

交通拥堵相变问题的同伦分析法*

韩祥临[†] 欧阳成 宋涛 戴孙圣

(湖州师范学院理学院, 湖州 313000)

(2013年4月8日收到; 2013年5月20日收到修改稿)

利用同伦分析法研究了一类基于洛伦兹系统的交通拥堵相变问题的非线性方程. 通过选取不同的初始解和不同的线性算子, 分别得到了问题的近似解和相应的残留误差. 通过与前人结果的比较得出, 在研究该类问题时同伦分析法优于微分变换法; 在应用同伦分析法时, 要选取尽可能接近原算子线性部分作为线性算子. 本文还给出了一种新的初始解选取方法(双同伦分析法). 数值模拟的结果证实了理论分析的正确性.

关键词: 同伦分析法, 交通拥堵, 近似解, 残留误差

PACS: 02.30.Mv, 45.70.Vn

DOI: 10.7498/aps.62.170203

1 引言

自进入 21 世纪以来, 随着经济持续高速增长, 工业化和城市化进程显著加快, 城市交通需求量也随之上升. 于是, 城市交通进入一个快速发展期, 多数城市初步建成了相应的道路网络和交通配套设施. 与之相适应, 交通流研究也步入了科学化、专业化、理论化的时代. 然而, 由于机动车和交通需求的不断增加, 现实生活中城市交通拥堵现象十分普遍, 交通拥堵的局面还没有根本性的改变, 并由此带来了一系列社会问题. 为缓解城市交通拥堵, 人们开始构建交通模型, 分析交通拥堵形成的机理.

已有的交通流模型可划分为多种不同的类型^[1], 根据描述细节水平或视角的不同, 可将交通流模型分为微观、介观和宏观模型. 基于自驱动粒子分析的微观模型从个体角度, 描述系统的实体(如车辆和驾驶员)以及它们相互作用的时空行为, 比如, 考虑换道时, 车辆的运动由若干邻近车辆及驾驶员的行为决定, 典型的微观交通流模型有: 元胞自动机模型、车辆跟驰模型等等. 基于动力论的介观模型则不去区别或追踪单个车辆和驾驶员的行为, 而是着重于部分整体的性质(如采用概率分布函数). 因此, 交通流的描述是在低细节的角度进

行的, 例如单个车辆的换道是一个瞬间行为, 但其作出换道行为的决定是基于相邻车道的密度、相对速度等多种因素. 有些介观模型的导出类似于气体动力论理论, 而所谓的气体动力论模型描述了速度函数分布的动力学特征. 基于流体力学的宏观模型是从集体的角度, 将交通行为者的整体作为连续介质处理, 不再区分单个组成部分的运动. 例如, 用车辆的平均密度、平均速度、平均流量等宏观物理量来刻画交通流, 对于单个车辆的诸如换道行为则不作具体考虑. 宏观模型根据偏微分方程的个数还可分为一方程、两方程和三方程模型, 或者根据方程的阶数分为一阶模型、高阶模型等; 运动学模型和流体力学动力学模型就是典型的宏观模型, 有时也称为连续介质模型.

近来, 许多学者从不同角度建立和分析交通流跟车模型^[2-8], 研究了交通流中的相关问题, 例如交通拥堵问题、交通事故问题和交通能耗问题. 特别, 一些学者研究了交通拥堵相变问题(jamming transition problem, JTP), 基于洛伦兹系统(Lorentz system)^[9,10]构建非线性交通模型, 然后通过一系列简化, 来求出非线性方程的近似解^[11]. 交通拥堵相变过程具有典型的非平衡态、非线性特征, 一直是交通流理论研究的重点内容^[12-16]. 一般地, 当车流密度增长超出某个临界值后, 自由流即转

* 国家自然科学基金(批准号: 11071205)和浙江省自然科学基金(批准号: LY13A010005, Y6110502)资助的课题.

[†] 通讯作者. E-mail: xlhan@hutc.zj.cn, xlhan653@163.com

变为拥堵流. 因此, 将自由流和拥堵流类比为热力学中的气液两相, 拥堵相变问题就可用传统的气液相变的研究方法类比研究. Nagatani^[15] 指出交通拥堵相变类似于热力学中气液两相的非平衡态一阶相变, 其特征可以用车流密度和敏感度(松弛时间的倒数) 替代热力学中密度和温度描述. Olemskoi 和 Khomenko 将早期的关于相变问题的研究^[16] 推广至分析交通拥堵相变^[17], 比拟经典的洛伦兹方程构建了微观的洛伦兹方程类车辆跟驰模型 (Lorentz-like equations car-following model), 通过简化求出模型的解析近似解, 并指出当车辆的特征加速/减速时间超过某个临界值时就会自发产生拥堵, 建立了一个自相容的协同理论. 原始的交通方程组为

$$\dot{\eta} = -\frac{\eta}{t_\eta} + v, \quad (1)$$

$$\dot{v} = -\frac{v}{t_v} + g_v \tau \eta, \quad (2)$$

$$\dot{\tau} = -\frac{\tau_0 - \tau}{t_\tau} + g_\tau \eta v, \quad (3)$$

其中 η 表示车头间距, τ 表示产生速度差 v 时的加速或刹车时间. 常数 t_η, t_v, t_τ 是对应的松弛时间, g_v 和 g_τ 是正的常数.

系统 (1)—(3) 很难求得精确解, 人们就对其进行简化: 假设 $t_\eta \gg t_\tau, t_\eta \approx t_v, \dot{\tau} t_\tau \approx 0$. 引入尺度 $t_\eta, \eta_m = (g_v g_\tau t_\tau t_\eta)^{-1/2}, v_m = t_\eta^{-3/2} (g_v g_\tau t_\tau)^{-1/2}, \tau_c = (g_v t_\eta^2)^{-1}$ 分别表示时间、车头间距、速度差和加速(刹车)时间. 定义

$$\tau_0 = g_v t_\tau t_\eta^2, \quad \sigma = \frac{t_\eta}{t_v}, \quad \varepsilon = \frac{t_0}{t_c},$$

则系统 (1)—(3) 可化为非线性方程

$$\ddot{\eta} + \dot{\eta}(1 + \sigma + \eta^2) - \eta(\varepsilon - \sigma) + \eta^3 = 0. \quad (4)$$

非线性方程 (4) 也很难求得精确的解析解. 文献 [11] 用微分变换法 (differential transform method) 并在初始条件 $\eta(0) = A, \dot{\eta}(0) = 0$ 下, 给出了 (4) 的含 t^5 的近似解

$$\eta(t) = \eta(0)t^0 + \eta(1)t^1 + \eta(2)t^2 + \dots \quad (5)$$

其中

$$\begin{aligned} \eta(0) &= A, \quad \eta(1) = 0, \\ \eta(2) &= \frac{1}{2}[(\varepsilon - \sigma)A - A^3], \\ \eta(3) &= \frac{1}{6}[A^5 + A^3(1 + 2\sigma - \varepsilon) \\ &\quad + A(\sigma - \varepsilon + \sigma^2 - \sigma\varepsilon)], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \eta(4) &= \frac{1}{24}[-A^7 + A^5(1 + \varepsilon - 3\sigma) \\ &\quad + A^3(2\sigma\varepsilon - 3\sigma^2 - 2\varepsilon - 1) \\ &\quad + A(\sigma^3 - \sigma + \sigma^2\varepsilon + \varepsilon^2 - \sigma^2 + \varepsilon)], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \eta(5) &= \frac{1}{120}[A^9 + A^7(4\sigma - 9 - \varepsilon) \\ &\quad + A^5(17\varepsilon - 17\sigma - 1 + 6\sigma^2 - 3\sigma\varepsilon) \\ &\quad + A^3(18\sigma\varepsilon + 4\sigma^3 - 7\sigma^2 + 1 \\ &\quad + \frac{120}{24}\varepsilon - \frac{120}{15}\varepsilon^2 - 3\sigma^2\varepsilon - 2\sigma) \\ &\quad + A(\sigma^3 + \sigma^2\varepsilon + \sigma^4 - \sigma^3\varepsilon - 2\varepsilon^2 \\ &\quad + \sigma\varepsilon - \varepsilon + \sigma^2 + 2\sigma\varepsilon^2 + \sigma)]. \end{aligned}$$

上述解析解只是 (4) 的一个近似解. 本文试图采用与文献 [11] 不同的方法——同伦分析法来研究相关问题, 给出问题的精确更高的近似解析解, 并通过误差估计和数值模拟与已有的结果进行比较, 来说明新方法和新结果的优越性. 在应用同伦分析法时, 由于初始近似解和线性算子对近似解的收敛速度影响很大, 所以我们试图选取不同的初始近似解和线性算子, 来探讨初始近似解和线性算子对近似解的影响.

2 同伦解析解

为了与文献 [11] 的解相区别, 我们用 x 表示 (4) 的解, 取初始解 $x_0 = A$, 线性算子 $L(x) = \ddot{x}$. 它显然满足初始条件 $x(0) = A, \dot{x}(0) = 0$ 和下列条件:

$$\text{当 } x = 0 \text{ 时, } L[x] = 0.$$

再取非线性算子 $N(x) = \ddot{x} + \dot{x}(1 + \sigma + x^2) - x(\varepsilon - \sigma) + x^3$. 构造如下同伦 (简称同伦法 A):

$$(1 - q)L[\phi(t, q) - x_0] - qhN[\phi(t, q)], \quad (6)$$

其中 $q \in [0, 1], \phi(t, q) = \sum_{i=0}^{+\infty} x_i q^i, h \neq 0$ 为待定的辅助参数.

令 (6) 等于零得到零阶形变方程

$$(1 - q)L[\phi(t, q) - x_0] - qhN[\phi(t, q)] = 0. \quad (7)$$

将 $\phi(t, q) = \sum_{i=0}^{+\infty} x_i q^i$ 代入 (7) 和初始条件 $x(0) = A, x'(0) = 0$, 比较 q 的一次幂得到

$$\begin{aligned} x_1'' &= h[(\sigma - \varepsilon)x_0 + x_0^3], \\ x_1(0) &= 0, \quad x_1'(0) = 0, \end{aligned}$$

解之得

$$x_1 = \frac{1}{2}Ah(\sigma - \varepsilon + A^2)t^2.$$

比较 q 的二次幂得到

$$x_2'' = h[x_1'' + x_1'(1 + \sigma) + x_1'x_0^2 + 2x_0'x_0x_1 + (\sigma - \varepsilon)x_1 + 3x_0^2x_1] + x_1'',$$

即

$$x_2'' = Ah^2(\sigma - \varepsilon + A^2) \left[1 + (1 + \sigma + A^2)t + \frac{1}{2}(\sigma - \varepsilon + 3A^2)t^2 \right] + h[(\sigma - \varepsilon)A + A^3],$$

$$x_2(0) = 0, \quad x_2'(0) = 0.$$

解上述方程得到

$$x_2 = Ah^2(\sigma - \varepsilon + A^2) \left[\frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{6}(1 + \sigma + A^2)t^3 + \frac{1}{24}(\sigma - \varepsilon + 3A^2)t^4 \right] + \frac{1}{2}Ah(\sigma - \varepsilon + A^2)t^2.$$

由同伦分析法, 我们得到方程的近似解

$$x \approx A + \frac{1}{2}Ah(\sigma - \varepsilon + A^2) \left[(2+h)t^2 \right.$$

$$\left. + \frac{1}{3}h(1 + \sigma + A^2)t^3 + \frac{1}{12}h(\sigma - \varepsilon + 3A^2)t^4 \right]. \quad (8)$$

我们先计算其残留误差, 只要残留误差足够小, 能满足实际要求, 我们就认为这个近似解是有效的. 由残留误差公式得到 (8) 的残留误差为

$$\Delta(x) = \left[\int_{-\infty}^{+\infty} [N(x)]^2 dx \right]^{1/2}. \quad (9)$$

易知 (9) 为 h 的函数, 我们与同伦摄动法相比就有了选择或调节的余地. 我们的目的是选择合适的 h 值, 使得残留误差最小. 这也正是同伦分析法比同伦摄动法的优越之处. 由于表达式 (9) 比较复杂, 我们就借助数值方法, 取定 A 的值, 用 Matlab 画出 $\Delta(x)$ 随 h 的变化情况 (如图 1). 由图 1 我们可以得出, h 取何值时 $\Delta(x)$ 最小, 并列表如表 1. 文献 [10] 和 [11] 只取表 1 中参数的前 4 行对应的 ε, σ 和 A 所构成的模式, 由于 $\sigma \approx 1$, 所以我们取范围更广的参数. 相应的近似解 (8) 的残留误差一并列于表 1.

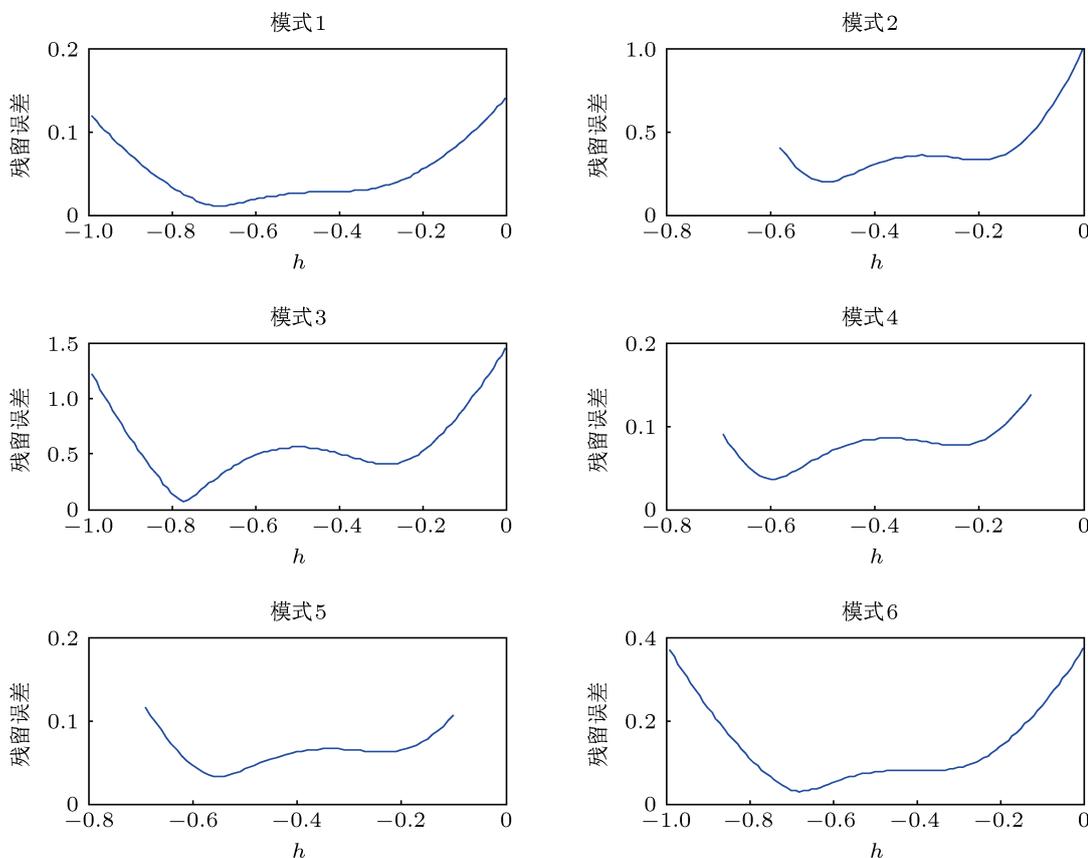


图1 $\Delta(x)$ 的残留误差随 h 的变化图

表 1 当 $\Delta(x)$ 取最小值时对应的 h 值表

模式	ε	σ	A	h	$\Delta(\eta)$	$\Delta(x)$
1	0.25	0.75	0.25	-0.69	0.0580592	0.010721
2	0.75	2.50	0.50	-0.50	8.6329832	0.1965
3	3.25	0.75	0.75	-0.77	1.2141365	0.073469
4	2.00	0.75	1.00	-0.60	1.6171333	0.036646
5	1.85	1.05	1.00	-0.55	2.6491723	0.032764
6	2.00	1.00	0.50	-0.68	0.8505901	0.02957

同伦分析法的优越性之一就是初始值选取的自由度很大. 但由于初始近似的选取对近似解的收敛速度影响很大, 盲目地选取初始值未必能得到理想的解. 为此, 我们采用双同伦法进行求解, 即先用同伦分析法求得近似解, 然后以该方程的一次近似解作为新的初始解, 再用同伦分析法求解 (简称同伦法 B). 这样选取初值会更加精确, 求得的解精度会更高. 为了与前面的解进行区别, 我们用 y 来表示因变量. 同上取线性算子、非线性算子和初始条件, 并构造相同的同伦. 所不同的是取上述 x_1 作为新的初值 y_0 , 即

$$y_0 = A + \frac{1}{2}h(\sigma - \varepsilon + A^2)At^2,$$

它显然满足初始条件 $y_0(0) = A, y_0'(0) = 0$.

再由同伦分析法, 我们得到方程的近似解

$$\begin{aligned} y \approx & A + \frac{1}{2}hA(A^2 - \varepsilon + \sigma)(3 + 3h + h^2)t^2 \\ & + \frac{1}{6}h^2A(A^2 - \varepsilon + \sigma)(1 + A^2 + \sigma)(3 + 2h)t^3 \\ & + \frac{1}{24}h^2A(A^2 - \varepsilon + \sigma)[A^4h - 3\varepsilon + 3\sigma \\ & + 9A^2 + 2hA^2(4 + \sigma) + h(1 - 2\varepsilon) + h\sigma(4 + \sigma)]t^4 \\ & + \frac{1}{60}h^3A(A^2 - \varepsilon + \sigma)[3A^4(5 + 3h) \\ & - (\varepsilon - \sigma)(1 + \sigma) - A^2\varepsilon(13 + 9h) \\ & + A^2(3 + 16\sigma + 9h\sigma)]t^5 \\ & + \frac{1}{720}h^3A(A^2 - \varepsilon + \sigma)[26A^6h + (\varepsilon - \sigma)^2 \\ & - 2A^2(\varepsilon - \sigma)(39 + 40h + 13h\sigma) + 81A^4 \\ & + hA^4(80 - 26\varepsilon + 52\sigma)]t^6 \\ & + \frac{1}{840}h^4A^3(A^2 - \varepsilon + \sigma)^2[13 + 4A^2(14 + 5h) \\ & - (31 + 20h)\varepsilon + 44\sigma + 20h\sigma]t^7 \\ & + \frac{1}{6720}h^4A^3(A^2 - \varepsilon + \sigma)^2[82A^4h \\ & - (\varepsilon - \sigma)(93 + 100h + 40h\sigma) + 129A^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & + 2hA^2(50 - 41\varepsilon + 61\sigma)]t^8 \\ & + \frac{1}{20160}h^5A^3(A^2 - \varepsilon + \sigma)^3 \\ & \times (40 + 213A^2 - 25\varepsilon + 65\sigma)t^9 \\ & + \frac{1}{67200}h^5A^3(A^2 - \varepsilon + \sigma)^3 \\ & \times [25(\sigma - \varepsilon) + 131A^2 + 124hA^2(A^2 - \varepsilon + \sigma)]t^{10} \\ & + \frac{157}{123200}h^6A^5(A^2 - \varepsilon + \sigma)^4t^{11} \\ & + \frac{1}{887040}h^6A^5(A^2 - \varepsilon + \sigma)^4 \\ & \times [171 + 110h(A^2 - \varepsilon + \sigma)]t^{12} \\ & + \frac{5}{69888}h^7A^5(A^2 - \varepsilon + \sigma)^5t^{13} \\ & + \frac{3}{326144}h^7A^5(A^2 - \varepsilon + \sigma)^5t^{14}. \end{aligned} \quad (10)$$

由 (10) 可以看出, 我们只需要求出二阶近似就可以得到方程的含有 t^{14} 的近似解. 我们计算其残留误差, 看看残留误差是否足够小. 先用 Matlab 画出 $\Delta(y)$ 随 h 的变化情况 (如图 2), 确定出 h 的最佳值, 再计算出对应的最小误差值 (见表 2).

表 2 当 $\Delta(y)$ 取最小值时对应的 h 值表

模式	ε	σ	A	h	$\Delta(y)$
1	0.25	0.75	0.25	-0.80	0.0023405
2	0.75	2.50	0.50	-0.66	0.085809
3	3.25	0.75	0.75	-0.70	0.065352
4	2.00	0.75	1.00	-0.70	0.014331
5	1.85	1.05	1.00	-0.70	0.011785
6	2.00	1.00	0.50	-0.75	0.0094539

3 又一个同伦解析解

同伦分析法的另一优点是线性算子选取的自由性. 但线性算子的不同选取方式同样对解的收敛速度有影响. 为此, 我们选取新的线性算子, 来探讨不同线性算子对解的影响程度. 把方程 (4) 中不含参数的线性部分全部取来作为新的线性算子, 这样或许可以求得更加精确的近似解. 同样为了与上文的解相区别, 我们用 φ 表示因变量.

取线性算子 $L(\varphi) = \varphi'' + \varphi'$, 非线性算子 $N(\varphi) = \ddot{\varphi} + \dot{\varphi}(1 + \sigma + \varphi^2) - \varphi(\varepsilon - \sigma) + \varphi^3$. 取初始解 $\varphi_0 = A$. 线性算子显然满足初始条件和下列条件:

$$\text{当 } \varphi = 0 \text{ 时, } L[\varphi] = 0.$$

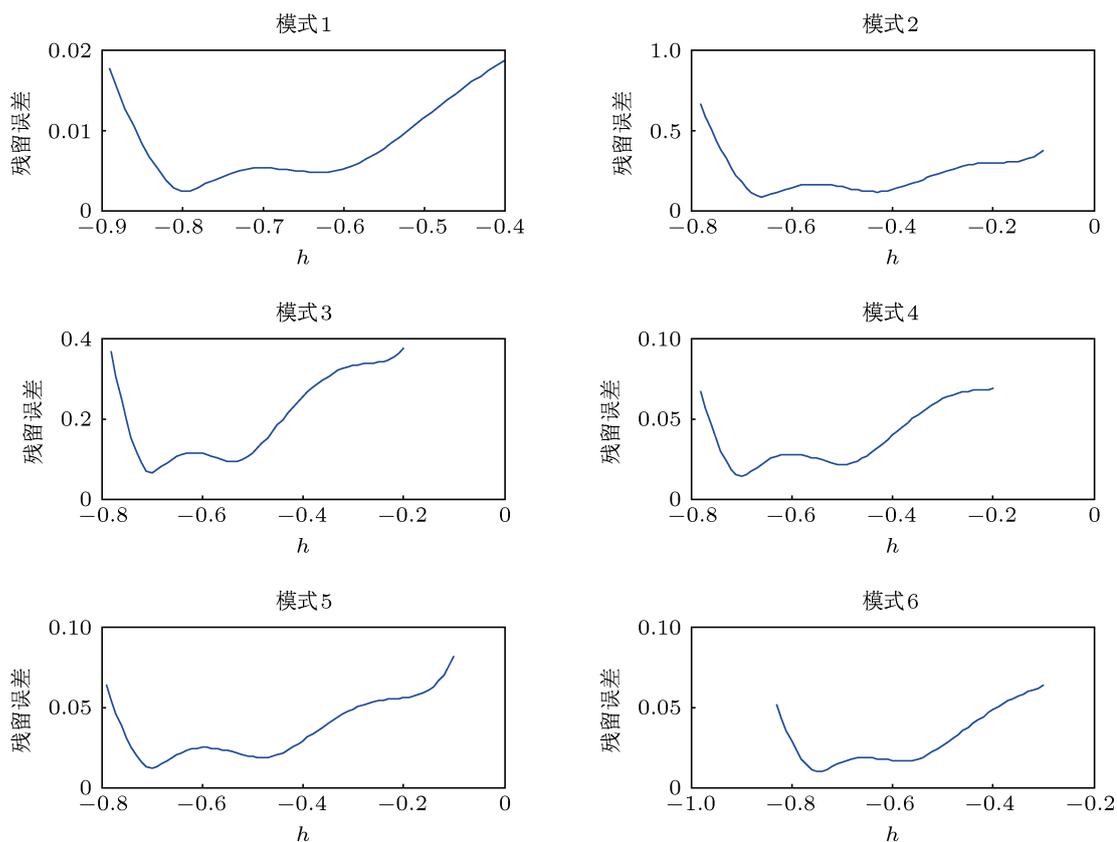


图2 $\Delta(y)$ 的残留误差随 h 的变化图

由同伦分析法可得方程的近似解 (简称同伦法 C)

$$\begin{aligned} \varphi \approx & A + hA(A^2 + \sigma - \varepsilon)[2 + h(1 + 3\varepsilon - \sigma - 7A^2) \\ & + h(\varepsilon - 2A^2)t]e^{-t} + hA(A^2 + \sigma - \varepsilon) \\ & \times \left[2(-1 + t) + h(-1 + \sigma - 3\varepsilon + 7A^2) \right. \\ & + h(1 - \sigma + 2\varepsilon - 5A^2)t \\ & \left. + \frac{1}{2}h(\sigma - \varepsilon + 3A^2)t^2 \right]. \end{aligned} \quad (11)$$

表3 当 $\Delta(\varphi)$ 取最小值时对应的 h 值表

模式	ε	σ	A	h	$\Delta(\varphi)$
1	0.25	0.75	0.25	0.83	0.0025313
2	0.75	2.50	0.50	0.59	0.10255
3	3.25	0.75	0.75	1.03	0.086775
4	2.00	0.75	1.00	0.73	0.015237
5	1.85	1.05	1.00	0.66	0.015423
6	2.00	1.00	0.50	0.85	0.0050118

我们以该方程的一次近似解作为新的初始解, 再用同伦分析法求解. 为了与上文方程的解进行区别, 我们用 z 来表示因变量. 由同伦分析法我们也

可得到方程的近似解 (简称同伦法 D)

$$\begin{aligned} z \approx & A + hA(A^2 + \sigma - \varepsilon)(-1 + t + e^{-t}) \\ & + \frac{1}{4}hA(A^2 + \sigma - \varepsilon)\{-4 + 28hA^2 \\ & + h^3A^2(53 + t^4)(A^2 + \sigma - \varepsilon)^2 \\ & - 34h^2A^2(A^2 + \sigma - \varepsilon) + 4h(-1 + \sigma - 3\varepsilon)\} \\ & - 4[-1 + h(-1 + \sigma - 3\varepsilon + 7A^2) \\ & - 8h^2A^2(A^2 + \sigma - \varepsilon) \\ & + 14h^3A^2(A^2 + \sigma - \varepsilon)^2]e^{-t} \\ & + h^2A^2(A^2 + \sigma - \varepsilon)[2 + 3h(A^2 + \sigma - \varepsilon)]e^{-2t} \\ & + \frac{1}{2}h^2A(A^2 + \sigma - \varepsilon)\{[\sigma - \varepsilon + 3A^2 \\ & - 10hA^2(A^2 + \sigma - \varepsilon) + 11h^2A^2(A^2 + \sigma - \varepsilon)^2]t^2 \\ & - 2hA^2(A^2 + \sigma - \varepsilon)[2 + h(A^2 + \sigma - \varepsilon)]t^2e^{-t}\} \\ & - \frac{1}{3}h^3A^3(A^2 + \sigma - \varepsilon)^2\{[-3 + 5h(A^2 + \sigma - \varepsilon)]t^3 \\ & + 2h(A^2 + \sigma - \varepsilon)t^3e^{-t}\} - hA(A^2 + \sigma - \varepsilon) \\ & \times \left\{ [h(-1 + \sigma - 2\varepsilon + 5A^2) - h^2A^2(A^2 + \sigma - \varepsilon) \right. \\ & \left. + 11h^3A^2(A^2 + \sigma - \varepsilon)^2 - 1]t \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &+h[2A^2 - \varepsilon + 2hA^2(A^2 + \sigma - \varepsilon) \\
 &+ 2h^2A^2(A^2 + \sigma - \varepsilon)^2]te^{-t} \\
 &- \frac{1}{2}h^3A^2(A^2 + \sigma - \varepsilon)^2te^{-2t} \}. \quad (12)
 \end{aligned}$$

(12) 式的 h 变化情况和残留误差情况见图 4 和表 4.

4 结果分析与数值模拟

将上述五种情况的残留误差汇总可以得到表

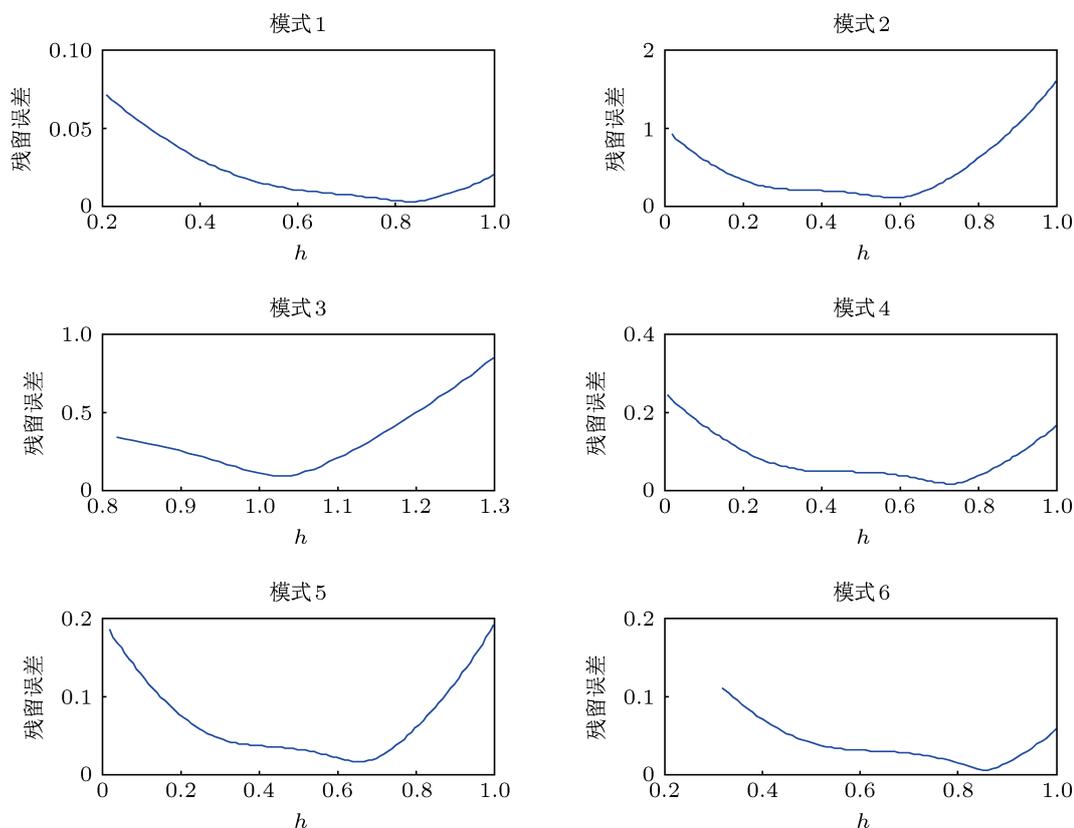


图 3 $\Delta(\varphi)$ 随 h 的变化情况图

表 4 当 $\Delta(z)$ 取最小值时对应的 h 值表

模式	ε	σ	A	h	$\Delta(z)$
1	0.25	0.75	0.25	-0.85	0.0023488
2	0.75	2.50	0.50	-0.62	0.097498
3	3.25	0.75	0.75	-0.75	0.060374
4	2.00	0.75	1.00	-0.70	0.016836
5	1.85	1.05	1.00	-0.68	0.014644
6	2.00	1.00	0.50	-0.79	0.0091057

第三, 同伦分析方法 B 的精度要比同伦分析法 A 的精度略高, 同伦分析法 D 的精度要比同伦分析法 C 的精度略高, 同样多组数据证实了这一点. 以模式 3 为例, 同伦分析法 B 的残留误差约为

5. 从表 5 中不难发现下列事实:

第一, 同伦分析方法要优于微分变换法. 以模式 2 为例, 四种情况下同伦方法的残留误差都低于 0.2, 而微分变换法则超过 8, 其他情况下的数据也同样验证了这一点.

第二, 同伦分析方法 C 要比同伦分析法 A 更加精确, 各组模式的数据都说明了这一点. 以模式 1 为例, 同伦分析法 A 的残留误差大于 0.01, 而同伦分析方法 C 则小于 0.003. 这说明取尽可能接近原方程的线性算子, 有利于提高近似解的精度.

0.065, 小于同伦分析法 A 的 0.073, 同伦分析法 D 的 0.06 小于同伦分析法 C 的 0.087.

第四, 同伦分析方法 B 的精度要比同伦分析法 C 的精度略高. 即双同伦分析法的一阶近似比同伦分析法的二阶近似精度要高. 说明对本文所研究的方程来说, 初始近似解的选取要比线性算子的选取更能提高近似解的精度.

第五, 对照图 5—7, 可以发现随着 t 的增大, 各种方法的残留误差都有所增加, 但区别在于, 微分变换法的残留误差增加得特别快, 其结果很不理想, 而同伦分析方法的残留误差只是略有增加, 其精度仍旧非常高.

表5 各方法下对应近似解的残留误差及 h 值表

模式	微分变换法误差	同伦法 A 误差 (h)	同伦法 B 误差 (h)	同伦法 C 误差 (h)	同伦法 D 误差 (h)
1	0.0580592	0.010721(-0.69)	0.0023405(-0.80)	0.0025313(0.83)	0.0023488(-0.85)
2	8.6329832	0.1965(-0.50)	0.085809(-0.66)	0.10255(0.59)	0.097498(-0.62)
3	1.2141365	0.073469(-0.77)	0.065352(-0.70)	0.086775(1.03)	0.060374(-0.75)
4	1.6171333	0.036646(-0.60)	0.014331(-0.70)	0.015237(0.73)	0.016836(-0.70)
5	2.6491723	0.032764(-0.55)	0.011785(-0.70)	0.015423(0.66)	0.014644(-0.68)
6	0.8505901	0.02957(-0.68)	0.0094539(-0.75)	0.0050118(0.85)	0.0091057(-0.79)

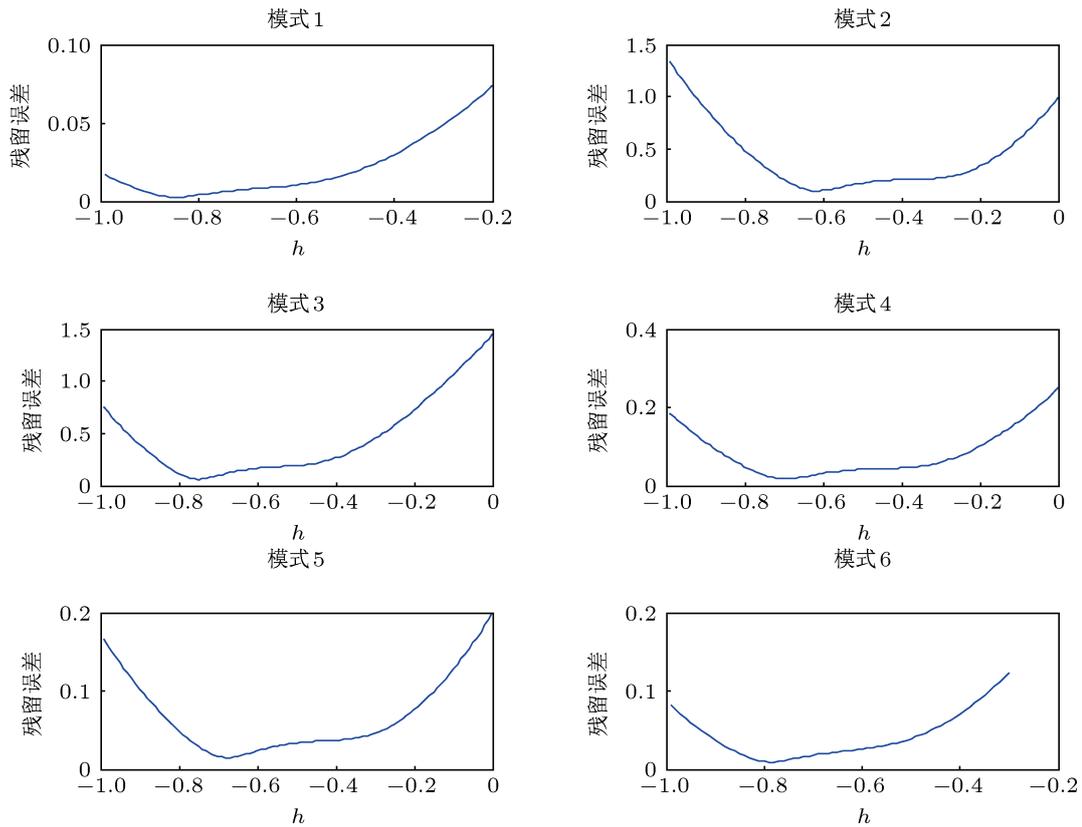


图4 $\Delta(z)$ 随 h 的变化情况图

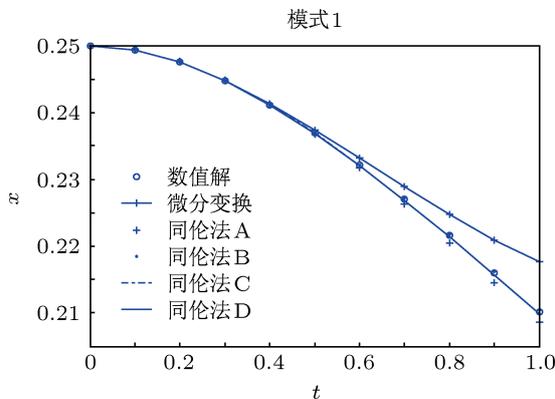


图5 模式1下六种方法的模拟对比图

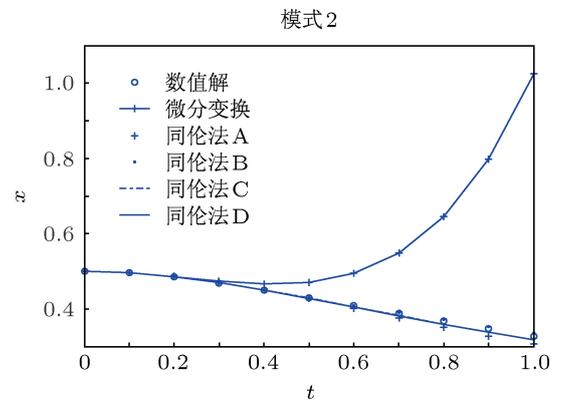


图6 模式2下六种方法的模拟对比图

为了更直观地了解各种近似解的变化情况,我们借助 Matlab 画出各种方法的近似解,并与 Runge-

Kutta 方法求得的数值解作比较 (见图 5—图 10). 以模式 2(见图 6)为例,当 t 为 $[0, 0.3]$ 时,各种方法

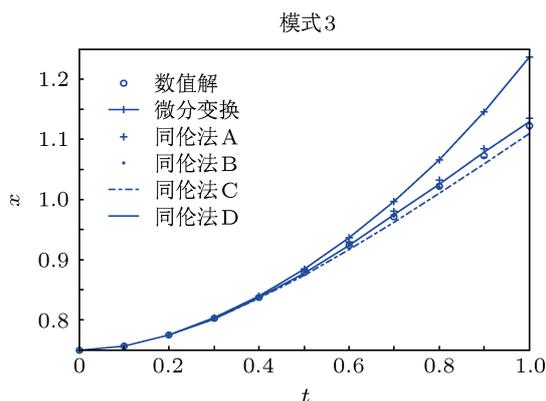


图7 模式3下六种方法的模拟对比图

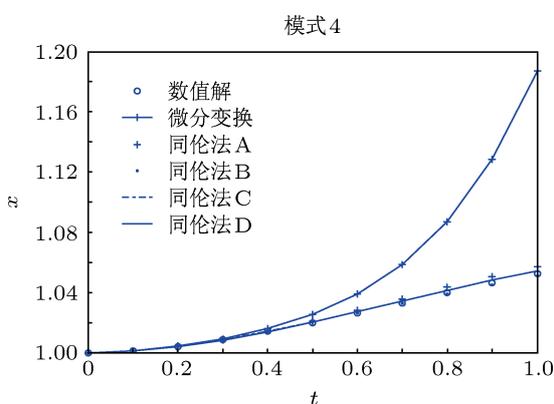


图8 模式4下六种方法的模拟对比图

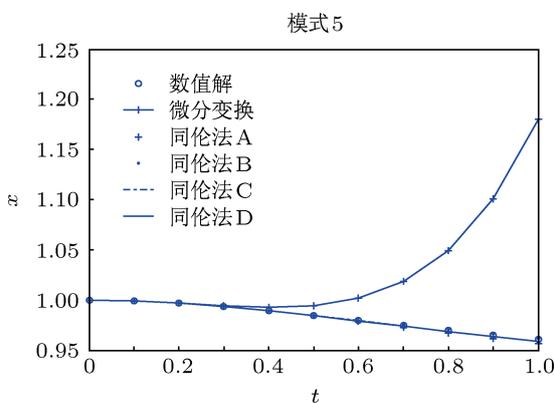


图9 模式5下六种方法的模拟对比图

得到的近似解都与 Runge-Kutta 方法求得的数值解几乎重合, 但 t 为 $[0.3, 1]$ 时, 微分变换法就开始偏离精确解, 而且偏离越来越大, 而同伦分析方法与 Runge-Kutta 方法求得的数值解几乎重合, 部分略

有偏差, 但偏差都不大. 充分说明同伦分析法比微分变换法能求得更精确的近似解.

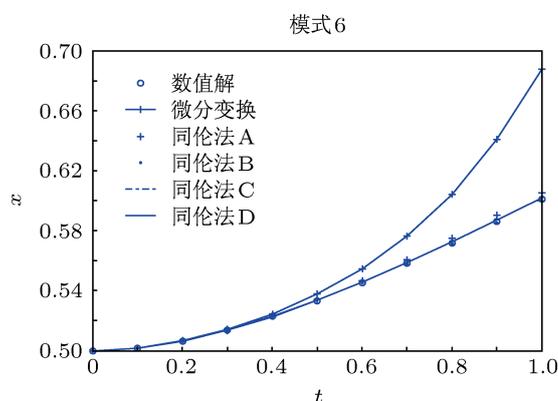


图10 模式6下六种方法的模拟对比图

5 结论

本文用同伦分析法给出了交通拥堵相变问题的非线性方程的近似解和误差估计. 通过分析我们可以看出, 同伦分析方法求得的近似解要比微分变换法更加精确, 说明同伦分析方法在这方面要优于微分变换法. 数值模拟和误差估计的结果充分说明了这一点. 在使用同伦分析方法时, 根据线性算子的选取不同, 其对应的近似解也有区别. 本文选取了两个不同的线性算子, 通过理论分析和数值模拟可以看出, 对于线性算子我们要选取尽可能接近原算子线性部分作为线性算子, 这样所得的结果要优于选取其他形式的线性部分作为线性算子所得的结果, 即近似解的精度更高. 同时, 我们还给出了一种选取初始近似解的方法: 在使用同伦分析方法时, 可先根据方程的特点选取一个初始近似解, 用同伦分析法求得一阶近似解, 并以此作为新的初始解值再使用同伦分析方法求非线性方程的解. 使用这种选取初始解的方法所得到的一阶近似解, 要比直接使用同伦分析法所得二阶近似解收敛速度更快, 结果更精确. 本文的研究结果充分说明了上述结论. 另外, 我们也可以看出, 边界条件对近似解的影响也是很大的, 我们将另文撰述.

- [1] Orosz G, Wilson R E, Stépán G 2010 *Phil. Trans. Math. Phys. Eng. Sci.* **368** 4455
- [2] Helbing D, Tilch B 1998 *Phys. Rev. E* **58** 133
- [3] Wagner P 2011 *Eur. Phys. J. B* **84** 713
- [4] Wang T, Gao Z Y, Zhao X M 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 634 (in Chinese) [王涛, 高自友, 赵小梅 2006 物理学报 **55** 634]
- [5] Ge H X, Han X L 2006 *Physica A* **371** 667
- [6] Han X L, Jiang C Y, Ge H X, Dai S Q 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 4383 (in Chinese) [韩祥临, 姜长元, 葛红霞, 戴世强 2007 物理学报 **56** 4383]
- [7] Jiang R, Wu Q S 20015 *Eur. Phys. J. B* **46** 581
- [8] Tang C F, Jiang R, Wu Q S 2007 *Phys. A* **377** 641
- [9] Olemskoi A I, Khomenko A V 1996 *Am. Inst. Phys.* **83** 1180
- [10] Ganji S S, Barari A, Ibsen L B, Domairry D 2012 *Cent. Eur. J. Oper. Res.* **20** 87
- [11] Ganji S S, Barari A, Najafi M, Domairry D 2011 *Can. J. Phys.* **89** 729
- [12] Chowdhury D, Santen L, Schadschneider A 2000 *Phys. Rep.* **329** 199
- [13] Helbing D R 2001 *Mod. Phys.* **73** 1067
- [14] Li X L, Song T, Kuang H, Dai S Q 2008 *Chin. Phys. B* **17** 3014
- [15] Nagatani T 1998 *Phys. Rev. E* **58** 4271
- [16] Olemskoi A I, Khomenko A V 1996 *J. Exp. Theor. Phys.* **83** 1180
- [17] Olemskoi A I, Khomenko A V 2001 *Phys. Rev. E* **63** 036116

The homotopy analysis method for a class of jamming transition problem in traffic flow*

Han Xiang-Lin[†] Ouyang Cheng Song Tao Dai Sun-Sheng

(Faculty of Science, Huzhou Teachers College, Huzhou 313000, China)

(Received 8 April 2013; revised manuscript received 20 May 2013)

Abstract

Using the homotopy analysis method (HAM), the nonlinear equation of the jamming transition problem (JTP) in traffic flow is discussed, which is based on the Lorentz system. Through choosing different initial approximation solutions and different linear operators, approximation solutions of the JTP and the corresponding residual errors are obtained respectively. By comparing the present results with the previous related studies, the following conclusions can be drawn that the HAM is superior to the differential transform method; however, a linear operator should be chosen as best you can to approach the linear part of the original operator in using the HAM. A new method to choose the initial approximation solution (named double HAM) is given. The correctness of the theoretical analysis is verified by numerical simulation.

Keywords: homotopy analysis method, traffic jam, approximate solution, residual error

PACS: 02.30.Mv, 45.70.Vn

DOI: 10.7498/aps.62.170203

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 11071205), and the Natural Science Foundation of Zhejiang Province, China (Grant Nos. LY13A010005, Y6110502).

[†] Corresponding author. E-mail: xlhan@hutc.zj.cn, xlhan653@163.com