{i+2} u}{\partial z^{i+2}}. \quad (22)$$

利用同伦映射 (5) 式, 并由 (14) 式, 解的初始孤波函数  $u_0(z)$  为

$$u_0(z) = \frac{3 \tanh^2 z}{5}. \quad (23)$$

由 (5), (19) 和 (23) 式, 可得扰动时滞破裂孤波非线性方程 (22) 一致有效的  $(m, n)$  次近似孤波解

$$\begin{aligned} u_{(m,n)\text{app}}(z) = & \frac{3 \tanh^2 z}{5} \\ & + 4b \int_0^z \int_0^{z_1} \int_0^{z_2} \left( \sum_{i=0}^m \frac{(-4\tau)^i}{i!} \frac{\partial^{i+2} u_0(z_3)}{\partial z_3^{i+2}} \right) \\ & \times [\exp(-2(z_2 - z_3)) - \exp(2(z_2 - z_3))] dz_3 \\ & + \frac{1}{4} \int_0^z \int_0^{z_1} \int_0^{z_2} \sum_{j=2}^n F_{mj}(z_3) \\ & \times [\exp(-2(z_2 - z_3)) - \exp(2(z_2 - z_3))] dz_3 \\ & + O(\tau^{m+1}), \quad 0 < \tau \ll 1. \end{aligned} \quad (24)$$

其中

$$\begin{aligned} u_0(z) &= \frac{3 \tanh^2 z}{4}, \\ u_1(z) &= 4b \int_0^z \int_0^{z_1} \int_0^{z_2} \left( \sum_{i=0}^m \frac{(-4\tau)^i}{i!} \frac{\partial^{i+2} u_0(z_3)}{\partial z_3^{i+2}} \right) \\ & \times [\exp(-2(z_2 - z_3)) - \exp(2(z_2 - z_3))] dz_3, \\ F_{mj}(z) &= \frac{1}{j!} \left[ \frac{\partial^j}{\partial s^j} \left( -5 \left( \sum_{j=0}^{\infty} u_j(z) s^j \right)_z \right) \right. \\ & \left. \left. \times [\exp(-2(z_2 - z_3)) - \exp(2(z_2 - z_3))] dz_3 \right) \right]. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times \left( \sum_{j=0}^{\infty} u_j(z) s^j \right)_{zz} \\ & - 16b \sum_{i=0}^m \frac{(-4\tau)^i}{i!} \frac{\partial^{i+2}}{\partial z^{i+2}} \left( \sum_{j=0}^{\infty} u_j(z) s^j \right) \Big|_{s=0}, \\ & (j = 2, 3, \dots). \end{aligned}$$

为了简单起见, 由 (24) 式, 下面仅考虑扰动时滞破裂孤波非线性方程 (22) 的 (1, 0) 次近似孤波解

$$\begin{aligned} & u_{(1,0)\text{app}}(z) \\ & = \frac{3 \tanh^2 z}{5} + 4b \int_0^z \int_0^{z_1} \int_0^{z_2} u_{0z_3 z_3} \\ & \times [\exp(-2(z_2 - z_3)) - \exp(2(z_2 - z_3))] dz_3 \\ & + O(\tau), \quad 0 < \tau \ll 1. \end{aligned}$$

上述函数当  $b = 0.01$  时的曲线如图 2 所示 (其中  $u_{(1,0)\text{app}}(z)$  曲线为实线, 初始孤波函数  $u_0(z)$  曲线为虚线).

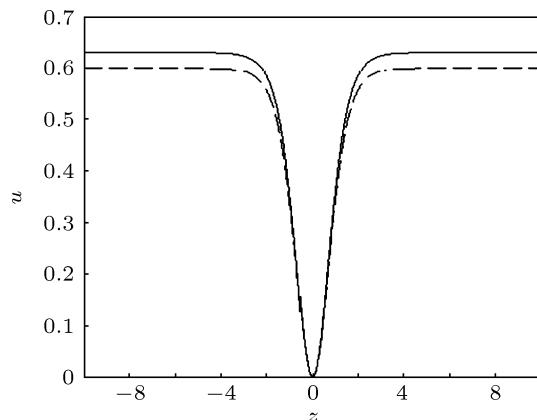


图 2  $u_0(z)$  (虚线) 与  $u_{(1,0)\text{app}}(z)$  (实线) 的曲线图形

由图 2 可以看出, 时滞破裂孤波非线性方程 (22) 的 (1, 0) 次近似孤波解  $u_{(1,0)\text{app}}(z)$  是对初始孤波函数  $u_0(z)$  的一个校正. 还可以进一步看出, 它的校正程度取决于参数  $b$  的数值. 而且它与时滞破裂孤波非线性方程 (22) 的精确解的误差具有  $O(\tau)$  ( $0 < \tau \ll 1$ ) 的量级. 这种性态与对应的实际物理现象的情况相符.

再由 (20) 式, 扰动破裂孤波非线性方程 (21) 一致有效的  $(m, n)$  次近似行波解为

$$\begin{aligned} & u_{(m,n)\text{app}}(x + y + 4t) \\ & = \frac{3 \tanh^2(x + y + 4t)}{5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & + 4b \int_0^{x+y+4t} \int_0^{z_1} \int_0^{z_2} f \left( \sum_{i=0}^m \frac{(-4\tau)^i}{i!} \frac{\partial^{i+2}}{\partial z^{i+2}} u_0(z_3) \right) \\ & \times [\exp(-2(z_2 - z_3)) - \exp(2(z_2 - z_3))] dz_3 \\ & + \frac{1}{4} \int_0^{x+y+4t} \int_0^{z_1} \int_0^{z_2} \sum_{j=2}^n F_{mj}(z_3) \\ & \times [\exp(-2(z_2 - z_3)) - \exp(2(z_2 - z_3))] dz_3 \\ & + O(\tau^{m+1}), \quad 0 < \tau \ll 1. \end{aligned}$$

## 5 方法的讨论及物理意义

用同伦映射和摄动方法得到解的收敛快慢, 不仅与构造相应的映射函数有关, 还取决于初始近似的选取. 本文的初始近似  $u_0(\xi)$  的选取是采用无扰动情形的破裂方程 (7) 的孤波解 (11) 式. 它保证了原非线性扰动时滞破裂孤波方程能较快地求得在要求的精度范围时滞孤波渐近解.

为了取得精度较高的时滞孤波近似解, 不仅依赖于扰动时滞函数的结构, 而且也取决于小时滞数的取值量级.

时滞破裂孤波方程具有广泛的物理背景. 它在理论物理, 凝聚态物理, 电路分析, 生化动力学和生态学等领域中都有重要的应用. 这类方程往往是通过非线性微分方程来描述的. 然而这类非线性方程一般不能用通常的方法来求出其孤波精确解, 因此需要用近似方法去求解它. 本文讨论的方法就是一个很好的近似解法.

## 6 结 论

当前, 许多非线性问题都涉及到孤波方程. 对孤波的研究不断深入, 并提出了许多非线性孤波求解的新方法. 本文就是讨论一类扰动时滞破裂孤波方程. 利用待定系数投射方法得到了孤波精确解. 再利用同伦映射和摄动理论相结合的方法求得了扰动破裂孤波方程的行波渐近解. 得到了满意的结果.

本文所得到的是孤波近似解析解, 所得到的解可以继续进行解析运算, 还可得到时滞孤波解的其它性态以及所连带相应解的孤波和混沌等行为, 因此这种方法比用单纯的模拟方法得到的时滞孤波解更具有其优越性.

- [1] Ma S H, Qiang J Y, Fang J P 2007 *Commun. Theor. Phys.* **48** 662  
[2] Parkes E J 2009 *Chaos Solitons Fractals* **38** 154  
[3] Yang J R, Mao J J 2008 *Chin. Phys. Lett.* **25** 1527  
[4] Yang X D, Ruan H Y, Luo S Y 2007 *Commun. Theor. Phys.* **48** 961  
[5] Yang J R, Mao J J 2008 *Chin. Phys. B* **17** 4337  
[6] Xu Y, Zhang J X, Xu X, Zhou H 2008 *Acta. Phys. Sin.* **57** 4029 (in Chinese) [徐云, 张建峡, 徐霞, 周红 2008 物理学报 **57** 4029]  
[7] Taogetusang, Sirendaoerji 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 2121 (in Chinese) [套格图桑, 斯仁道尔吉 2009 物理学报 **58** 2121]  
[8] Yang Z, Ma S H, Fang J P 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 040508 (in Chinese) [杨征, 马松华, 方建平 2011 物理学报 **60** 040508]  
[9] Lei J, Ma S H, Fang J P 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 050302 (in Chinese) [雷军, 马松华, 方建平 2011 物理学报 **60** 050302]  
[10] Mo J Q 2009 *Chin. Phys. Lett.* **26** 010204  
[11] Mo J Q 2009 *Chin. Phys. Lett.* **26** 060202  
[12] Mo J Q 2009 *Science in China, Ser. G* **59** 1007  
[13] Mo J Q, Lin Y H, Lin W T 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 6707 (in Chinese) [莫嘉琪, 林一骅, 林万涛 2010 物理学报 **59** 6707]  
[14] Mo J Q 2010 *Commun. Theor. Phys.* **53** 440  
[15] Mo J Q 2010 *Chin. Phys. B* **18** 010203  
[16] Mo J Q, Lin Y H, Lin W T 2010 *Chin. Phys. B* **19** 030202  
[17] Mo J Q 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 020202 (in Chinese) [莫嘉琪 2011 物理学报 2011 **60** 020202]  
[18] Ouyang C, Lin w t, Cheng R J, Mo J Q 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 960201 (in Chinese) [欧阳成, 林万涛, 程荣军, 莫嘉琪 2013 物理学报 **62** 960201]  
[19] Shi L F, Lin W T, Lin Y H, Mo J Q 2013 *Acta. Phys. Sin.* **62** 010201 (in Chinese) [石兰芳, 林万涛, 林一骅, 莫嘉琪 2013 物理学报 **62** 010201]  
[20] Shi L F, Mo J Q 2013 *Acta. Phys. Sin.* **62** 040203 (in Chinese) [石兰芳, 莫嘉琪 2013 物理学报 **62** 040203]  
[21] Lin W T, Zhang Y, Mo J Q 2013 *Chin. Phys. B* **22** 030205  
[22] Liao S J 2004 *Beyond Perturbation: Introduction to the Homotopy Analysis Method*, New York, CRC Press Co..  
[23] He J G 2002 *Approximate Nonlinear Analytical Methods in Engineering and Sciences*, (Zhengzhou: Henan Science and Technology Press) (in Chinese) [何吉欢 2002 工程和科学计算中的近似非线性分析方法 (郑州: 河南科学技术出版社)]  
[24] Alain H 1992 *Nonlinear Evolution Equations-Global Behavior of Solutions* (Berlin Springer-Verlag)  
[25] Barbu L, Morosanu G 2007 *Singularly Perturbed Boundary-Value Problems* (Basel: Birkhauser Verlag)

# Perturbation method of travelling wave solution for (2+1) dimensional disturbed time delay breaking solitary wave equation\*

Ouyang Cheng<sup>1)†</sup> Shi Lan-Fang<sup>2)</sup> Lin Wan-Tao<sup>3)</sup> Mo Jia-Qi<sup>4)</sup>

1) (Faculty of Science, Huzhou Teacher College, Huzhou 313000, China)

2) (College of Mathematics and Statistics, Nanjing University of Information Science & Technology, Nanjing 210044, China)

3) (State Key Laboratory of Numerical Modeling for Atmospheric Sciences and Geophysical Fluid Dynamic, Institute of Atmospheric Physics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100029, China)

4) (Department of Mathemtics, Anhui Normal University, Wuhu 241003, China)

(Received 5 May 2013; revised manuscript received 18 May 2013)

## Abstract

A class of (2+1) dimentional disturbed time-delay breaking solitary wave equation is studied. Firstly, the corresponding non-delay breaking equation is considered. The exact solitary wave solution is obtained by using the mapping method with undetermined coefficients. Then, the travelling asymptotic solution of disturbed breaking solitary wave equation is found by using the homotopic mapping and perturbed approximate method.

**Keywords:** solitary wave, travelling solution, approximate solution

**PACS:** 02.30.Lt

**DOI:** 10.7498/aps.62.170201

\* Project supported by the Strategic Priority Research of the Chinese Academy of Sciences (Grant No. XDA01020304), the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 41275062, 11202106), the Natural Science Foundation of Zhejiang Province, China (Grant Nos. Y6110502, LY13A010005), and the Natural Science Foundation from the Universities of Jiangsu Province (Grant No. 13KJB170016).

† Corresponding author. E-mail: oyc@hutc.zj.cn