

一个简单延迟非线性系统的动力学行为及混沌同步*

肖建新¹⁾ 陈菊芳²⁾ 彭建华^{1)†}

1) (深圳大学物理科学与技术学院, 深圳 518060)

2) (东北师范大学物理学院, 长春 130024)

(2013年4月2日收到; 2013年5月17日收到修改稿)

分析一个简单二阶延迟系统的 Hopf 分支和混沌特性, 包括分支点、分支方向和分支周期解的稳定性, 解析求出退延迟情况下, 这个系统的相轨线方程; 通过数值计算并绘制分岔图, 揭示系统存在由倍周期通向混沌的道路; 利用单路线性组合信号, 反馈控制实现系统的部分完全同步; 利用主动 - 被动与线性反馈的联合, 实现系统的完全同步; 设计和搭建系统的电子实验线路, 并从实验中观测到与理论分析或数值计算相一致的结果.

关键词: 延迟非线性系统, 电路实验, Hopf 分支, 混沌

PACS: 05.45.-a, 05.45.Xt

DOI: 10.7498/aps.62.170507

1 引言

许多随时间演化的系统其内部物质相互作用或输运过程中存在着时间延迟(时滞)现象^[1-5], 即刻画系统动力学方程中, 其状态变量不仅与当前有关, 而且还与历史有关, 通常这类方程称为时滞微分方程^[6,7]. 与微分方程不同的是: 时滞微分方程具有无穷维数; 即便这类方程只有一个变量且只是一阶的它也会出现振荡现象, 若系统是非线性的, 则一阶时滞方程还可能呈现诸如极限环、倍周期分岔和混沌等丰富的动力学行为^[8-12]. 而在微分方程描述的非线性自治系统中, 至少要 3 阶或 3 阶以上的系统才可能出现上述现象. 从实际应用上, 利用混沌信号的伪随机性和混沌系统间的可同步性, 将混沌用于加密或保密通讯已成为相关领域研究的热点. 大量的研究表明, 低维混沌用于信号加密存在被破译的可能, 高维混沌则具有较强的抗破译能力. 正是离散或连续的延迟混沌系统具有高维的特征, 也被用于同步加密方面的研究^[13-15]. 从实际系统中提供的延迟非线性模型是十分有限的, 而且有些延迟系统也不易于在电路实验中实现, 利用电子器件自身的非线性伏安特性或由若干器件构建

具有非线性伏安特性函数, 建立状态方程简单, 但动力学行为丰富的延迟系统, 这在实际应用中是有意义的.

2 具有平方项的二阶延迟电路的分岔和混沌特征

具有平方项的二阶延迟电路如图 1 示^[16,17], 经标度变换后, 其对应的状态方程可写为

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -ay, \\ \dot{y} &= bx + y^2 - cy(t - \tau). \end{aligned} \quad (1)$$

这里

$$\begin{aligned} a &= 1 + \frac{R_5}{R}, \quad b = \frac{R}{R_1}, \quad c = \frac{R}{R_3}, \\ t &\rightarrow \frac{t}{R_0 C_0}, \quad \tau = \frac{\tau_d}{R_0 C_0}. \end{aligned}$$

实验中取 $R_0 = 62 \text{ k}\Omega$, $C_0 = 0.01 \mu\text{F}$, $R = 10 \text{ k}\Omega$, $R_1 = 5.56 \text{ k}\Omega$, $R_2 = 1.0 \text{ k}\Omega$, $R_4 = 31.5 \text{ k}\Omega$, $R_5 = 8.0 \text{ k}\Omega$, 和 $\tau_d = 0.62 \text{ ms}$, 相当 $a = 1.8$, $b = 1.8$, $\tau = 1.0$. 延时采用级数 N 可调节的 π 型 LC 低通滤波器级联. 实验中以 R_3 为可调参量, 即对应着方程 (1) 中的参量 c .

* 国家自然科学基金(批准号: 70571053)和吉林省科技发展计划(批准号: 201205001)资助的课题.

† 通讯作者. E-mail: pengjh173@163.com

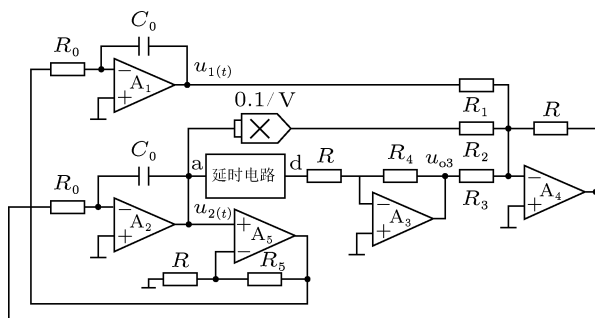


图1 具有平方项的二阶延迟电路系统

从实验的角度, 若以延迟时间作为可变参量, 则要增加或减少 π 型 LC 低通滤波器级联个数, 这就要重新调整低通滤波器其幅频和相频特性与系统频率的配给条件, 实验过程较繁琐. 简单的方式是选择电路中的某个电阻, 这也就是我们选择参量 c 即电阻 R_3 作为可调参数的原因. 实验中, 将电阻 R_3 值由大至小的变化过程中, 从示波器的屏幕上, 依次可观察到电路由倍周期分岔通向混沌的道路等丰富的动力学行为.

3 Hopf 分支的存在性、分支方向和分支周期的稳定性

3.1 Hopf 分支的存在性

延迟方程 (1) 的唯一定态点是 $O = (0, 0)$, 在点 O 附近, 对方程 (1) 线性展开, 特征方程为

$$\lambda^2 + \lambda c e^{-\lambda \tau} + ab = 0. \quad (2)$$

令 $\lambda = i\omega$, 分离实部、虚部, 有

$$\begin{aligned} ab - \omega^2 + c\omega \sin(\omega\tau) &= 0, \\ c\omega \cos(\omega\tau) &= 0, \end{aligned} \quad (3)$$

或

$$\omega^4 - (2ab + c^2)\omega^2 + a^2b^2 = 0. \quad (4)$$

由 (3) 式中的第二式, 得

$$\omega_k = \frac{1}{\tau} \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi \right), \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (5)$$

联立 (4), (5) 式, 并分别将 a, b 和 τ 值代入, 求得

$$\omega_0 = 1.5552, \quad c_0 = -0.5280. \quad (6)$$

对 (2) 式中的参量 c 求导, 有

$$\lambda' = \frac{d\lambda}{dc} = \frac{\lambda e^{-\lambda \tau}}{-2\lambda - c e^{-\lambda \tau} + c \lambda e^{-\lambda \tau} \tau}, \quad (7)$$

其实部为

$$\text{Re}(\lambda'(c_0)) = -0.0926 \neq 0. \quad (8)$$

根据 Hopf 分支理论, 方程 (1) 将在 $c = c_0 = -0.5280$ 处, 产生 Hopf 分支.

3.2 Hopf 分支方向及分支周期解的稳定性

做如下变换 $t = s\tau$, 再令 $t = s$, 系统 (1) 等价于

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\tau a y, \\ \dot{y} &= \tau \{ b x + y^2 - c y(t-1) \}. \end{aligned} \quad (9)$$

令 $c = c_0 + \mu$, 当 $\mu = 0$ 时, 方程 (9) 发生 Hopf 分支. 对任意的连续函数 $\phi \in C^1$, 令

$$L_\mu \phi = \tau B \phi(0) + \tau C \phi(-1)$$

和

$$F(\mu, \phi) = \begin{pmatrix} F_1(\mu, \phi) \\ F_2(\mu, \phi) \end{pmatrix},$$

这里

$$\begin{aligned} B &= \begin{pmatrix} 0 & -a \\ b & 0 \end{pmatrix}, \\ C &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}, \quad F_2(\mu, \phi) = \tau y_t^2. \end{aligned}$$

根据 Riesz 表象理论, 存在有界变差函数 $\eta(\theta + \mu)$, $\theta \in [-1, 0]$, 使得

$$L_\mu \phi = \int_{-1}^0 \eta(\theta + \mu) \phi(\theta) d\theta.$$

选择

$$\eta(\theta + \mu) = \tau B \delta(\theta) + \tau C \delta(\theta + 1),$$

其中 δ 为 Dirac 函数. 对 $\phi \in C^1([-1, 0], \mathbb{R}^2)$, 定义

$$A(\mu) \phi = \begin{cases} \frac{d\phi(\theta)}{d\theta}, & -1 \leq \theta < 0, \\ \int_{-1}^0 d\eta(s, \mu) \phi(s), & \theta = 0, \end{cases} \quad (10)$$

$$R\phi = \begin{cases} 0, & -1 \leq \theta < 0, \\ F(\mu, \theta), & \theta = 0, \end{cases} \quad (11)$$

则

$$u_t = A(\mu)u_t + R(\mu)u_t. \quad (12)$$

这里

$$u_t = u(t + \theta), \theta \in [-1, 0].$$

对 $\varphi \in C([0, 1], (R^2)^*)$, 定义

$$A^* \varphi(s) = \begin{cases} -\frac{d\varphi(s)}{ds}, & 0 < s \leq 1, \\ \int_{-1}^0 d\eta^T(t, 0)\varphi(-t), & s = 0, \end{cases} \quad (13)$$

A^* 是 A 的共轭. 定义内积

$$\langle \varphi, \phi \rangle = \bar{\varphi}(0)\phi(0) - \int_{-1}^0 \int_{\xi=0}^{\theta} \bar{\varphi}(\xi - \theta) \times d\eta(\theta)\phi(\xi) d\xi, \quad (14)$$

其中 $\eta(\theta) = \eta(\theta, 0)$. 计算 $A(A^*)$ 对应特征值 $i\omega_0\tau$ ($-i\omega_0\tau$) 的特征向量 $q(\theta)(q^*(s))$, 得

$$q(\theta) = \left(1, \frac{-i\omega_0}{a}\right)^T e^{i\omega_0\tau\theta},$$

$$q^*(s) = D \left(1, \frac{-i\omega_0}{b}\right) e^{i\omega_0\tau s}, \quad (15)$$

其中 $\theta \in [-1, 0], s \in [0, 1]$.

令 $r = \frac{-i\omega_0}{a}$, $r^* = \frac{-i\omega_0}{b}$, 由 $\langle q^*, q \rangle = 1$, $\langle q^*, \bar{q} \rangle = 0$, 有

$$D = \frac{1}{1 + r\bar{r}^* - \tau c e^{-i\omega_0\tau r^*}}. \quad (16)$$

参照文献 [12] 的计算方法, 得到

$$\begin{aligned} g_{20} &= 2\tau \bar{D} \bar{r}^* r^2 = -0.1617 - 0.7092i, \\ g_{11} &= \tau \bar{D} \bar{r}^* r \bar{r} = 0.0808 + 0.3546i, \\ g_{02} &= 2\tau \bar{D} \bar{r}^* \bar{r}^2 = -0.1617 - 0.7092i, \\ g_{21} &= 2\tau \bar{D} \bar{r}^* r \left(-\frac{i g_{11}}{\omega_0 \tau} q(0) e^{i\omega_0\tau\theta} \right. \\ &\quad \left. + \frac{i \bar{g}_{11}}{3\omega_0 \tau} \bar{q}(0) e^{-i\omega_0\tau\theta} + E_2 \right) \\ &\quad + \tau \bar{D} \bar{r}^* \bar{r} \left(\frac{i g_{20}}{\omega_0 \tau} q(0) e^{i\omega_0\tau\theta} \right. \\ &\quad \left. + \frac{i \bar{g}_{02}}{3\omega_0 \tau} \bar{q}(0) e^{-i\omega_0\tau\theta} + E_1 e^{2i\omega_0\tau\theta} \right), \end{aligned} \quad (17)$$

这里

$$E_1 = [2i\omega_0\tau - \tau \int_{-1}^0 e^{2i\omega_0\tau\theta} d\eta(\theta)]^{-1} \cdot f_{z^2},$$

$$E_2 = -[\tau \int_{-1}^0 d\eta(\theta)]^{-1} \cdot f_{z\bar{z}}.$$

由上述结果, 可分别求得

$$C_1(0) = \frac{i}{2\omega_0} \left(g_{11}g_{20} - 2|g_{11}|^2 - \frac{|g_{20}|^2}{3} \right) + \frac{g_{21}}{2}$$

$$\begin{aligned} &= 0.0357 - 0.0652i \\ \mu_2 &= \frac{-\text{Re}(C_1(0))}{\text{Re}(\lambda'(c_0))} = 0.3855, \\ \beta &= 2\text{Re}(C_1(0)) = 0.0714, \\ \tau_2 &= -\frac{\text{Im}(C_1(0)) + \mu_2 \text{Im}(\lambda'(c_0))}{\omega_0} = -0.0588, \\ T &= \frac{2\pi}{\omega_0} [1 + \tau_2 \varepsilon^2 + O(\varepsilon^4)] \\ &= 4.040 [1 - 0.0588 \varepsilon^2 + O(\varepsilon^4)], \end{aligned} \quad (18)$$

其中 ε 为一个小量

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 &= (c - c_0) / \mu_2 + O(c - c_0)^2 \\ &= 2.5940(c + 0.5280) + O(c - c_0)^2. \end{aligned}$$

因为 $\mu_2 = 0.3855 > 0$, $\beta = 0.0714 > 0$ 和 $\tau_2 = -0.0588 < 0$, 所以在 $c > c_0 = -0.5280$ 的邻域内, 方程 (1) 存在不稳定的周期解, 即不稳定的极限环, 且分支的周期是逐渐减小的. 图 2 给出系统不稳定极限环的演化过程: (a) 为数值计算结果, $c = -0.5280$, 初值 $x = 0.1, y = 0.01$; (b) 为实验结果, 初值 $x = 0, y = 0.2 \text{ V}$.

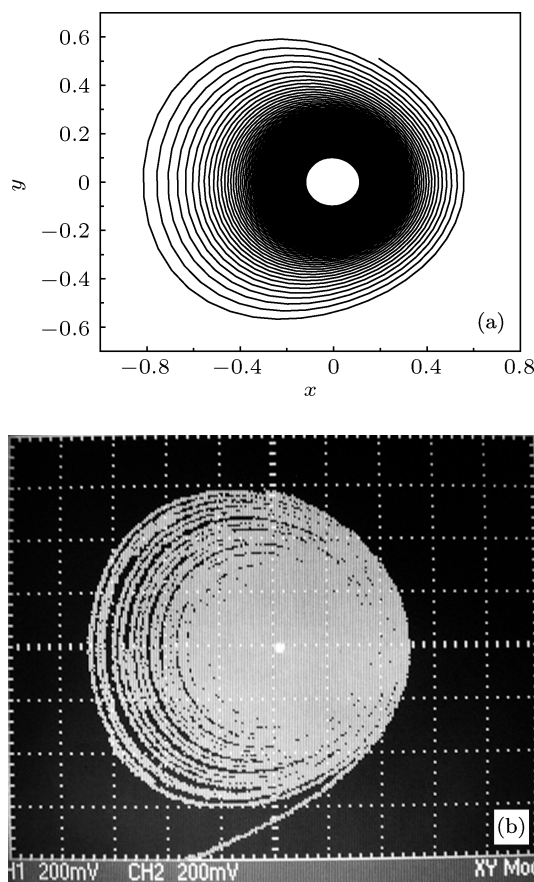


图 2 不稳定极限环

根据上述关于分支方向的结果, 存在 $c = 0$ 的情况, 这时方程 (1) 将化成

$$\dot{y} = -aby + 2yy. \quad (19)$$

它的定态点 $O = (0, 0)$ 为一中心. 在 O 点的邻域内, 选取不同初值, 系统轨道的半径也不同. 从方程 (19), 我们可以解析地求得系统相轨线方程. 令 $\frac{dy}{dt} = v$, 则

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dy} \frac{dy}{dt} = v \frac{dv}{dy} = -2y \left(\frac{ab}{2} - v \right). \quad (20)$$

分离变量并积分, 得

$$v + \frac{ab}{2} \ln \left(\frac{ab}{2} - v \right) = y^2 + C_1. \quad (21)$$

设初始条件为 $v = v_0, y = y_0, x = x_0$, 它们满足 $y_0^2 + bx_0 = v_0, C_1$ 由

$$v_0 + \frac{ab}{2} \ln \left(\frac{ab}{2} - v_0 \right) = y_0^2 + C_1$$

确定.

还可将 (21) 式, 写成

$$v = -C_2 e^{-\frac{2x}{a}} + \frac{ab}{2}, \quad (22)$$

这里 $C_2 = e^{\frac{2x}{a}} C_1 > 0$. 又由

$$v = \frac{dy}{dx} \frac{dx}{dt} = (-ay) \frac{dy}{dx} = -C_2 e^{-\frac{2x}{a}} + \frac{ab}{2}$$

分离变量并积分, 得

$$y^2 = -\frac{C_2}{2} e^{-\frac{2x}{a}} - \frac{b}{2} x + C_3. \quad (23)$$

在 $x = 0$ 的邻域内, 对 $e^{-\frac{2x}{a}}$ 泰勒展开, 保留到平方项, 得

$$y^2 = -\frac{C_2}{2} \left(1 - \frac{2x}{a} + \frac{2x^2}{a^2} \right) - \frac{b}{2} x + C_3.$$

简化后, 有

$$\frac{y^2}{B^2} + \frac{(x-k)^2}{A^2} = 1, \quad (24)$$

其中 $k = \frac{a^2}{4} \left(\frac{2C_3 - ab}{aC_3} \right), A^2 = B^2 a^2 / C_3$ 和 $B^2 = C_4 + \frac{C_3}{a^2} \left(k^2 - \frac{a^2}{2} \right)$. 只有当 $C_3 \approx a^2$ 时, 轨线族接近于圆. 一般情况下, 轨线族均为椭圆.

3.3 倍周期分岔通向混沌的道路

沿着 $c > c_0$ 的方向, 绘制分岔图, 如图 3 所示, 可知系统 (1) 存在由倍周期通向混沌的道路. 图 4 所示的混沌吸引子, 其结构与实验十分接近.

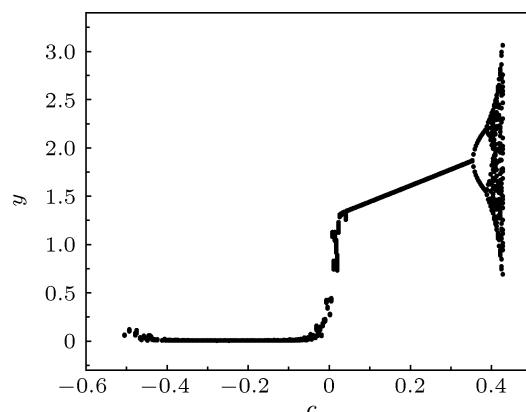


图 3 系统 (1) 的分岔图

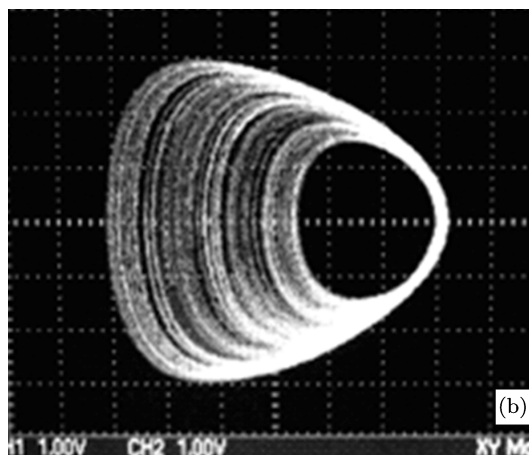
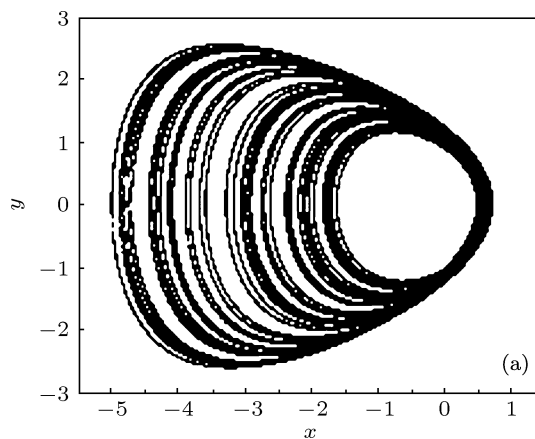


图 4 数值计算 (a) 和实验观测 (b) 的混沌态 (a) $c = 0.43$; (b) $R_3 = 23 \text{ k}\Omega$

4 混沌同步

4.1 单路线性组合信号反馈实现部分同步 [18,19]

系统 (1) 作为发送系统, 令 $x_1 = x, x_2 = y$, 有

$$\dot{x}_1 = -ax_2,$$

$$\dot{x}_2 = bx_1 + x_2^2 - cx_2(t - \tau), \quad (25)$$

单路发送信号为 $u = K^T \cdot x = k_1x_1 + k_2x_2$, 其中 $x = (x_1x_2)^T$, K 为常数列矢量, T 为转置算符. 接收系统为

$$\dot{y} = F(y(t), y(t - \tau)) - B(v - u), \quad (26)$$

式中 $v = K^T \cdot y = k_1y_1 + k_2y_2$, $B = (B_1, B_2)^T$. 具体地

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= -ay_2 - [B_1k_1(y_1 - x_1) + B_1k_2(y_2 - x_2)], \\ \dot{y}_2 &= by_1 + y_2^2 - cy_2(t - \tau) \\ &\quad - [B_2k_1(y_1 - x_1) + B_2k_2(y_2 - x_2)]. \end{aligned} \quad (27)$$

令 $e = y - x$, 联立 (25) 和 (27) 式, 得

$$\begin{aligned} \dot{e}_1 &= -ae_2 - (B_1k_1e_1 + B_1k_2e_2), \\ \dot{e}_2 &= be_1 + (y_2 + x_2)e_2 - ce_2(t - \tau) \\ &\quad - (B_2k_1e_1 + B_2k_2e_2). \end{aligned} \quad (28)$$

若 $B = (B_1, B_2)^T = (1, B_2)^T$ 和 $K^T = (k_1, -a)$, 则

$$\dot{e}_1 = -k_1e_1.$$

只要 $k_1 > 0$, 则当 $t \rightarrow \infty$ 时, 必有 $e_1 \rightarrow 0$, 即系统 (25) 和 (27) 至少存在部分同步.

我们设计了实现单路线性组合信号反馈同步混沌的实验电路, 如图 5 所示. 虚线框中的各电阻值与图 1 中相应位置的电阻取值相同, 虚线框外为同步控制电路部分, 方框表示由运放构成的差动减法电路, 各电位器的取值分别为: $R_{w1} = 124 \text{ k}\Omega$, $R_{w2} = 34.44 \text{ k}\Omega$, $R_{w3} = 20 \text{ k}\Omega$, $R_{w4} = 5.56 \text{ k}\Omega$. 实验结果如图 6 所示. 其结果验证了理论分析的正确性.

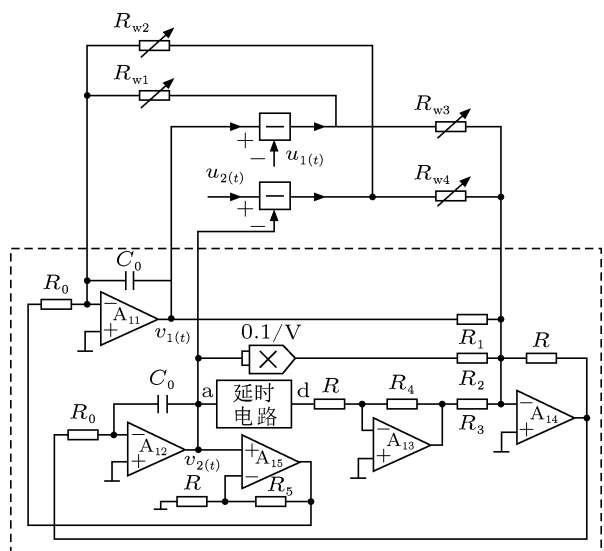


图 5 单路线性组合信号反馈同步混沌的实验电路

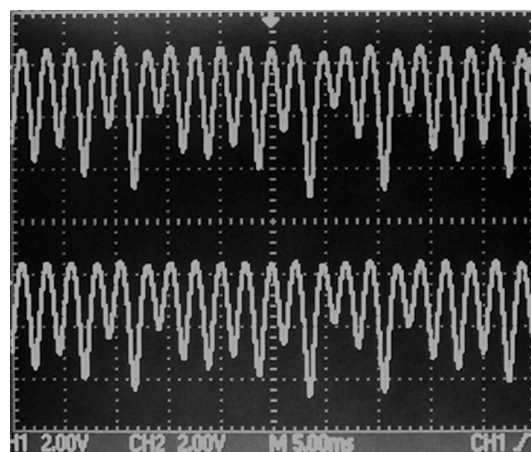


图 6 实验观测到的 $x_1(t)$ (上图) 和 $y_1(t)$ (下图) 随时间演化的结果

4.2 主动-被动联合信号反馈同步 [20-22]

以 $x_2^2 + kx_2$ 作为单一驱动信号, 接收系统为

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= -ay_2, \\ \dot{y}_2 &= by_1 + x_2^2 - cy_2(t - \tau) - k(y_2 - x_2). \end{aligned} \quad (29)$$

联立 (25) 和 (29) 式, 得

$$\dot{e}_1 = -ae_2, \quad \dot{e}_2 = be_1 - ce_2(t - \tau) - ke_2. \quad (30)$$

对应的特征方程是

$$\lambda^2 + (c + k)\lambda e^{\lambda\tau} + ab = 0. \quad (31)$$

利用 W 函数 [23], 可得到特征方程 (31) 所有根实部为最大的根随反馈参量 k 变化的关系, 如图 7 示. 根据计算结果可知: 当 $k > 0.33$, 实部最大的根小于零. 也就是说方程 (30) 的解为渐进稳定的. 系统 (25) 和 (29) 是同步的.

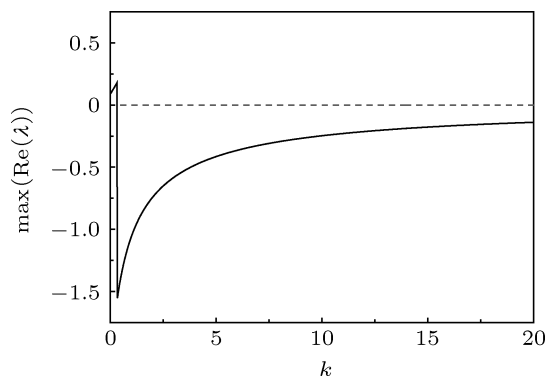


图 7 W 函数与 k 的关系, $c = 0.43$

我们设计的实验电路, 如图 8 所示. 虚线框中的各电阻值与图 1 中相应位置的电阻取值相同,

虚线框外为同步控制电路部分, 电位器的取值为 $R_w = 20 \text{ k}\Omega$.

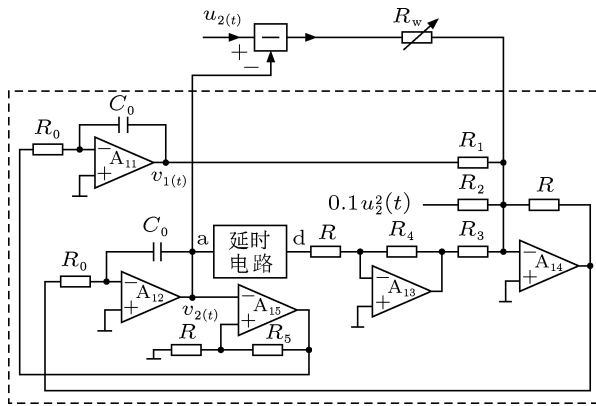


图 8 同步电路的实现

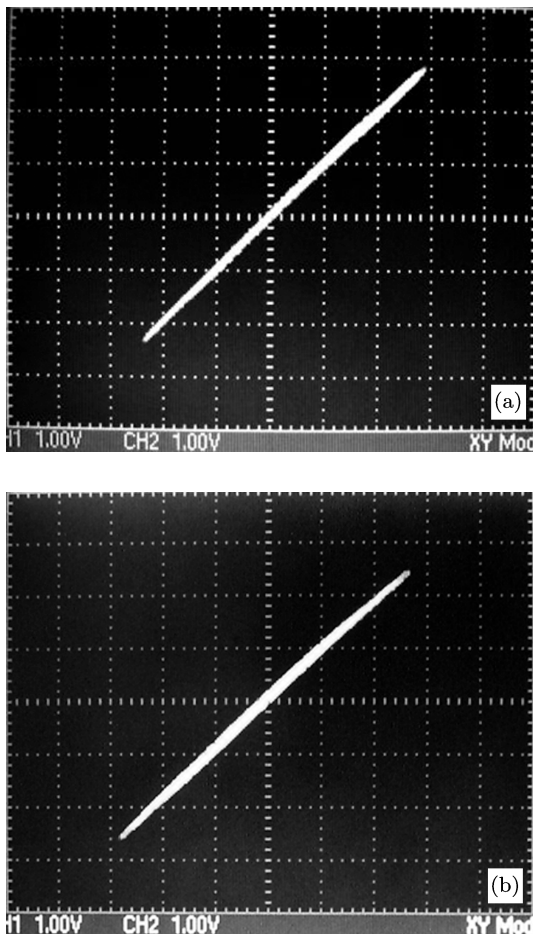


图 9 实验观测到的同步结果 (a) x_1 (横轴) 与 y_1 的相图; (b) x_2 (横轴) 与 y_2 的相图

实验结果与理论分析的结果是一致的.

考虑到在实际应用中发送和接收系统的元件参数很难达到完全相同, 这将导致两系统间存在参

数失配, 从而影响系统同步的质量. 为简单起见, 我们仅考虑在用上述两种方法实现混沌的同步中, 接收系统的参量 a 与发送系统的同一参量失配且为 $a \pm \Delta a$, 这里 Δa 为失配参量的大小. 数值计算结果如图 10 所示, 图 10(a) 和 (b) 分别为用线性组合信号的反馈方法和主动-被动联合信号的反馈方法, 得到的失配参量与反馈强度的关系. 由图 10 可见: 根据同步精度的要求, 在一定的失配参量范围内, 两种方法都可以保证系统达到同步; 反馈强度越大, 且失配量越小, 则同步的精度越高; 反之则越低; 两种同步方法比较, 在相同的失配量和反馈强度的条件下, 后一种方法的同步精度要高于前一种同步方法的同步精度.

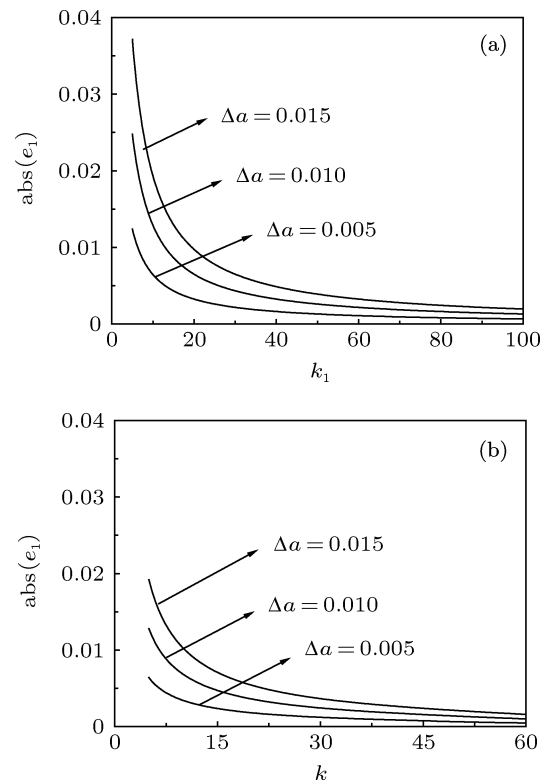


图 10 参数失配对同步过程的影响

5 结论

本文从理论分析结合数值计算到实验设计和观测, 较全面地研究了仅有一个非线性项为平方形式的二阶延迟系统, 它呈现的十分丰富的动力学行为, 以及在混沌同步上的利用. 需要特别指出的是: 在通常的理论分析中, 一般都会选择以延迟时间 τ 作为参数量, 但真正用模拟电子线路实现这一系统, 要改变延迟时间, 意味着线路结构要有局部的变动, 例如要增加或减少 LC 低通滤波器的级联数, 同时

还要重新调整低通滤波器与系统频率的匹配关系, 以达到精度要求. 上述讨论选择是与电路中某些电阻对应的参数, 在实验精度得以保障的同时, 也将

使实验过程更为简单易实现.

作者感谢张晓明博士在完成本工作过程中给予的帮助.

- [1] Mackey M C, Glass L 1977 *Science* **197** 287
- [2] Tadenuma M U, Yamada R G, Xu H Y, Ripberger J A, Liu A C, Ueda H R 2011 *Cell* **144** 268
- [3] Yao W, Yu P, Essex C 2001 *Phys. Rev. E* **63** 021902
- [4] Masoller C 2001 *Phys. Rev. Lett.* **86** 2782
- [5] Mo J Q, Wang H, Lin W T 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 3230 (in Chinese) [莫嘉琪, 王辉, 林万涛 2006 物理学报 **55** 3230]
- [6] Hale J K 2002 *Theory of functional differential equations* (New York: Springer-Verlag)
- [7] Wei J J, Wang H B, Jiang W H 2012 *Bifurcation theory and application of delay differential equations* (Beijing: Science Press) (in Chinese) [魏俊杰, 王洪滨, 蒋卫华 2012 时滞微分方程的分支理论及应用 (北京: 科学出版社)]
- [8] Larger L, Dudley J M 2010 *Nature* **465** 41
- [9] Schanz M, Pelster A 2003 *Phys. Rev. E* **67** 056205
- [10] Sprott J C 2007 *Phys. Lett. A* **366** 397
- [11] Wang W, Xu Y, Lu S P 2010 *Acta Phys. Sin.* **60** 030205 (in Chinese) [王雯, 徐燕, 鲁世平 2010 物理学报 **60** 030205]
- [12] Zhang X M, Chen J F, Peng J H 2011 *International Journal of Bifurcation and Chaos* **21** 2547
- [13] Nguimdo R M, Colet P, Larger L, Pesquera L 2011 *Phys. Rev. Lett.* **107** 034103
- [14] Yalcin M E, Ozoguz S 2007 *Chaos* **17** 033112
- [15] Vasegh N, Khellat F 2009 *Chaos Solit. Fract.* **42** 1054
- [16] Zhang X M 2004 *M. S. Thesis* (Changchun: Northeast Normal University) (in Chinese) [张晓明 2004 年硕士学位论文 (长春: 东北师范大学)]
- [17] Chen J F, Tian X J, San J D 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 83 (in Chinese) [陈菊芳, 田小健, 单江东 2010 物理学报 **59** 83]
- [18] Peng J H, Ding E J, Yang W, Ding M 1996 *Phys. Rev. Lett.* **76** 904
- [19] Cheng L, Zhang R Y, Peng J H 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 536 (in Chinese) [程丽, 张入元, 彭建华 2003 物理学报 **52** 536]
- [20] Kocarev L, Parlitz U 1995 *Phys. Rev. Lett.* **74** 5208
- [21] Chen J F, Zhang R Y, Peng J H 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 1589 (in Chinese) [陈菊芳, 张入元, 彭建华 2003 物理学报 **52** 1589]
- [22] Ding M, Ott E 1994 *Phys. Rev. E* **49** R945
- [23] Corless R M, Gonnet G H, Hare D E G, Jeffrey D J, Knuth D E 1996 *Adv. Comput. Math.* **5** 329

Dynamic behavior and chaos synchronization of a simple nonlinear time-delayed system*

Xiao Jian-Xin¹⁾ Chen Ju-Fang²⁾ Peng Jian-Hua^{1)†}

1) (*College of Physics Science and Technology, Shenzhen University, Shenzhen 518060, China*)

2) (*Department of Physics, Northeast Normal University, Changchun 130024, China*)

(Received 2 April 2013; revised manuscript received 17 May 2013)

Abstract

Hopf bifurcation and chaotic properties of a simple second order time-delayed system, which includes bifurcation point, bifurcation direction and the stability of bifurcating periodic solutions, are analyzed. We obtain analytically the phase trajectory equations when the delay degenerates. Furthermore, through bifurcation diagram drawn by means of numerical simulation, the route from period-doubling bifurcation to chaos is revealed; using single linearly combining signals and the feedback control method, we achieve partial synchronization of the system. Combining the active-passive method with the linear feedback method, we have realized complete synchronization. In addition, we have designed and built an electronic experimental line, from which the same result as the theoretical analysis or numerical results are obtained.

Keywords: nonlinear time-delayed system, electronic circuits, Hopf bifurcation, chaos

PACS: 05.45.-a, 05.45.Xt

DOI: 10.7498/aps.62.170507

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 70571053), and the Science and Technology Development Plan of Jilin Province of China (Grant No.201205001).

† Corresponding author. E-mail: pengjh173@163.com