

## 非线性漂移的 Fokker-Planck 方程的近似非定态解\*

杨会会 宁丽娟†

(陕西师范大学数学与信息科学学院, 西安 710062)

(2013年4月17日收到; 2013年6月8日收到修改稿)

研究了由高斯白噪声和色噪声作用下的非线性动力学系统的不稳定态演化问题. 在弱噪声极限下, 运用本征值本征矢理论得到了非定态解  $\rho(x, t)$  的近似表达式; 分析了色噪声自关联时间  $\tau$ , 强度  $\alpha$  对  $\rho(x, t)$  以及对一、二阶矩的影响. 数值模拟发现: 1)  $t$  在一定范围内,  $\rho(x, t)$  是变量  $x$  和  $t$  的单调函数, 且随  $\tau$  的增大而增大, 反之, 随  $\alpha$  的增大而减小; 2) 一阶矩是  $\tau$  和  $\alpha$  的单调函数, 但二阶矩却是非单调函数, 在参数影响下发生了相变现象.

**关键词:** 奥恩斯坦 - 乌伦贝克过程, 本征值, 本征矢, 非定态解

**PACS:** 05.40.-a, 02.50.-r

**DOI:** 10.7498/aps.62.180501

## 1 引言

近年来, 色噪声理论在非平衡、非线性以及不稳定性现象的研究中已取得了很大的进展<sup>[1,2]</sup>, 特别是对高斯色噪声问题的研究引起了广泛的关注. 在色噪声理论中, 主要的困难在于色噪声有限的自关联时间使任何系统具有了非 Markov 特性, 对此目前还没有找到精确的解析理论. 以往人们研究色噪声一般是采用各种近似方法<sup>[3]</sup>, 其中 Jung 和 Hanggi 等提出和运用统一色噪声理论<sup>[2,4]</sup>, 在绝热消去条件下, 得到了近似的 Markov 描述; San Miguel 和 Sancho<sup>[5]</sup> 利用泛函方法导出了平方奥恩斯坦 - 乌伦贝克 (OU) 色噪声的近似类 Fokker-Planck 方程 (简称 FPE); Liang 等<sup>[6,7]</sup> 利用诺维科夫理论在各种近似下对响应函数做截断展开, 从而得到概率密度函数的各类近似 FPE; Ke 等<sup>[8]</sup> 将统一色噪声近似进行扩展, 研究了两个色噪声激励的郎之万方程的响应问题.

研究具有非线性漂移的 FPE 的不稳定态演化问题, 目前已有多种有效的近似方法<sup>[3,9-12]</sup> 来处理, 如 Wentzel-Kramers-Brillouin 法、 $\Omega$  展开、标度

理论、变分法、以及精确度比较高的格林函数  $\Omega$  展开法等. 在此基础上, 本文应用文献 [3] 的空间扩维法, 考虑了受高斯白噪声和色噪声驱动的非线性动力学系统, 将高斯色噪声<sup>[13,14]</sup> 转化为高斯白噪声来讨论. 为了研究系统在不稳定点附近的演化行为, 应用了格林函数的  $\Omega$  展开理论<sup>[3]</sup> 在初始时区的线性近似, 将二维非线性非细致平衡系统转化为二维 OU 过程来讨论. OU 过程是指漂移力为线性, 而扩散项为常数的 FPE 所代表的过程. 对此过程, 不仅可以求得精确的定态解, 而且可以求得精确的非定态解. 定态解的性质决定了自治的 FPE 长时间行为, 然而, 系统还有许多性质由非定态解的演化过程决定. 所以, 本文在弱噪声极限下, 运用本征值本征矢理论<sup>[3,9]</sup> 得到了系统的约化非定态解, 并将结果应用到产品产量增长模型中.

本文结构安排如下: 首先在格林函数的  $\Omega$  展开理论基础运用本征值本征矢理论近似得到了一般郎之万方程所对应的近似非定态解; 然后将此结果应用到产品产量增长模型中; 最后进一步利用 Matlab 数值模拟<sup>[15]</sup>, 分别讨论了色噪声自相关时间  $\tau$ , 色噪声强度  $\alpha$  对非定态解  $\rho(x, t)$  以及变量  $x$  的一、二阶矩的影响.

\* 国家自然科学基金 (批准号: 11202120, 61273311) 资助的课题.

† 通讯作者. E-mail: ninglijuan@snnu.edu.cn

## 2 一般郎之万方程所对应的近似含时解

近年来, 随机力对非线性系统的作用已成为许多研究领域的重要研究对象, 在非平衡物理、生物系统、化学系统等的统计性质中有广泛应用, 可用来描述系统的定态、非定态等问题. 考虑受高斯白噪声和色噪声共同驱动的一维非线性动力学系统, 其一般形式的郎之万方程可以表示为

$$\dot{x} = f(x) + g_1(x)\xi(t) + g_2(x)\eta(t), \quad (1)$$

其中,  $f(x)$  为  $x$  的非线性函数,  $g_1(x)$  和  $g_2(x)$  为  $x$  的函数.  $\xi(t)$  和  $\eta(t)$  分别为高斯色噪声和白噪声, 统计性质为

$$\begin{aligned} \langle \xi(t) \rangle &= \langle \eta(t) \rangle = 0, \\ \langle \eta(t)\eta(s) \rangle &= 2D\delta(t-s), \\ \langle \xi(t)\xi(s) \rangle &= \frac{\alpha}{\tau} e^{-\frac{|t-s|}{\tau}}, \\ \langle \eta(t)\xi(s) \rangle &= \langle \xi(t)\eta(s) \rangle = 0, \end{aligned} \quad (2)$$

$D$  表示白噪声  $\eta(t)$  的强度,  $\alpha$  和  $\tau$  分别表示色噪声  $\xi(t)$  的强度与自关联时间. 系统 (1) 通过高斯型色噪声  $\xi(t)$  的有限关联时间  $\tau$  形成了对历史的记忆, 不再为 Markov 型的. 通过扩大空间维数, 可将系统等效的变形<sup>[3]</sup> 为

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + g_1(x)y + g_2(x)\eta(t) \\ \dot{y} = -\frac{1}{\tau}y + \frac{1}{\tau}\Gamma(t) \end{cases}, \quad (3)$$

其中  $\langle \Gamma(t) \rangle = 0$ ,  $\langle \Gamma(t)\Gamma(s) \rangle = 2\alpha\delta(t-s)$ . 对系统 (3), 用变量  $z$  代换  $x$ , 使乘性白噪声  $\eta(t)$  转化为加性白噪声, 即

$$\begin{cases} \dot{z} = h_1(z) + h_2(z)y + \eta(t) \\ \dot{y} = -\frac{1}{\tau}y + \frac{1}{\tau}\Gamma(t) \end{cases}, \quad (4)$$

其中

$$h_1(z) = \frac{f(x)}{g_2(x)}, \quad h_2(z) = \frac{g_1(x)}{g_2(x)}, \quad z = \int^x \frac{1}{g_2(x)} dx.$$

则系统 (4) 对应的二维 FPE 为

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho(z, y, t)}{\partial t} &= -\frac{\partial}{\partial z} [(h_1(z) + h_2(z)y)\rho(z, y, t)] \\ &+ \frac{1}{\tau} \frac{\partial}{\partial y} [y\rho(z, y, t)] + D \frac{\partial^2}{\partial z^2} \rho(z, y, t) \\ &+ \frac{\alpha}{\tau^2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \rho(z, y, t). \end{aligned}$$

用原始变量标记为

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho(x, y, t)}{\partial t} &= -\frac{\partial}{\partial x} [(h_1(x) + h_2(x)y)\rho(x, y, t)] \\ &+ \frac{1}{\tau} \frac{\partial}{\partial y} [y\rho(x, y, t)] + D \frac{\partial^2}{\partial x^2} \rho(x, y, t) \\ &+ \frac{\alpha}{\tau^2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \rho(x, y, t). \end{aligned} \quad (5)$$

系统 (5) 对应的确定性方程为

$$\begin{cases} \dot{x} = h_1(x) + h_2(x)y \\ \dot{y} = -\frac{1}{\tau}y \end{cases}, \quad (6)$$

假设确定性方程 (6) 有一个不稳定定态解  $(a, 0)$  和稳定定态解  $(b, 0)$ .

由于系统不满足  $\frac{d}{dy}[h_1(x) + h_2(x)y] = \frac{d}{dx} \times \left(-\frac{1}{\tau}y\right)$ , 所以不具有细致平衡条件, 但为了研究系统在不稳定附近的演化行为, 采取合理的线性近似将二维非线性系统转化为线性系统来讨论. 当系统的初态处于不稳定定态解  $(a, 0)$  的邻域时, 系统的概率分布为  $\delta$  分布:

$$\begin{aligned} \rho(x, y, 0) &= \delta(x - x_0)\delta(y - y_0) \\ &= \delta(x - a - m\sqrt{\epsilon})\delta(y - n\sqrt{\epsilon}), \\ m, n &= o(1). \end{aligned}$$

对确定性系统 (6) 在不稳定定态解  $(a, 0)$  处线性化, 并忽略高阶项, 得:

$$\begin{cases} \dot{x} = k_1x + k_2y + k_3 \\ \dot{y} = -\frac{1}{\tau}y \end{cases}, \quad (7)$$

其中

$$k_1 = h'_1(a) > 0, \quad k_2 = h_2(a), \quad k_3 = -ah'_1(a).$$

则 (7) 式对应的二维 FPE 为

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho(x, y, t)}{\partial t} &= -\frac{\partial}{\partial x} [(k_1x + k_2y + k_3)\rho(x, y, t)] \\ &+ \frac{1}{\tau} \frac{\partial}{\partial y} [y\rho(x, y, t)] + D \frac{\partial^2}{\partial x^2} \rho(x, y, t) \\ &+ \frac{\alpha}{\tau^2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \rho(x, y, t). \end{aligned} \quad (8)$$

可见 (8) 式是具有线性漂移力、常系数扩散项的二维 OU 过程. 对此过程, 可以求得精确的非定态解.

由于系统 (8) 的初始分布函数为

$$\begin{aligned} \rho(x, y, 0) &= \delta(x - x_0)\delta(y - y_0) \\ &= \delta(x - a - m\sqrt{\epsilon})\delta(y - n\sqrt{\epsilon}), \end{aligned}$$

$$m, n = o(1). \quad (9)$$

对方程 (8) 进行傅里叶变换:

$$\begin{aligned} \rho(x, y, t) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \iint e^{i(r_1 x + r_2 y)} \bar{\rho}(r_1, r_2, t) dr_1 dr_2. \end{aligned} \quad (10)$$

将 (10) 式带入 (8) 式, 并进行反演, 得到:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} &= k_1 r_1 \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial r_1} + k_2 r_1 \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial r_2} \\ &\quad - \frac{1}{\tau} r_2 \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial r_2} - D r_1^2 \bar{\rho} - \frac{\alpha}{\tau^2} r_2^2 \bar{\rho}. \end{aligned} \quad (11)$$

并且 (10) 式给出了  $\bar{\rho}(r_1, r_2, t)$  的初始条件:

$$\bar{\rho}(r_1, r_2, 0) = e^{-i(r_1 x_0 + r_2 y_0)}. \quad (12)$$

下面使用待定系数法求解方程 (11). 假设方程 (11) 的解具有以下高斯形式:

$$\begin{aligned} \bar{\rho}(r_1, r_2, t) &= \exp \left\{ -i(r_1 \mu_1(t) + r_2 \mu_2(t)) - \frac{1}{2} (r_1^2 \sigma_{11}(t) \right. \\ &\quad + r_1 r_2 \sigma_{12}(t) + r_2 r_1 \sigma_{21}(t) \\ &\quad \left. + r_2^2 \sigma_{22}(t)) \right\}. \end{aligned} \quad (13)$$

为了满足初始条件 (12), 必有:

$$\mu_1(0) = x_0, \mu_2(0) = y_0, \sigma_{ij}(0) = 0, \quad i, j = 1, 2. \quad (14)$$

将 (13) 式代入 (11) 式, 并比较等式两边  $r_1, r_2$  的次数, 得到两组互相独立的方程:

$$\begin{cases} \dot{\mu}_1(t) = k_1 \mu_1(t) + k_2 \mu_2(t) \\ \dot{\mu}_2(t) = -\frac{1}{\tau} \mu_2(t) \end{cases}, \quad (15)$$

$$\begin{cases} \dot{\sigma}_{11}(t) = 2k_1 \sigma_{11}(t) + k_2 \sigma_{12}(t) \\ \quad + k_2 \sigma_{21}(t) + 2D, \\ \dot{\sigma}_{12}(t) = k_1 \sigma_{12}(t) + k_1 \sigma_{21}(t) + 2k_2 \sigma_{22}(t), \\ \dot{\sigma}_{21}(t) = -\frac{1}{\tau} \sigma_{12}(t) - \frac{1}{\tau} \sigma_{21}(t), \\ \dot{\sigma}_{22}(t) = -\frac{2}{\tau} \sigma_{22}(t) + \frac{2\alpha}{\tau^2}. \end{cases} \quad (16)$$

其中第一组方程 (15) 是随机力为 0 的确定性方程. 由于此两组方程有惟一的解, (13) 式假设的高斯形式被自洽地证明了.

为了方便地求解方程组 (15), (16), 下面采用狄拉克矢量与算子形式分别表示方程组 (15), (16). 其中方程组 (15) 可改写为

$$|\dot{\mu}(t)\rangle = \Lambda_1 \mu(t)\rangle, \quad \Lambda_1 = \begin{pmatrix} k_1 & k_2 \\ 0 & -\frac{1}{\tau} \end{pmatrix}, \quad (17)$$

则线性算子  $\Lambda_1$  的本征值为

$$\lambda_1 = k_1, \quad \lambda_2 = -\frac{1}{\tau}.$$

为简化起见, 假定  $\Lambda_1$  的本征值不简并 (一个本征值对应一个本征矢), 则  $\lambda_1, \lambda_2$  对应的本征矢分别为

$$|\mu\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |\nu\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (18)$$

算子  $\Lambda_1$  可用双正交基的形式表示为

$$\Lambda_1 = -k_1 |\mu\rangle \langle \mu| + \frac{1}{\tau} |\nu\rangle \langle \nu|.$$

由初始条件

$$|\mu(0)\rangle = \begin{pmatrix} \mu_1(0) \\ \mu_2(0) \end{pmatrix} = x_0 |\mu\rangle + y_0 |\nu\rangle,$$

方程组 (15) 的解可直接写为

$$\begin{aligned} |\mu(t)\rangle &= \begin{pmatrix} \mu_1(t) \\ \mu_2(t) \end{pmatrix} \\ &= x_0 e^{-\lambda_1 t} |\mu\rangle + y_0 e^{-\lambda_2 t} |\nu\rangle. \end{aligned} \quad (19)$$

方程组 (16) 的算子表达式为

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}(t) &= \Lambda_2 \sigma + \sigma \Lambda_2 + 2D_0, \quad D_0 = \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & \frac{\alpha}{\tau^2} \end{pmatrix}, \\ \Lambda_2 &= \begin{pmatrix} 2k_1 & k_2 & k_2 & 0 \\ 0 & k_1 & k_1 & 2k_2 \\ 0 & -\frac{1}{\tau} & -\frac{1}{\tau} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{2}{\tau} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

其解为

$$\begin{aligned} \sigma_{11}(t) &= \frac{D}{\lambda_1} (1 - e^{-2\lambda_1 t}), \quad \sigma_{12}(t) = \sigma_{21}(t) = 0, \\ \sigma_{22}(t) &= \frac{\alpha}{\lambda_2 \tau^2} (1 - e^{-2\lambda_2 t}). \end{aligned} \quad (20)$$

将 (19), (20) 式代入 (13) 式, 并进行傅里叶变换, 得到非定态解  $\rho(x, y, t)$  的表达式:

$$\begin{aligned} \rho(x, y, t) &= \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\lambda_1 \lambda_2 \tau^2}{D\alpha(1 - e^{-2\lambda_1 t})(1 - e^{-2\lambda_2 t})}} \\ &\quad \times \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[ \frac{\lambda_1}{D(1 - e^{-2\lambda_1 t})} (x - x_0^2 e^{-\lambda_1 t})^2 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{\lambda_2 \tau^2}{\alpha(1 - e^{-2\lambda_2 t})} (y - y_0^2 e^{-\lambda_2 t})^2 \right] \right\} \\ &= \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k_1 \tau}{D\alpha(1 - e^{-2k_1 t})(e^{\frac{2t}{\tau}} - 1)}} \end{aligned}$$

$$\times \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[ \frac{k_1}{D(1-e^{-2k_1t})} (x - a^2 e^{-k_1t})^2 + \frac{\tau}{\alpha(e^{\frac{2t}{\tau}} - 1)} y^2 \right] \right\}.$$

由于沿  $y$  坐标的分布反映了色噪声的行为, 往往更关心的是宏观变量  $x$  的分布情况, 将上式对  $y$  积分, 可得到  $x$  的归一化含时解:

$$\begin{aligned} \rho(x,t) &= N \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k_1 \tau}{D\alpha(1-e^{-2k_1t})(e^{\frac{2t}{\tau}} - 1)}} \\ &\times \exp \left[ -\frac{1}{2} \frac{k_1}{D(1-e^{-2k_1t})} (x - a^2 e^{-k_1t})^2 \right], \quad (21) \end{aligned}$$

其中  $N$  为归一化常数.

### 3 应用举例和数值分析

#### 3.1 产品产量增长模型

Logistic 模型常被用于描述单一种群的繁殖问题, 比如: 肿瘤细胞增长模型, 人(虫)口增长模型等. 下面用 Logistic 模型描述某一社会现象: 一种工业产品刚问世时, 其产量  $x$  的增长率  $\dot{x}$  自然与产量  $x$  自身成正比. 考虑到产品的销售量有一最大限度, 不妨设  $M$  代表此最大销售量, 增长率  $\dot{x}$  还受  $M$  的制约:  $\dot{x}$  还应与  $(M-x)$  成正比,  $x=M$  时,  $\dot{x}=0$ . 因此, 产品产量增长率应满足下面的微分方程:

$$\dot{x} = kx(M-x), \quad (22)$$

可见产品产量增长也服从 Logistic 模型, 这是理想环境下产量增长率的表达式. 在同时考虑产品的使用寿命问题以及系统内部随机因素(产品更新换代等)及环境涨落因素(品牌竞争等)的影响, 产量增长率  $\dot{x}$  所对应的郎之万方程为

$$\dot{x} = kx(M-x) - \lambda x + x\xi(t) + \eta(t), \quad (23)$$

其中  $-\lambda x$  代表产品自身的损耗,  $\lambda^{-1}$  表示产品的平均使用寿命, 此时产品最大销售量为  $(M - \lambda/k)$ ,  $\xi(t)$  为乘性高斯色噪声,  $\eta(t)$  为加性高斯白噪声.

(23) 式对应的二维确定性方程为

$$\begin{cases} \dot{x} = kx(M-x) - \lambda x + xy \\ \dot{y} = -\frac{1}{\tau} y \end{cases}, \quad (24)$$

其存在一个稳态解  $(M - \lambda/k, 0)$  与一个非稳态解  $(0, 0)$ .

由前面的讨论, (23) 式对应的近似二维 FPE 为

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho(x,y,t)}{\partial t} &= -\frac{\partial}{\partial x} [(kM - \lambda)x\rho(x,y,t)] \\ &+ \frac{1}{\tau} \frac{\partial}{\partial y} [y\rho(x,y,t)] + D \frac{\partial^2}{\partial x^2} \rho(x,y,t) \\ &+ \frac{\alpha}{\tau^2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \rho(x,y,t), \end{aligned}$$

本征值分别为

$$\lambda_1 = kM - \lambda, \quad \lambda_2 = -\frac{1}{\tau}.$$

为方便起见记  $a = kM - \lambda$ , 所以系统 (23) 式对应的含时非定态解为

$$\begin{aligned} \rho(x,t) &= N \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{a\tau}{D\alpha(1-e^{-2at})(e^{\frac{2t}{\tau}} - 1)}} \\ &\times e^{-\frac{1}{2} \frac{a}{D(1-e^{-2at})} x^2}, \quad (25) \end{aligned}$$

其中  $N$  为归一化常数.

#### 3.2 变量 $x$ 的一、二阶矩

由方程 (25), 可得到变量  $x$  的  $n$  阶矩为

$$\langle x^n(t) \rangle = \int_0^{+\infty} x^n \rho(x,t) dx. \quad (26)$$

因此, 变量  $x$  的一阶矩表达式为

$$\langle x(t) \rangle = \int_0^{+\infty} x \rho(x,t) dx, \quad (27)$$

变量  $x$  的二阶矩表达式为

$$\sigma_x^2 = \langle x^2(t) \rangle - \langle x(t) \rangle^2. \quad (28)$$

#### 3.3 数值模拟

为了更好地研究色噪声参数对非定态解  $\rho(x,t)$  的影响, 通过 Matlab 模拟, 首先分析在噪声扰动下系统的演化行为. 图 1(a) 与 (b) 分别为系统在无噪声干扰以及噪声干扰下的演化行为. 从图中可以看出, 在无噪声存在的情况下, 当  $t$  不超过某值 ( $t \approx 7$ ) 时,  $x$  是  $t$  的单调函数; 一旦  $t$  超过此值后, 随  $t$  的增大,  $x$  不再变化, 而是趋于某一定值, 也自治地说明了饱和解的存在. 然而噪声存在时,  $x$  随  $t$  不再规律性地变化, 而是随机地在原确定性解的周围上下波

动.由此可见,噪声的存在使确定性解出现了一些新的特点.

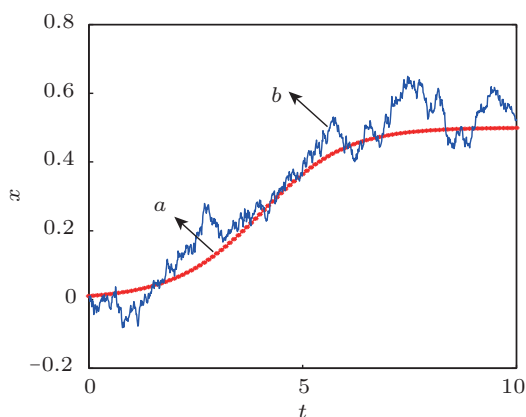


图1 变量  $x$  关于  $t$  的曲线  $a = 1, k = 2, D = 0.1, \alpha = 0.01, \tau = 0.1$

根据方程 (25) 表达的产品产量增长模型的非定态解,经数值处理,给出了不同噪声参数对  $\rho(x,t)$  的影响,如图 2 所示.

图 2(a) 给出了非定态解  $\rho(x,t)$  随产量  $x$  和时间  $t$  变化的函数曲面三维图.从图中可以看出,当  $t$  很小时, $\rho(x,t)$  随  $x$  的增加在快速减小,但随着  $t$  的增大, $\rho(x,t)$  随  $x$  的增加变化缓慢,最后趋向于 0.如图 2(b) 所示:当  $t$  取定值时,随  $x$  的增加, $\rho(x)$  单调递减,最后趋于 0;而随  $t$  的增加  $\rho(x)$  曲线变平缓,峰值也在下降.在 2(c) 中,当  $t$  极小时, $\rho(x)$  随  $t$  的增加单调递增;一段时间后,随  $t$  的增大, $\rho(x)$  反而在减小,最后趋于定值.此特性正好说明了在一类新产品问世时,当产量  $x$  较少时,社会对这种产品需求概率在增大,商家对这种供不应求的市场需求情况,抓住商业商机,增加生产产量;一段时间后,随产量  $x$  的增加,社会对此类产品的需求量也在下降,直到达到社会需求的饱和量 ( $x = M - \lambda/k$ ) 时,商家就不会再生产此类产品.同时也自洽地说明了在不稳定态的演化是瞬间完成的.

图 3(a), (b) 分别给出了  $\rho(x)$  作为  $x$  的函数随色噪声强度  $\alpha$  以及色噪声自关联时间  $\tau$  的变化曲线图.从 3(a) 可以看出,随色噪声强度  $\alpha$  的增大, $\rho(x)$  的分布越平缓,峰值越低;反之,从 3(b) 中可以看出,随色噪声自关联时间  $\tau$  的增加, $\rho(x)$  的分布越陡,峰值越高.此特性正好说明了在减小外部激励色噪声强度  $\alpha$  时,同时增大色噪声自关联时间  $\tau$  有助于商家盈利.

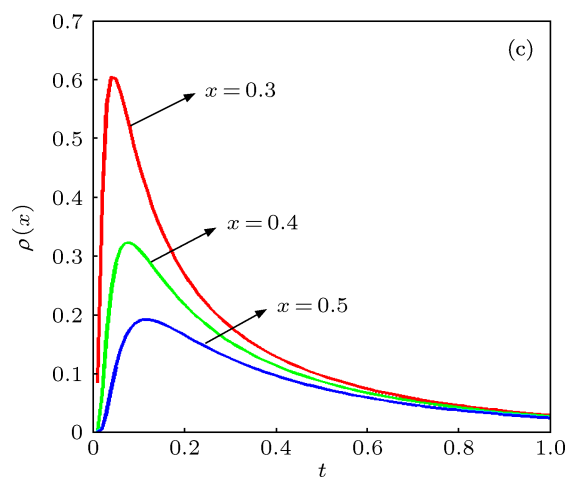
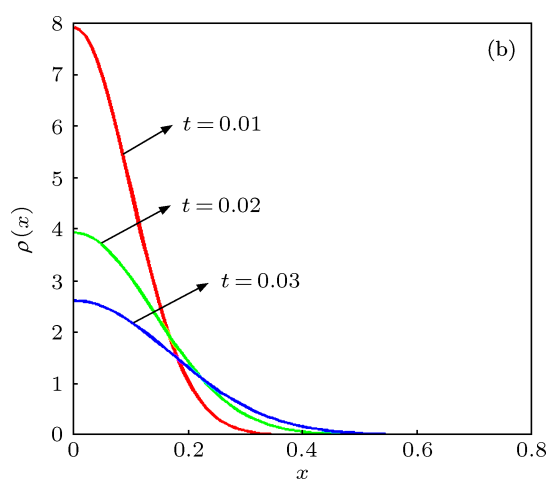
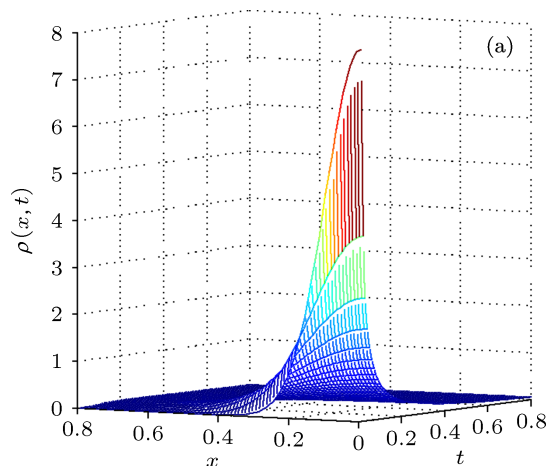


图2 (a)  $\rho(x,t)$  关于  $x$  和  $t$  的曲面,  $a = 1, k = 2, D = 0.5, \alpha = 0.5, \tau = 0.5$ ; (b)  $\rho(x)$  关于  $x$  的曲线,  $a = 1, k = 2, D = 0.5, \alpha = 0.5, \tau = 0.5$ ; (c)  $\rho(x)$  关于  $t$  的曲线,  $a = 1, k = 2, D = 0.5, \alpha = 0.5, \tau = 0.5$

根据方程 (25), (27) 的表达式,图 4(a) 给出了变量  $x$  的均值  $\langle x \rangle$  作为色噪声自关联时间  $\tau$  的函数随色噪声强度  $\alpha$  变化的曲线.从图中明显可以看出:变量  $x$  的均值是非负的,且随着  $\tau$  值的增加是单调递增的.当  $\tau$  值取定时, $\langle x \rangle$  随  $\alpha$  的增加却在单调

递减. 图 4(b) 给出了变量  $x$  的均值  $\langle x \rangle$  作为  $\alpha$  的函数随  $\tau$  变化的曲线. 从图中可以看出: 此时是单峰曲线, 且峰值出现在  $\alpha$  极小时; 随着  $\alpha$  的增加,  $\langle x \rangle$

曲线单调递减, 直到逐渐稳定到定值; 当  $\alpha$  固定时,  $\langle x \rangle$  随  $\tau$  值的增加而增加的同时, 曲线的峰值上升且向右平移.

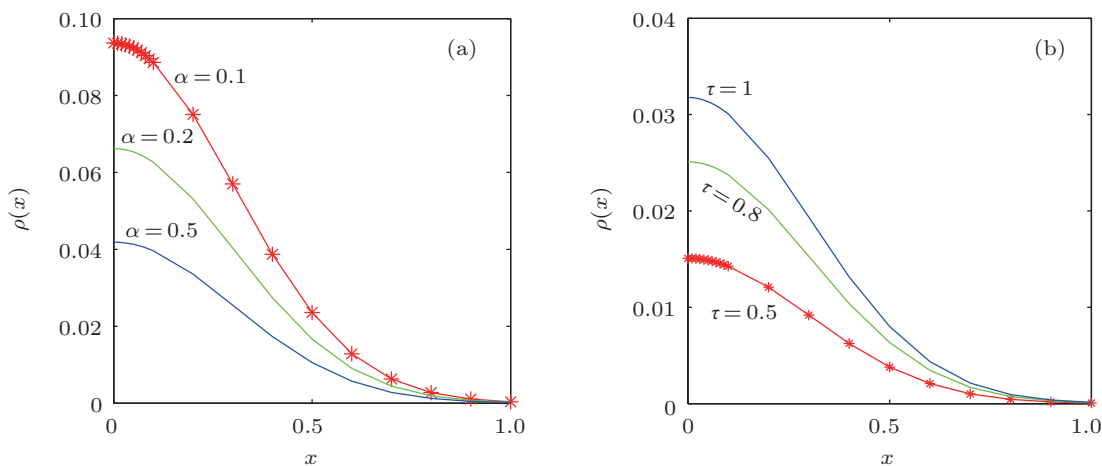


图 3 (a)  $\rho(x)$  作为  $x$  的函数随  $\alpha$  变化的曲线,  $a=1, k=2, D=0.5, \tau=0.5, t=0.01$ ; (b)  $\rho(x)$  作为  $x$  的函数随  $\tau$  变化的曲线,  $a=1, k=2, D=0.5, \tau=0.5, t=0.1$

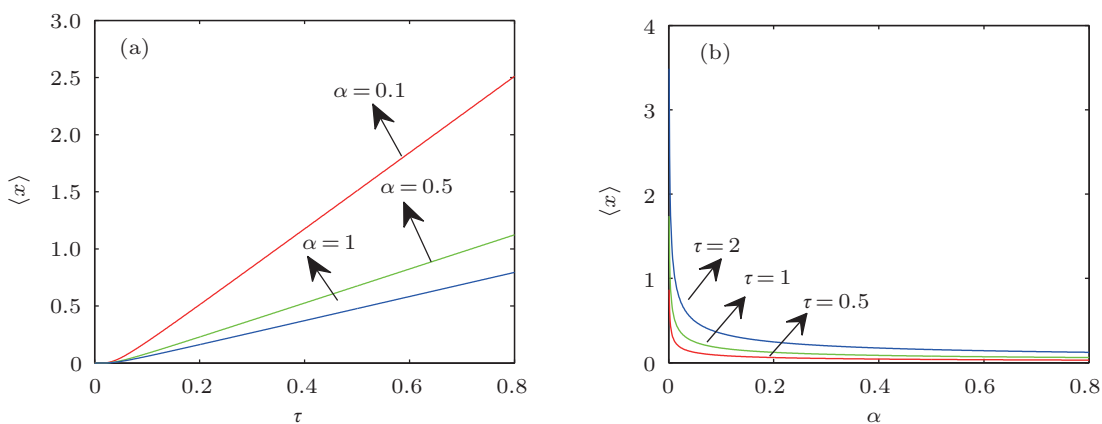


图 4 (a)  $\langle x \rangle$  作为  $\tau$  的函数随  $\alpha$  变化的曲线,  $a=1, k=1, D=0.5, t=0.1$ ; (b)  $\langle x \rangle$  作为  $\alpha$  的函数随  $\tau$  变化的曲线,  $a=1, k=1, D=0.5, t=0.01$

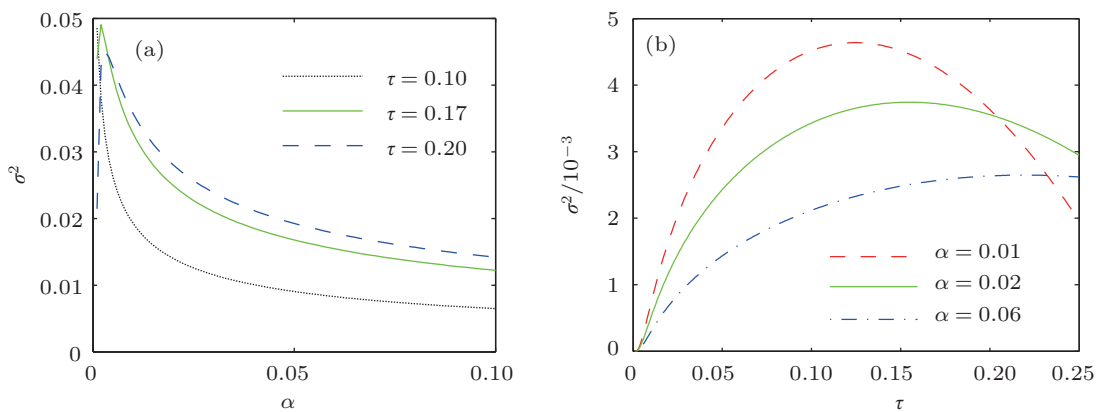


图 5 (a)  $\sigma^2$  作为  $\alpha$  的函数随  $\tau$  变化的曲线,  $a=1, k=1, D=0.5, t=0.01$ ; (b)  $\sigma^2$  作为  $\tau$  的函数随  $\alpha$  变化的曲线,  $a=1, k=1, D=0.5, t=0.01$

根据方程 (25), (27), (28) 的表达式, 图 5(a) 给出了变量  $x$  的方差  $\sigma^2$  作为  $\alpha$  的函数随  $\tau$  变化的曲线. 从图中可以看出: 变量  $x$  的方差是正的, 当色噪声强度  $\alpha$  值较小时,  $\sigma^2$  曲线是  $\alpha$  的单调递增函数; 随  $\alpha$  值增大时,  $\sigma^2$  却是  $\alpha$  的单调递减函数. 即在  $\alpha \approx 0.01$  时, 曲线出现了峰值. 另一方面, 随着关联时间  $\tau$  值的增加,  $\sigma^2$  曲线峰值下降的同时在向右平移; 且在  $\alpha < 0.01$  区域,  $\sigma^2$  曲线随  $\tau$  值的增加单调递减, 而在  $\alpha > 0.01$  区域,  $\sigma^2$  曲线是  $\tau$  的单调递增函数. 图 5(b) 给出了变量  $x$  的方差  $\sigma^2$  作为  $\tau$  的函数随  $\alpha$  变化的曲线. 从图中可以看出: 当色噪声强度  $\alpha$  较大时,  $\sigma^2$  随自关联时间  $\tau$  的增加而单调增加; 当  $\alpha$  减小时,  $\sigma^2$  曲线发生了巨大的变化, 此时  $\sigma^2$  曲线出现了一个峰值, 且随  $\alpha$  的减小, 峰值变高的同时在向左平移; 当  $\alpha$  较小时,  $\sigma^2$  随着  $\tau$  的增加先单调递增后单调递减.

## 4 结论

本文主要考虑了受高斯白噪声和色噪声驱动

的非线性动力学系统在不稳定态的演化问题. 在弱噪声极限下, 利用本征值本征矢理论得到了非定态解  $\rho(x, t)$  的近似表达式, 并讨论了: 1) 非定态解  $\rho(x, t)$  作为产量  $x$  和时间  $t$  的函数, 分别随色噪声自相关时间  $\tau$  以及色噪声强度  $\alpha$  的变化情况; 2) 自关联时间  $\tau$  和色噪声强度  $\alpha$  对一、二阶矩的影响. 研究发现  $t$  在一定的范围内,  $\rho(x, t)$  是变量  $x$  和时间  $t$  的单调函数, 且  $\rho(x, t)$  随自关联时间  $\tau$  和色噪声强度  $\alpha$  的变化呈现出不同的特性,  $\tau$  越大,  $\rho(x, t)$  峰越陡, 峰值越高; 反之,  $\alpha$  越大, 峰越平稳, 且峰值下降. 一阶矩是各参数的单调函数, 随  $\tau$  值的增加单调递增, 但随  $\alpha$  值的增加单调递减. 随着参数的变化, 二阶矩却是非单调变化的, 这是典型的相变现象; 随  $\alpha$  和  $\tau$  变化时,  $\sigma^2$  均出现了峰值, 且峰值位置以及峰值高度也随着参数的变化而变化. 在用 Logistic 模型描述的产品产量增长系统中有两个状态:  $x_s = M - \lambda/k$ ,  $x_u = 0$ , 非定态解  $\rho(x, t)$  就反映了随时间  $t$  的变化在  $x_u$  附近演化的特性. 本文结论是一种产品产销规律的定量表述, 对产销决策者制定销售策略提供了理论依据.

- [1] Risken H 1985 *The Fokker-Planck Equation: Methods of Solution and Applications* (Berlin: Springer-Verlag)
- [2] Jung P, Hanggi P 1988 *J. Opt. Soc. Am. B* **5** 979
- [3] Hu G 1944 *Stochastic Force and Nonlinear Systems* (Shanghai: Shanghai Scientific and Technological Education Publishing House) (in Chinese) [胡岗 1944 随机力与非线性系统 (上海: 上海科技教育出版社)]
- [4] Guo F, Luo X D, Li S F, Zhou Y R 2010 *Chin. Phys. B* **19** 080504
- [5] San Miguel M, Sancho J M 1981 *Z. Phys. B: Condens. Matter* **43** 361
- [6] Jia Y, Jia J R 1995 *Phys. Rev. A* **53**
- [7] Liang G Y, Cao L, Wu D J 2004 *Physica E* **335** 371
- [8] Ke S Z, Cao L, Wu D J 1999 *J. Huazhong Univ. Sci.* **27** 98 (in Chinese) [柯圣志, 曹力, 吴大进 1999 华中理工大学学报 **27** 98]
- [9] Luo X Q, Zhu S Q 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 977 (in Chinese) [罗晓琴, 朱士群 2002 物理学报 **51** 977]
- [10] Dong X J 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 5618 (in Chinese) [董小娟 2007 物理学报 **56** 5618]
- [11] Wang B, Shao J H, Wu X Q 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 1377 (in Chinese) [王兵, 邵继红, 吴秀清 2009 物理学报 **58** 1377]
- [12] Dan W, Zhu S Q 2007 *Phys. Rev. Lett. A* **363** 202
- [13] Zhang J J, Jin Y F 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 120501 (in Chinese) [张静静, 靳艳飞 2011 物理学报 **60** 120501]
- [14] Wang C J 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 010503 (in Chinese) [王参军 2012 物理学报 **61** 010503]
- [15] Zhang G T, Huang J J 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 140205 (in Chinese) [张国亭, 黄俊杰 2012 物理学报 **61** 140205]

# Approximate time-dependent solution of Fokker-Planck equation with non-linear drift force\*

Yang Hui-Hui Ning Li-Juan<sup>†</sup>

(College of Mathematics and Information Science Shaanxi Normal University, Xi'an 710062, China)

(Received 17 April 2013; revised manuscript received 8 June 2013)

## Abstract

In this paper, the unstable state evolution problem of the non-linear dynamical system driven by Gaussian white and colored noise is investigated. Using the eigenvalue and eigenvector theory, the expression of the approximate time-dependent solution ( $\rho(x,t)$ ) is derived. The effects of parameters on  $\rho(x,t)$ , mean and normalized variance are also analyzed. Numerical simulations show that 1)  $\rho(x,t)$  is a monotonic function of  $t$  and  $x$  under the certain limits of  $t$ , which increases with  $\tau$  increasing, but decreases with  $\alpha$  increasing; it is very remarkable for large  $\tau$  and large  $\alpha$ ; 2) the mean of the state variable  $x$  is positive, which increases with  $\tau$  increasing, but decreases with  $\alpha$  increasing; the normalized variance of the state variable  $x$  is a non-monotonic function of the  $\alpha$  and  $\tau$ . Therefore, a phase transition phenomenon is found in this system.

**Keywords:** Ornstein-Uhlenbeck process, eigenvalue, eigenvector, the time-dependent solution

**PACS:** 05.40.-a, 02.50.-r

**DOI:** 10.7498/aps.62.180501

---

\* Project supported by National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 11202120, 61273311).

<sup>†</sup> Corresponding author. E-mail: ninglijuan@snnu.edu.cn