

## 基于 Min-Max 方法的混沌系统采样同步控制研究\*

任涛<sup>1)†</sup> 朱志良<sup>1)</sup> 于海<sup>1)</sup> 王猛<sup>2)</sup>

1) (东北大学, 软件学院, 沈阳 110011)

2) (东北大学, 信息科学与工程学院, 沈阳 110011)

(2013年4月27日收到; 2013年5月22日收到修改稿)

针对含有扰动的混沌系统, 设计采样同步控制器, 利用输入时滞法将含有采样同步控制器的混杂系统转换为具有输入时滞的连续系统. 并考虑对系统影响最坏的干扰程度, 在该种情况下, 基于线性矩阵不等式 (LMI) 技术和 min-max 鲁棒控制方法, 给出了使误差系统稳定的充分条件, 确保混沌系统在所容许的扰动下均能实现完全同步. 仿真结果说明所设计的采样同步控制方案具有很强的鲁棒性, 适合应用于保密通信系统中.

**关键词:** 混沌同步, 采样控制, min-max 方法, 输入时滞

**PACS:** 05.45.Gg, 05.45.Pq, 05.45.Xt

**DOI:** 10.7498/aps.62.170510

## 1 引言

上世纪 90 年代以来, OGY 混沌控制法<sup>[1]</sup> 和 PC 同步法<sup>[2]</sup> 的成功实现, 为混沌理论的应用打开了方便之门. 作为保密通信的关键技术, 混沌同步已经取得了一些研究成果<sup>[1-24]</sup>, 但在现有文献中, 绝大多数都是通过设计连续时间控制器实现混沌系统的同步. 而随着数字电子以及微处理器的高速发展, 基于计算机的数字控制器正在逐渐取代传统的模拟控制器, 成为当今研究的热点问题. 采用计算机实现混沌系统同步可以极大地减少驱动系统和响应系统传输所需的同步信号的数据量, 缩短信息处理时间, 增加带宽利用率, 所以基于计算机控制的同步方案十分符合数字化工业的应用要求.

文献 [11—24] 设计了采样同步控制器, 实现混沌系统的同步. 其中, 文献 [11, 12] 采用 Euler 近似离散化的方法, 首先将混沌系统离散化, 进而采用离散控制的思想设计采样同步控制器, 实现混沌系统的同步. 该类方法在将原非线性系统离散化的过程中, 降低了混沌系统模型的精度, 因此, 所设计的同步控制器很难确保原连续混沌系统的同步. 文献 [13, 14] 采用数字化重设计的方法, 设计了采样观

测器与驱动系统同步, 该方法需要经过 T-S 模糊建模, 连续控制器的设计和构建等效离散控制器三个步骤, 因此该方法设计过程比较复杂, 使该方法的应用受到一定的限制. 文献 [15—24] 利用输入时滞的方法, 将采样控制器转化为含有输入时滞的连续时间控制器, 进而针对连续误差系统, 给出了使混沌系统同步的充分条件. 特别的, 文献 [23] 专门考虑了混沌系统可能出现的一类故障, 设计了容错同步控制器, 确保了驱动系统出现故障的情况下仍能实现同步. 文献 [24] 考虑了系统可能出现的参数不确定, 设计了采样同步控制器. 由于混沌系统不可避免地会受到外部扰动 (电磁波, 噪声等), 这将影响甚至破坏混沌系统的同步, 限制混沌系统的使用范围. 而现有关于混沌系统采样同步控制的文献均没有考虑干扰对同步的影响, 基于此现状, 本文将针对含有扰动的混沌系统设计采样同步控制器.

在实际应用中, 如混沌保密通信系统, 要求驱动和响应混沌系统始终处于同步状态, 两个混沌系统状态微小的偏差也可能导致通信的失败. 传统的  $H_\infty$  鲁棒控制方法只能保证系统在无外部干扰的情况下渐近稳定, 随着外部扰动的出现, 系统的状态会逐渐偏离平衡点并且控制能量的消耗也随之增

\* 国家自然科学基金青年科学基金 (批准号: 61104074)、中国博士后科学基金 (批准号: 20100471462, 2013T60294)、中央高校基本科研业务费专项资金 (批准号: N100317002, N100604007, N110417004, N110417005, N110617001) 和辽宁省博士启动基金 (批准号: 20101032) 资助的课题.

† 通讯作者. E-mail: chinarentao@163.com

大,使得系统的鲁棒性明显降低,严重破坏混沌系统的同步,导致保密通信的失效.因此本文采用输入时滞法处理采样控制器,将含有采样控制器的混杂系统转换为具有输入时滞的连续混沌系统<sup>[25,26]</sup>,并重点针对混沌保密通信系统对同步性能要求高的特殊性,利用 min-max 方法计算出对系统影响最坏的干扰程度,进而在该最坏干扰程度下给出混沌系统同步的充分条件,确保系统在所有允许的扰动范围内仍能保持完全同步,最后通过数值仿真结果验证了上述方法的有效性.

## 2 问题描述

考虑如下所示的混沌系统:

驱动系统

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bf(Dx(t)), \\ p(t) &= Cx(t). \end{aligned} \quad (1)$$

响应系统

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= Az(t) + Bf(Dz(t)) + H\omega(t) + u(t), \\ q(t) &= Cz(t), \end{aligned} \quad (2)$$

其中,  $x(t), z(t) \in R^n$  分别是驱动系统和响应系统的状态变量,  $p(t), q(t) \in R^r$  分别是驱动系统和响应系统的输出变量,  $\omega(t) \in R^m$  为作用在响应系统的扰动,  $A, B, C, D, H$  是恰当维数的系数矩阵,  $f(\cdot): R^{nh} \rightarrow R^{nh}$  为系统的非线性项,  $u(t) \in R^n$  为采样同步控制器. 控制器在每个采样时刻对响应系统和驱动系统的输出状态进行采样,设计采样同步控制器如下式所示:

$$u(t) = KC(x(t_k) - z(t_k)), \quad (3)$$

其中,  $K$  为控制器增益,  $t_k$  为采样时刻. 定义同步误差  $e(t) = x(t) - z(t)$ , 则采样同步控制器可以表示为

$$u(t) = KCe(t_k). \quad (4)$$

**假设1** 采样间隔满足

$$\Delta_k = t_{k+1} - t_k \leq h, \quad \forall k \geq 0.$$

由于  $t_k = t - (t - t_k) = t - \tau(t)$ , 则由假设 1 可知,  $\tau(t) \in (0, h]$ ,  $\dot{\tau}(t) = 1$ ,  $t_k < t \leq t_{k+1}$ ,  $\forall k \geq 0$ . 则控制器 (4) 可转换为如下具有输入时滞的形式:

$$u(t) = KCe(t - \tau(t)). \quad (5)$$

由 (1), (2) 和 (5) 式可以得到采样同步误差系统方程为

$$\dot{e}(t) = \dot{x}(t) - \dot{z}(t)$$

$$\begin{aligned} &= Ae(t) + B[f(Dx(t)) - f(Dz(t))] \\ &\quad - H\omega(t) - u(t) \\ &= \gamma(t) - H\omega(t), \end{aligned} \quad (6)$$

其中,  $\gamma(t) = Ae(t) - KCe(t - \tau(t)) + B\eta(De; z)$ , 这里  $\eta(De; z) = f(Dx(t)) - f(Dz(t))$ .

**假设2** 混沌系统的非线性项  $f(\cdot) = \text{diag}(f_1(\cdot), \dots, f_{n_h}(\cdot))$  在区间  $[0, \rho]$  上, 且有下式成立:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \frac{\eta_i(d_i^T e; z)}{d_i^T e} = \frac{f_i(d_i^T e + d_i^T z) - f_i(d_i^T z)}{d_i^T e} \\ &\leq \rho, \quad \forall e, z; i = 1, 2, \dots, n_h (d_i^T e \neq 0), \end{aligned}$$

即  $\eta_i(d_i^T e; z)[\eta_i(d_i^T e; z) - \rho d_i^T e] \leq 0$ , 其中  $d_i^T$  为  $D$  的第  $i$  个行向量.

**引理1**  $x(t) \in R^n$  是一阶连续可导的向量函数, 对任意的矩阵  $M_1, M_2$  和正定矩阵  $P$ , 有下式成立:

$$\begin{aligned} & - \int_{t-h(t)}^t \dot{x}^T(s) P \dot{x}(s) ds \\ & \leq \xi^T(t) \begin{bmatrix} M_1^T + M_1 & -M_1^T + M_2 \\ * & -M_2^T - M_2 \end{bmatrix} \xi(t) \\ & + h(t) \xi^T(t) \begin{bmatrix} M_1^T \\ M_2^T \end{bmatrix} P^{-1} [M_1 \quad M_2] \xi(t), \end{aligned}$$

其中

$$\xi^T(t) = [x^T(t) \quad x^T(t - h(t))].$$

## 3 主要结果

下面将首先推算容许扰动对系统所造成的最大破坏程度, 并针对该最坏干扰程度设计采样同步控制器, 使得误差系统达到渐近稳定, 进而可以确保在所有容许的扰动下, 驱动系统和响应系统始终保持同步, 进一步提高系统的鲁棒性和对干扰的不敏感性. 考虑如下性能指标:

$$J = \int_0^\infty [e^T(t)e(t) - \omega^T(t)Q\omega(t)] dt, \quad (7)$$

其中,  $Q > 0$ .

**定理1** 对于含有扰动的误差系统 (6), 给定的正实数  $h$ , 如果存在正定矩阵,  $P \in R^{n \times n}$ ,  $R \in R^{n \times n}$ , 对称矩阵  $X \in R^{n \times n}$ , 矩阵  $Y \in R^{n \times n}$ ,  $M_1, M_2 \in R^{n \times n}$ , 使得以下线性矩阵不等式成立:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} & \Sigma_{13} & -X & \Sigma_{15} & hM_1^T \\ & \Sigma_{22} & 0 & 0 & hC^T Y^T & hM_2^T \\ & & -2\Lambda & 0 & \Sigma_{35} & 0 \\ & & & -R & hX & 0 \\ & & & & -hP & 0 \\ * & & & & & -hP \end{bmatrix} < 0. \quad (8)$$

则误差系统渐近稳定, 且控制器增益  $K = (hX - P)^{-1}Y$ . (8) 式中

$$\begin{aligned} \Sigma_{11} &= PA + A^T P - hXA - hA^T X + M_1^T + M_1 + R, \\ \Sigma_{12} &= YC - M_1^T + M_2, \\ \Sigma_{13} &= (P - hX)B + \rho D^T \Lambda, \\ \Sigma_{15} &= hA^T (P - hX), \\ \Sigma_{22} &= -M_2^T - M_2, \\ \Sigma_{35} &= hB^T (P - hX). \end{aligned}$$

**证明** 选取如下形式的 Lyapunov-Krasovskii 泛函:

$$\begin{aligned} V(e, t) &= e^T(t)Pe(t) + \int_{t-h}^t e^T(s)Re(s)ds \\ &\quad + \int_{-h}^0 \int_{t+\theta}^t e^T(s)P\dot{e}(s)dsd\theta, \end{aligned} \quad (9)$$

其中,  $P > 0, R > 0$ . 对  $V(e, t)$  求导可得

$$\begin{aligned} \dot{V}(e, t) &= 2e^T(t)P\dot{e}(t) + e^T(t)Re(t) \\ &\quad - e^T(t-h)Re(t-h) \\ &\quad + h\dot{e}^T(t)P\dot{e}(t) \\ &\quad - \int_{t-h}^t \dot{e}^T(s)P\dot{e}(s)ds. \end{aligned} \quad (10)$$

构造如下局部检验函数:

$$\begin{aligned} \Phi &= \dot{V}(e, t) + e^T(t)e(t) - \omega^T(t)Q\omega(t) \\ &= 2e^T(t)P\dot{e}(t) + e^T(t)Re(t) \\ &\quad - e^T(t-h)Re(t-h) + h\dot{e}^T(t)P\dot{e}(t) \\ &\quad - \int_{t-h}^t \dot{e}^T(s)P\dot{e}(s)ds + e^T(t)e(t) \\ &\quad - \omega^T(t)Q\omega(t). \end{aligned} \quad (11)$$

函数  $\Phi(\omega)$  在  $\omega(t) = \omega^*$  时, 取得极大值的充要条件是

$$\delta\Phi(\omega^*, \delta\omega) = 0, \quad (12)$$

$$\delta^2\Phi(\omega^*, \delta\omega) < 0. \quad (13)$$

应用变分法, 计算使 (11) 式取极大值时的  $\omega^*$ , 记  $\Phi(\omega)$  的增量为

$$\begin{aligned} \Delta\Phi(\omega) &= \Phi(\omega + \delta\omega) - \Phi(\omega) \\ &= L(\omega, \delta\omega) + \sigma(\omega, \delta\omega), \end{aligned} \quad (14)$$

其中,  $L(\omega, \delta\omega)$  是关于  $\delta\omega$  的线性连续函数,  $\sigma(\omega, \delta\omega)$  是关于  $\delta\omega$  的高阶无穷小, 则  $\Phi(\omega)$  在  $\omega^*$  处的变分为

$$\begin{aligned} \delta\Phi(\omega^*, \delta\omega) &= \left. \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \Phi(\omega^*, \varepsilon\delta\omega) \right|_{\varepsilon=0} \\ &= -2\delta\omega^T H^T P e(t) - 2h\delta\omega^T H^T P [\Upsilon(t) - H\omega^*] \\ &\quad + 2 \int_{t-h}^t \{ \delta\omega^T H^T P [\Upsilon(s) - H\omega^*] \\ &\quad - \varepsilon\delta\omega^T H^T P H \delta\omega \} ds \\ &\quad + 2\varepsilon h\delta\omega^T H^T P H \delta\omega - 2\delta\omega^T Q\omega^* - 2\varepsilon\delta\omega^T Q\delta\omega \\ &= -2H^T P e(t) - 2hH^T P [\Upsilon(t) - H\omega^*] \\ &\quad + 2 \int_{t-h}^t H^T P \dot{e}(s) ds - 2Q\omega^*. \end{aligned} \quad (15)$$

令  $\delta\Phi(\omega^*, \delta\omega) = 0$ , 由 (15) 式可以得到

$$\omega^*(t) = G[hH^T P \Upsilon(t) + H^T P e(t-h)], \quad (16)$$

其中,  $G = [hH^T P H - Q]^{-1}$ . 进一步, 对 (15) 式关于  $\omega(t)$  求二阶变分得

$$\begin{aligned} \delta^2\Phi(\omega^*, \delta\omega) &= \left. \frac{\partial^2}{\partial \varepsilon^2} \Phi(\omega^*, \varepsilon\delta\omega) \right|_{\varepsilon=0} \\ &= -2\delta\omega^T Q\delta\omega. \end{aligned} \quad (17)$$

由于  $Q > 0$ , 有  $\delta^2\Phi(\omega^*, \delta\omega) < 0$ , 即当扰动  $\omega(t) = \omega^*(t)$  时, 对系统的破坏程度最大. 下面将证明在  $\omega(t) = \omega^*(t)$  时, 误差系统 (6) 的稳定性. 将所得  $\omega^*$  代入 (6) 式中可得

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) &= Ae(t) - KCe(t - \tau(t)) \\ &\quad + B\eta(De; z) - H\omega^*(t) \\ &= (I - hHG H^T P)Ae(t) \\ &\quad + (hHG H^T P - I)KCe(t - \tau(t)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + (I - hHGHT^T P)B\eta(De; z) \\
 & - HGHT^T Pe(t-h). \tag{18}
 \end{aligned}$$

由假设2, 对任意的  $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1 \ \lambda_2 \ \dots \ \lambda_{n_h}) \geq 0$ , 令  $\eta(t) = \eta(De; z)$ , 则有

$$\begin{aligned}
 & - \sum_{i=1}^{n_h} 2\lambda_i \eta_i(d_i^T e; z) [\eta_i(d_i^T e; z) - \rho d_i^T e] \\
 & = -2\eta^T(t)\Lambda[\eta(t) - \rho De(t)] \geq 0. \tag{19}
 \end{aligned}$$

由于  $\tau(t) \leq h$ , 由引理1可知

$$\begin{aligned}
 & - \int_{t-\tau(t)}^t \dot{e}^T(s) P \dot{e}(s) ds \\
 & \leq \varepsilon^T(t) \begin{bmatrix} M_1^T + M_1 & -M_1^T + M_2 \\ * & -M_2^T - M_2 \end{bmatrix} \varepsilon(t) \\
 & + h\varepsilon^T(t) \begin{bmatrix} M_1^T \\ M_2^T \end{bmatrix} P^{-1} [M_1 \ M_2] \varepsilon(t), \tag{20}
 \end{aligned}$$

其中,  $\varepsilon^T(t) = (e^T(t) \ e^T(t - \tau(t)))^T$ . 令  $\Gamma = [M_1 \ M_2 \ 0 \ 0]$ . 为了表达方便, 这里将  $\dot{e}^T(t) P \dot{e}(t)$  表示为

$$\dot{e}^T(t) P \dot{e}(t) = \xi^T(t) \Omega^T P^{-1} \Omega \xi(t), \tag{21}$$

其中

$$\begin{aligned}
 \xi(t) &= [e^T(t) \ e^T(t - \tau(t)) \ \eta^T(De; z) \ e^T(t-h)]^T, \\
 \Omega &= [(P - hPHGH^T P)A \ (hPHGH^T P - P)KC \\
 & \quad (P - hPHGH^T P)B \ PHGH^T P],
 \end{aligned}$$

由(10), (18)—(20)式, 有下式成立:

$$\begin{aligned}
 \dot{V}(e, t) & \leq \xi^T(t) (\Pi + h\Omega^T P^{-1} \Omega + h\Gamma^T P^{-1} \Gamma) \\
 & \quad \times \xi(t), \tag{22}
 \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}
 \Pi &= \begin{bmatrix} \Pi_{11} & \Pi_{12} & \Pi_{13} & -PHGH^T P \\ & -M_2^T - M_2 & 0 & 0 \\ & & -2\Lambda & 0 \\ * & & & -R \end{bmatrix}, \\
 \Pi_{11} &= PA + A^T P - hPHGH^T PA \\
 & \quad - hA^T PHGH^T P + M_1^T + M_1 + R, \\
 \Pi_{12} &= (hPHGH^T P - P)KC - M_1^T + M_2, \\
 \Pi_{13} &= (P - hPHGH^T P)B + \rho D^T \Lambda.
 \end{aligned}$$

令  $PHGH^T P = X$ ,  $(hPHGH^T P - P)K = Y$ , 则  $\Omega$  和  $\Pi$  的形式如下所示:

$$\Omega = [(P - hX)A \ YC \ (P - hX)B \ X],$$

$$\Pi = \begin{bmatrix} \Pi_{11} & \Pi_{12} & \Pi_{13} & -X \\ & -M_2^T - M_2 & 0 & 0 \\ & & -2\Lambda & 0 \\ * & & & -R \end{bmatrix},$$

其中

$$\begin{aligned}
 \Pi_{11} &= PA + A^T P - hXA - hA^T X + M_1^T + M_1 + R, \\
 \Pi_{12} &= YC - M_1^T + M_2, \\
 \Pi_{13} &= (P - hX)B + \rho D^T \Lambda.
 \end{aligned}$$

由定理1可知

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \Pi & h\Omega^T & h\Gamma^T \\ & -hP & 0 \\ * & & -hP \end{bmatrix} < 0. \tag{23}$$

对(23)式应用Schur引理, 可以得到

$$\Pi + h\Omega^T P^{-1} \Omega + h\Gamma^T P^{-1} \Gamma < 0. \tag{24}$$

从而  $\dot{V}(e, t) < 0$ , 因此在对系统破坏程度最大的扰动下, 同步误差系统(6)仍能渐近稳定, 即驱动系统和响应系统保持完全同步, 控制器增益  $K = (hX - P)^{-1} Y$ .

### 4 数值仿真

首先以Chua's电路为例, 通过仿真验证所设计控制器的有效性, Chua's电路的状态方程为

$$\begin{aligned}
 \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bf(Dx(t)), \\
 p(t) &= Cx(t),
 \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}
 A &= \begin{bmatrix} -18/7 & 9 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -14.28 & 0 \end{bmatrix}, \\
 B &= \begin{bmatrix} 27/7 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \\
 C = D &= [1 \ 0 \ 0],
 \end{aligned}$$

$f(Dz(t)) = 0.5(|x_1 + c| - |x_1 - c|)$ . 设采样间隔上界  $h = 0.02$ , 驱动系统和响应系统状态变量的初始值分别为  $[0.01 \ 0 \ 0]^T$  和  $[-1 \ -0.1 \ -0.4]^T$ . 驱动系统的各状态相图及吸引子如图1所示. 由图2可以看出, 施加控制前, 两混沌系统未达到同步.

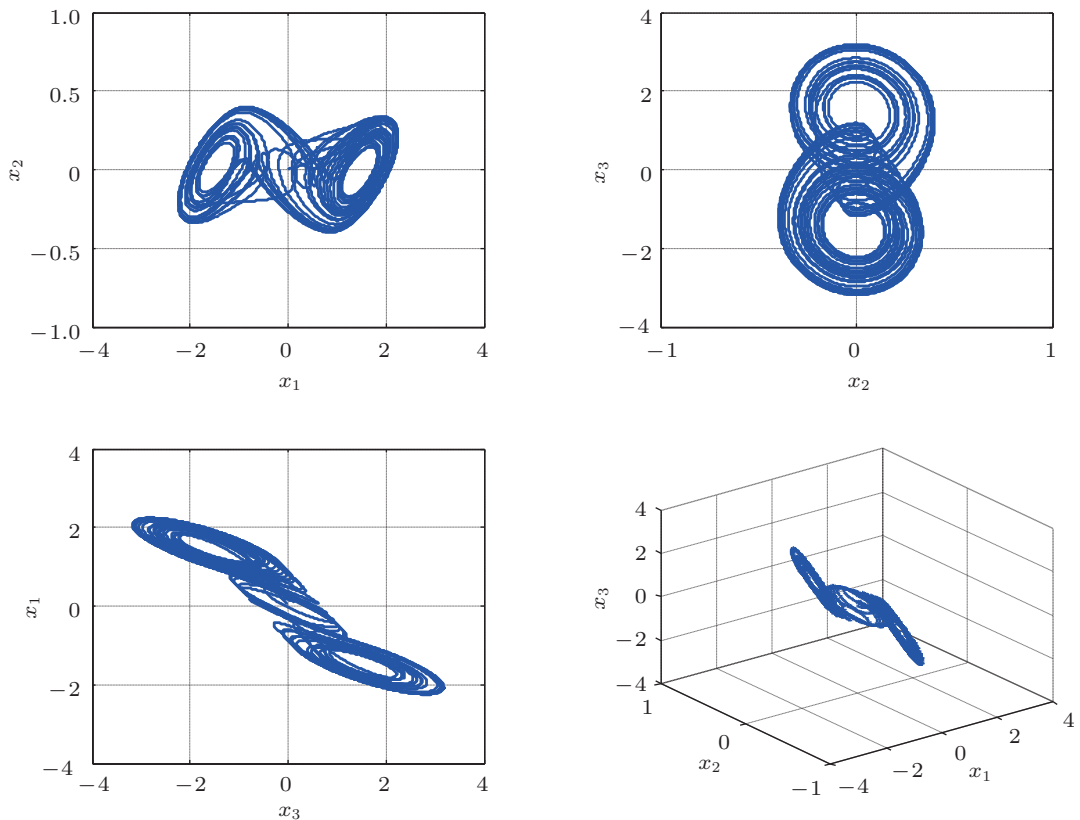


图1 驱动系统的相位图

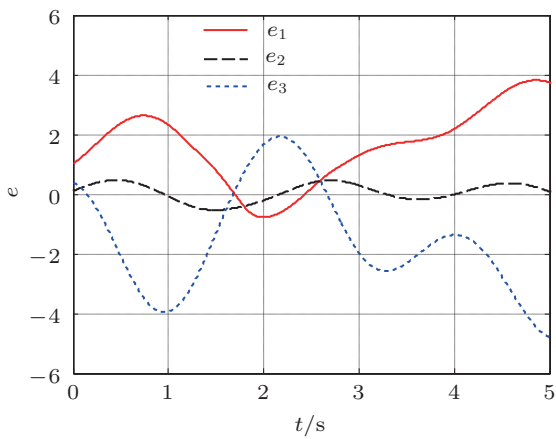


图2 控制前误差系统状态曲线

图3为加入采样同步控制器后的误差系统状态曲线,可以看出,两个混沌系统很快就可以达到同步.为了验证控制器对外部扰动的抑制能力,第2秒在响应系统加入外部扰动,得到仿真结果如图4所示.

由图4可以观察到,加入扰动前,在同步控制

器的作用下,误差系统各状态较快地收敛至零.第2秒加入连续扰动后,系统误差出现了小幅的波动,即两混沌系统出现了短暂的不同步,经过1s后,误差收敛到零,两混沌系统重新达到同步.仿真表明所设计的同步控制器具有较好的鲁棒性.

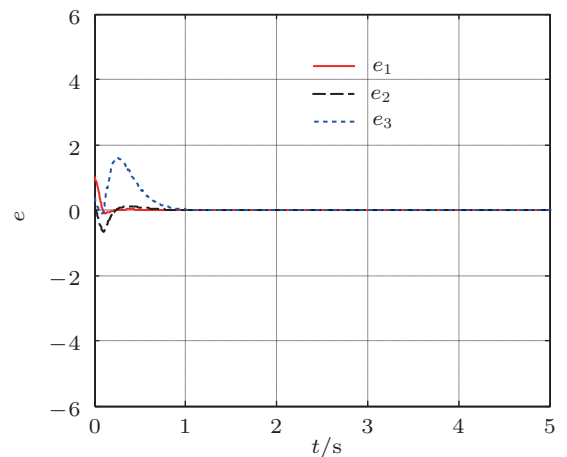


图3 加入控制后误差系统状态曲线

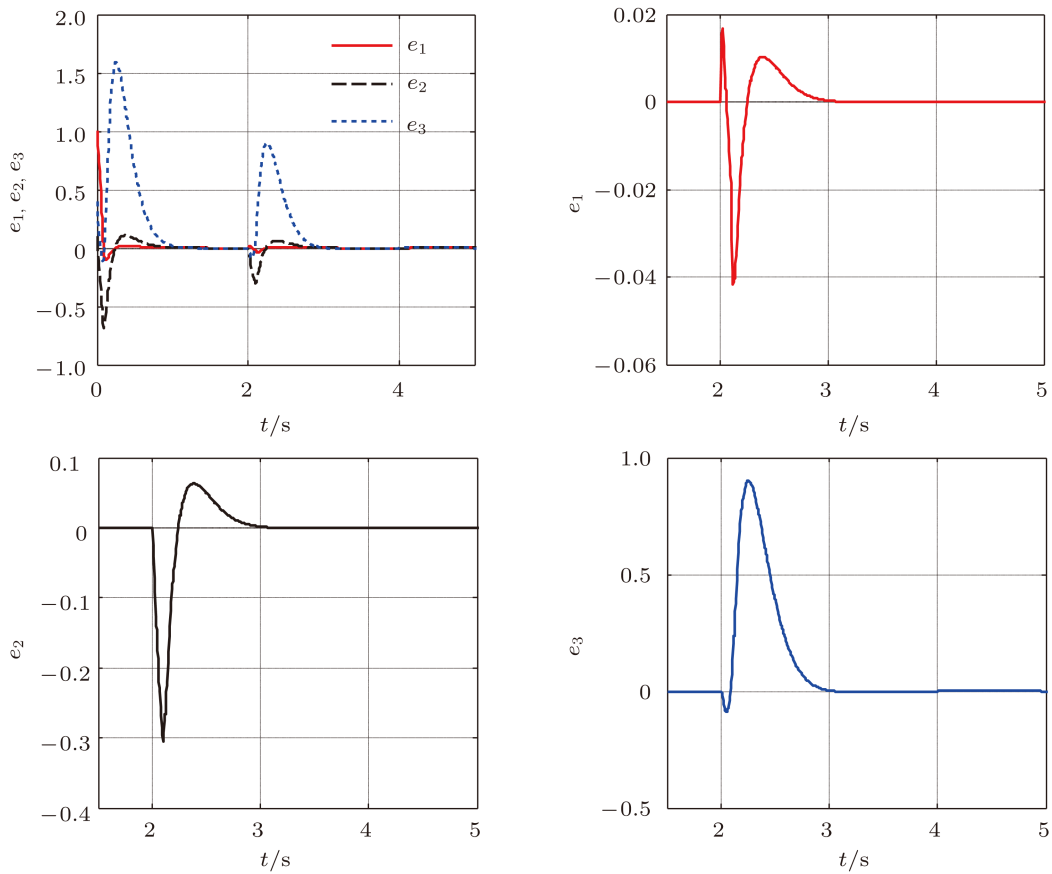


图4 含有扰动的误差系统状态曲线

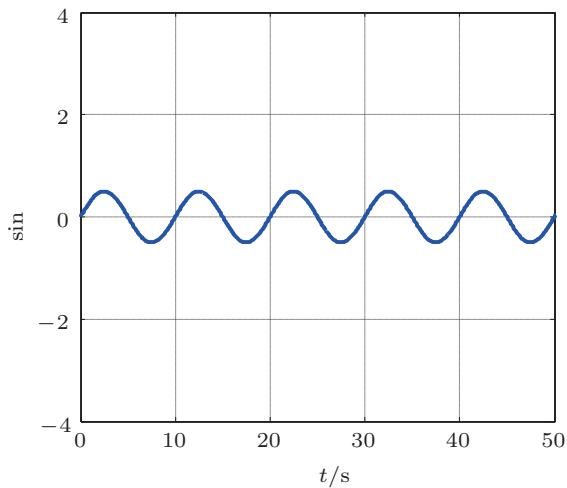


图5 原始的正弦波信号(驱动系统发出)

下面将所设计的采样同步方法应用于保密通信中,采用正弦信号作为原始信号(图5所示).图6为经响应系统解密后的正弦信号,图7为原始信号与解密后的正弦信号的偏差.由图6和图7可以看出,解密后的正弦信号只在开始阶段存在失真,但随着驱动系统和响应系统的快速同步,接收端在1s后就可以完整的恢复出原始信号,所以该方案十分适用于保密通信.

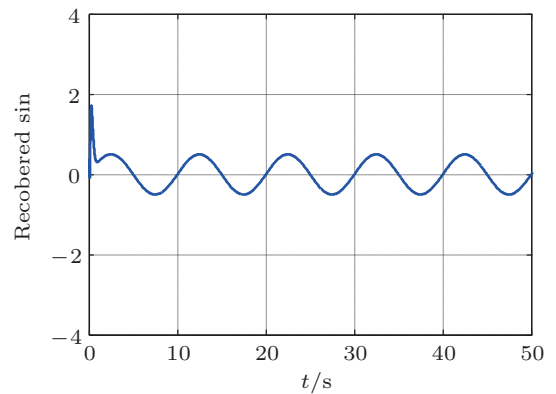


图6 解密后的正弦波信号(响应系统接收)

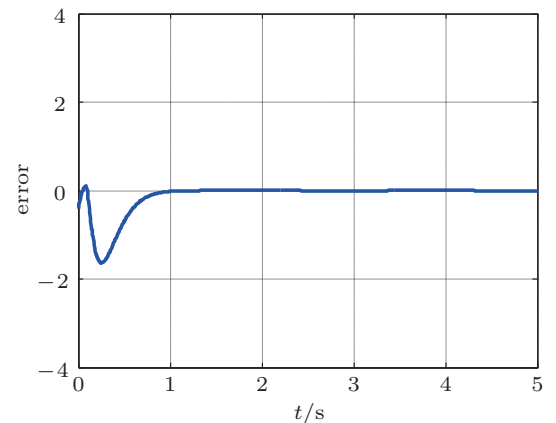


图7 原始信号与解密后的正弦信号的偏差

## 5 结论

本文针对一类带有扰动的混沌系统, 设计采样同步控制器, 利用输入时滞的方法描述采样控制器, 将采样混沌系统转化为含有输入时滞的连续系统. 为了确保外部扰动存在时, 驱动系统和响应系统仍

能保持同步, 本文构造检验函数, 基于 min-max 思想, 计算对系统影响最坏的干扰程度, 并在该最坏干扰程度下给出使误差系统渐近稳定的充分条件, 实现系统的同步. 仿真结果表明, 所设计的控制算法对于所有的容许扰动都具有较强的鲁棒性, 完全能够满足混沌系统在实际应用中的同步要求.

- 
- [1] Aziz-Alaoui M A 2005 *Proceeding of the IEEE Conference on Electronics, Circuits and Systems* Gammarth, Tunisia, December 11–14, 2005 p1
- [2] Ji Y, Wen C Y, Li Z G 2008 *Int. J. Comm. Sys.* **21** 1137
- [3] Li J F, Li N 2002 *Chin. Phys.* **11** 1124
- [4] Hu M F, Xu Z Y 2007 *Chin. Phys.* **16** 3231
- [5] Wang X Y, Wu X J, He Y J, Aniwari G 2008 *Int. J. Modern Physics B* **22** 3709
- [6] Lee S M, Choi S J, Ji D H, Park J H, Won S C 2010 *Nonlinear Dynam* **59** 277
- [7] Kwon O M, Park J H, Lee S M 2011 *Nonlinear Dynam* **63** 239
- [8] Ma T D, Jiang W B, Fu J, Chai Y, Chen L P, Xue F Z 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 160506 (in Chinese) [马铁东, 江伟波, 浮洁, 柴毅, 陈立平, 薛方正 2012 物理学报 **61** 160506]
- [9] Fu J, Yu M, Ma T D 2011 *Chin. Phys. B* **20** 12508
- [10] Ma T D, Jiang W B, Fu J 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 090503 (in Chinese) [马铁东, 江伟波, 浮洁 2012 物理学报 **61** 090503]
- [11] Lee S H, Kapila V, Porfiri M, Panda A 2010 *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat* **15** 4100
- [12] Lee S H, Kapila V, Porfiri M 2008 *Proceedings of the American Control Conference* Seattle, WA, USA, Jun 11–13, 2008 p523
- [13] Barajas-Ramirez J G, Chen G, Shieh L S 2003 *Int. J. Bifurc. Chaos* **13** 1197
- [14] Barajas-Ramirez J G, Chen G, Shieh L S 2004 *Int. J. Bifurc. Chaos* **14** 2721
- [15] Barajas-Ramirez J G, Chen G, Shieh L S 2003 *Proceedings of IEEE International Symposium on Intelligent Control* Houston Texas, USA, October 5–8, 2003 p241
- [16] Lam H K, Seneviratne L D 2008 *IEEE Trans. Circuits Syst. I* **55** 883
- [17] Zhang C K, He Y, Wu M 2009 *IEEE Trans. Circuits Syst. II* **56** 320
- [18] Lu J G, Hill D J 2008 *IEEE Trans. Circuits Syst. II* **55** 586
- [19] Zhu X L, Wang Y Y, Yang H Y 2010 *Proceedings of the American Control Conference* Baltimore, MD, USA, June 30–July 02, 2010 p1817
- [20] Chen W H, Wang Z P, Lu X M 2012 *IEEE Trans. Circuits Syst. II* **59** 515
- [21] Feng Y F, Zhang Q L 2011 *Chin. Phys. B* **20** 1
- [22] Theesar S J S, Banerjee S, Balasubramaniam P 2012 *Nonlinear Dynam* **70** 1977
- [23] Ma D Z, Zhang H G, Wang Z S, Feng J 2010 *Chin. Phys. B* **19** 0505061
- [24] Lee T H, Park J H, Lee S M, Kwon O M 2013 *Int. J. Control* **86** 107
- [25] Fridman E, Shaked U, Suplin V 2007 *Automatica* **43** 1072
- [26] Fridman E, Shaked U, Suplin V 2007 *Syst. Control Lett.* **54** 271

# Sampled-data synchronization control of chaotic systems based on min-max approach\*

Ren Tao<sup>1)†</sup> Zhu Zhi-Liang<sup>1)</sup> Yu Hai<sup>1)</sup> Wang Meng<sup>2)</sup>

1) (Software College, Northeastern University, Shenyang 110011, China)

2) (School of Information Science and Engineering, Northeastern University, Shenyang 110011, China)

(Received 27 April 2013; revised manuscript received 22 May 2013)

## Abstract

For the chaotic systems with disturbance, a sampled-data controller is designed to achieve chaotic synchronization. Firstly, to handle the discontinuity introduced by the sampling activities, the input-delay approach is introduced to transform the discontinuous chaotic systems into continuous ones. Secondly, the worst possible case of performance is considered according to min-max robust strategy. Then the sufficient conditions for global asymptotic synchronization of such chaotic systems are derived and expressed in terms of linear matrix inequality (LMI). The proposed algorithm can achieve synchronization of the sampled-data chaotic systems for all admissible disturbances at the pre-computed set of disturbance realizations. The effectiveness is finally illustrated via numerical simulations of chaotic Chua's circuit, and the simulation results show that the proposed algorithm is suitable for secure communication.

**Keywords:** chaotic synchronization, sampled-data control, min-max, input-delay

**PACS:** 05.45.Gg, 05.45.Pq, 05.45.Xt

**DOI:** 10.7498/aps.62.170510

---

\* Project supported by the Young Scientists Fund of the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 61104074), the China Postdoctoral Science Foundation (Grant Nos. 20100471462, 2013T60294), the Fundamental Research Funds for the Central Universities of Ministry of Education of China (Grant Nos. N100317002, N100604007, N110417004, N110417005, N110617001), and the Scientific Research Foundation for Doctor of Liaoning Province, China (Grant No. 20101032).

† Corresponding author. E-mail: chinarentao@163.com