

# Ξ 型三能级原子玻色 - 爱因斯坦凝聚体 对光场压缩性质的影响\*

李明<sup>1)†</sup> 陈鼎汉<sup>1)</sup> 陈翠玲<sup>2)‡</sup>

1) (桂林理工大学理学院, 桂林 541004)

2) (广西师范大学数学科学学院, 桂林 541004)

(2013年2月6日收到; 2013年5月4日收到修改稿)

利用格子液体方法对 Ξ 型三能级原子玻色 - 爱因斯坦凝聚体与单模压缩相干态光场相互作用系统的哈密顿量进行了改进, 并且研究了 Ξ 型三能级原子单模光场系统中光场压缩性质. 结果表明: 光场两正交分量交替呈现周期性压缩, 其最大压缩深度由光场与原子间的相互作用强度和光场初始压缩因子决定, 而压缩时间与光场的圆频率有关.

**关键词:** 玻色 - 爱因斯坦凝聚, Ξ 型三能级原子, 压缩相干态, 单模压缩态光场

**PACS:** 32.80.Qk, 42.50.-p

**DOI:** 10.7498/aps.62.183201

## 1 引言

玻色 - 爱因斯坦凝聚 (Bose-Einstein condensation, BEC)<sup>[1-3]</sup> 的实现和由 BEC 耦合输出的相干原子束的获得是 20 世纪末物理学方面的重要突破, 它开创了原子物理学以及光学的新研究领域<sup>[4-6]</sup>. 1997 年, 麻省理工学院 (MIT) 的一个研究小组通过使用无线电频率首次实现了一个具有 BEC 耦合输出的原子激光<sup>[4]</sup>. 1998 年, 耶鲁大学创建了一个类似于锁模激光装置的原子激光装置<sup>[5]</sup>. 1999 年, Hagley 等<sup>[6]</sup> 成功研制了第一个可调控的、高校准的和“准连续”特征的原子激光装置.

近年来, 许多理论和实验研究者集中在 BEC 的独特性质以及原子 BEC 和光场相互作用的研究, 并且已经获得了一系列的重要结果<sup>[7-19]</sup>. 众所周知, 原子和光场之间的相互作用在原子冷却和 BEC 的探测方面有重要作用. 因此, 进一步研究 BEC 的光场压缩不仅有利于探索 BEC 的固有特征, 而且有助于为它的制备和探测提供有效方法. 另外, 研

究光场压缩在理论和实验方面都具有重要意义. 一方面, 光场压缩是典型的光场非经典效应之一, 是纯量子效应, 可以检验光的全量子理论; 另一方面, 研究光学压缩对超高信噪比的光通信、低噪音甚至零噪音的光放大器、超高灵敏的干涉仪有重要的意义.

本文在文献 [20] 的基础上, 利用格子液体方法对 Ξ 型三能级原子玻色 - 爱因斯坦凝聚体与单模压缩相干态光场相互作用系统的哈密顿量进行改进, 并且对 Ξ 型三能级原子单模光场系统中的光场压缩性质进行研究. 结果表明: 光场两正交分量交替呈现周期性压缩现象, 其最大压缩深度与光场和原子间的相互作用强度、光场初始压缩因子密切相关, 而压缩时间只与光场的频率有关.

## 2 改进的模型和求解

在熟知的 Bogoliubov 近似下<sup>[21]</sup>, 文献 [20] 已推导出 Ξ 型三能级原子的 BEC 与单模压缩相干态

\* 教育部科学技术研究重点基金 (批准号: 209094) 和广西教育厅科研基金 (批准号: 200103YB058) 资助的课题.

† 通讯作者. E-mail: liming928@163.com

‡ 通讯作者. E-mail: mathchen@163.com

光场相互作用的系统的总哈密顿量:

$$H = \omega a^\dagger a + (E_2 + 2N_1\Omega)b_2^\dagger b_2 + (E_3 + 2N_1\Omega)b_3^\dagger b_3 + \varepsilon\sqrt{N_1}(ab_2^\dagger + a^\dagger b_2) + \varepsilon(a^\dagger b_2^\dagger b_3 + ab_2 b_3^\dagger) + N_1^2\Omega, \quad (1)$$

式中  $a^\dagger$  和  $a$  分别表示光场的产生算符和湮没算符,  $b_j^\dagger$  和  $b_j$  ( $j = 1, 2, 3$ ) 分别表示在第  $j$  个原子态的产生算符和湮没算符,  $\omega$  为光场的圆频率,  $E_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) 为第  $i$  个能级的能量,  $\varepsilon$  表示光场与原子间相互作用强度,  $\Omega$  表示 BEC 中原子间相互作用强度,  $N_1$  为 BEC 中的原子数.

利用格子液体方法通过文献 [22] 分析可知 (2) 式中  $\Omega$  对应于  $u_0/(2N_1)$ ,  $u_0$  为常数, 于是得到改进后的哈密顿量

$$H = \omega a^\dagger a + (E_2 + u_0)b_2^\dagger b_2 + (E_3 + u_0)b_3^\dagger b_3 + \varepsilon\sqrt{N_1}(ab_2^\dagger + a^\dagger b_2) + \varepsilon(a^\dagger b_2^\dagger b_3 + ab_2 b_3^\dagger) + \frac{1}{2}u_0N_1. \quad (2)$$

由 (2) 式可知, BEC 中原子间相互作用强度使原来的原子能系  $E_2$  和  $E_3$  分别增加到  $E_2 + u_0$  和  $E_3 + u_0$ . 增加量  $\Delta = u_0$  与 BEC 中原子数  $N_1$  和原子间相互作用强度  $\Omega$  无关. 而文献 [20] 中相应的增加量  $\Delta = 2N_1\Omega$  与原子数  $N_1$  和原子间相互作用强度  $\Omega$  成正比.

通过逐级迭代法求解系统的海森堡运动方程

$$i\dot{a} = [a, H] = \omega a + \varepsilon(b_2 + b_2^\dagger b_3), \quad (3)$$

$$i\dot{b}_2 = [b_2, H] = (E_2 + u_0)b_2 + \varepsilon(a + a^\dagger b_3), \quad (4)$$

$$i\dot{b}_3 = [b_3, H] = (E_3 + u_0)b_3 + \varepsilon ab_2, \quad (5)$$

得到光场算符的一级迭代近似解为

$$a(t) = \gamma(t)a(0) + \delta(t)b_2(0) + \kappa(t)a^\dagger(0)b_3(0) + \lambda(t)b_2^\dagger(0)b_3(0), \quad (6)$$

其中

$$\gamma(t) = -\frac{\varepsilon[e^{i\eta t}(\xi + \omega) - e^{i\xi t}(\eta + \omega)]}{\eta - \xi}, \quad (7)$$

$$\delta(t) = -\frac{\varepsilon(e^{i\eta t} - e^{i\xi t})}{\eta - \xi}, \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \kappa(t) = & -\varepsilon\{e^{i(\eta+\xi+u_0+E_3)t}(\eta + \omega)(\xi + \omega) \\ & \times [e^{i(\eta+\xi+u_0+E_3)t}(\eta - \xi) - e^{i\eta t}(\eta + u_0 + E_3) \\ & + e^{i\xi t}(\xi + u_0 + E_3)]\} [(-\eta + \xi) \\ & \times (\eta + u_0 + E_3)(\xi + u_0 + E_3)]^{-1}, \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \lambda(t) = & -\varepsilon\{e^{-i(\eta+\xi+u_0+E_3)t}[e^{i\eta t}(\eta + u_0 + E_3) \\ & \times (\xi + \omega) - e^{i\xi t}(\xi + u_0 + E_3)(\eta + \omega) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & + e^{-i(\eta+\xi+u_0+E_3)t}(\eta - \xi)(-\omega + u_0 + E_3)]\} \\ & \times [(\eta - \xi)(\eta + u_0 + E_3)(\xi + u_0 + E_3)]^{-1}, \end{aligned} \quad (10)$$

$$\eta = \frac{1}{2} \left[ -\omega - u_0 - E_2 - \sqrt{(\omega + u_0 + E_2)^2 - 4(\omega u_0 + \omega E_2 - \varepsilon^2)} \right], \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \xi = & \frac{1}{2} \left[ -\omega - u_0 - E_2 + \sqrt{(\omega + u_0 + E_2)^2 - 4(\omega u_0 + \omega E_2 - \varepsilon^2)} \right]. \end{aligned} \quad (12)$$

### 3 光场的压缩效应

为了研究光场的压缩效应, 定义光场的两个缓变的正交分量算符 [23]

$$U_1 = \frac{1}{2}(a + a^\dagger), \quad (13)$$

$$U_2 = \frac{1}{2i}(a - a^\dagger). \quad (14)$$

令

$$Q_i = (\Delta U_i)^2 - 1/4 \quad (i = 1, 2), \quad (15)$$

其中  $(\Delta U_i)^2 = \langle U_i^2 \rangle - \langle U_i \rangle^2$  ( $i = 1, 2$ ) 是光场的第  $i$  个正交分量的涨落. 若在某一状态下, 有  $Q_i < 0$  ( $i = 1, 2$ ), 则意味着光场的第  $i$  个正交分量的量子噪声被压缩.

设初始时刻激发态为真空态, 所有原子均处于基态并发生 BEC. 系统的初始态矢可以表示为

$$|\psi(0)\rangle = |\beta_1\rangle_g \otimes |0\rangle_2 \otimes |0\rangle_3 \otimes |\alpha, \xi\rangle, \quad (16)$$

其中  $|\beta_1\rangle_g$  表示原子基态湮没算符  $b_1$  的本征态, 表示在基态发生 BEC 的原子处于相干态, 即有  $b_1|\beta_1\rangle_g = \sqrt{N_1}e^{-i\theta}|\beta_1\rangle_g$ , 其中  $N_1$  为处于  $|\beta_1\rangle_g$  态的平均原子数.  $|0\rangle_2$ ,  $|0\rangle_3$  和  $|\alpha, \xi\rangle$  分别表示初始时刻原子的两激发态为真空态而光场处于压缩相干态:  $|\alpha, \xi\rangle = D(\alpha)S(\xi)|0\rangle$ , 其中  $D(\alpha) = \exp(\alpha a^\dagger - \alpha^* a)$ ,  $S(\xi) = \exp[\frac{1}{2}(\xi^* a^2 - \xi a^{2\dagger})]$ ,  $\alpha = \sqrt{n}e^{i\eta}$ ,  $\xi = re^{i\phi}$ ,  $n$  和  $r$  分别表示初始光场的平均光子数和光场的初始压缩因子. 为简便计算, 不妨取  $\theta = 0$ ,  $\eta = 0$ ,  $\phi = 0$ . 由 (15) 式可得

$$\begin{aligned} Q_1(t) = & \frac{1}{4} [-\gamma(t)^2 \sinh r \cosh r - \gamma(t)^{*2} \sinh r \cosh r \\ & + 2|\gamma(t)|^2 \sinh^2 r], \end{aligned} \quad (17)$$

$$Q_2(t) = \frac{1}{4} [-\gamma(t)^2 \sinh r \cosh r - \gamma(t)^*{}^2 \sinh r \cosh r - 2|\gamma(t)|^2 \sinh^2 r]. \quad (18)$$

由于  $Q_1(t)$  和  $Q_2(t)$  的函数关系具有对称性, 本文只对  $Q_1(t)$  进行数值分析, 所得结果如图 1—3.

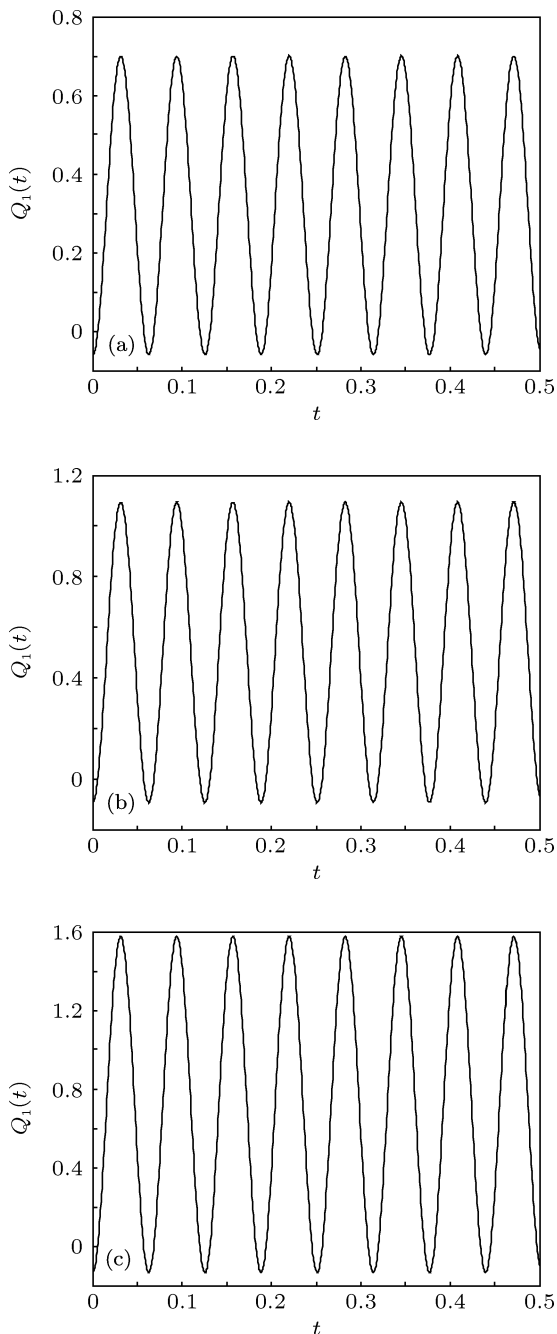


图 1  $Q_1(t)$  的时间演化曲线 ( $N_1 = 1000, \omega = 50, u_0 = 20, E_2 = 50.1, r = 0.8$ ) (a)  $\varepsilon = 0.8$ ; (b)  $\varepsilon = 1.0$ ; (c)  $\varepsilon = 1.2$

由图 1—3 可知, 光场的两正交分量的涨落均被周期性压缩, 其最大压缩深度由光场与原子间的相互作用强度  $\varepsilon$  和光场初始压缩因子  $r$  决定, 而压缩时间与光场的圆频率有关. 由图 1 可以看出, 当

保持光场圆频率  $\omega$  和光场初始压缩因子  $r$  不变时, 光场的最大压缩深度随光场与原子间的相互作用强度  $\varepsilon$  的增大而增大, 而压缩时间不变. 由图 2 可以看出, 当保持光场圆频率  $\omega$  和光场与原子间的相互作用强度  $\varepsilon$  不变时, 光场的最大压缩深度随光场初始压缩因子  $r$  的增大而增大, 而压缩时间不变. 由图 3 可以看出, 当保持光场与原子间的相互作用强度  $\varepsilon$  和光场初始压缩因子  $r$  不变时, 光场的压缩时间随光场圆频率  $\omega$  的增大而减少, 压缩次数增加, 而最大压缩深度总保持不变, 约为  $-0.1$ .

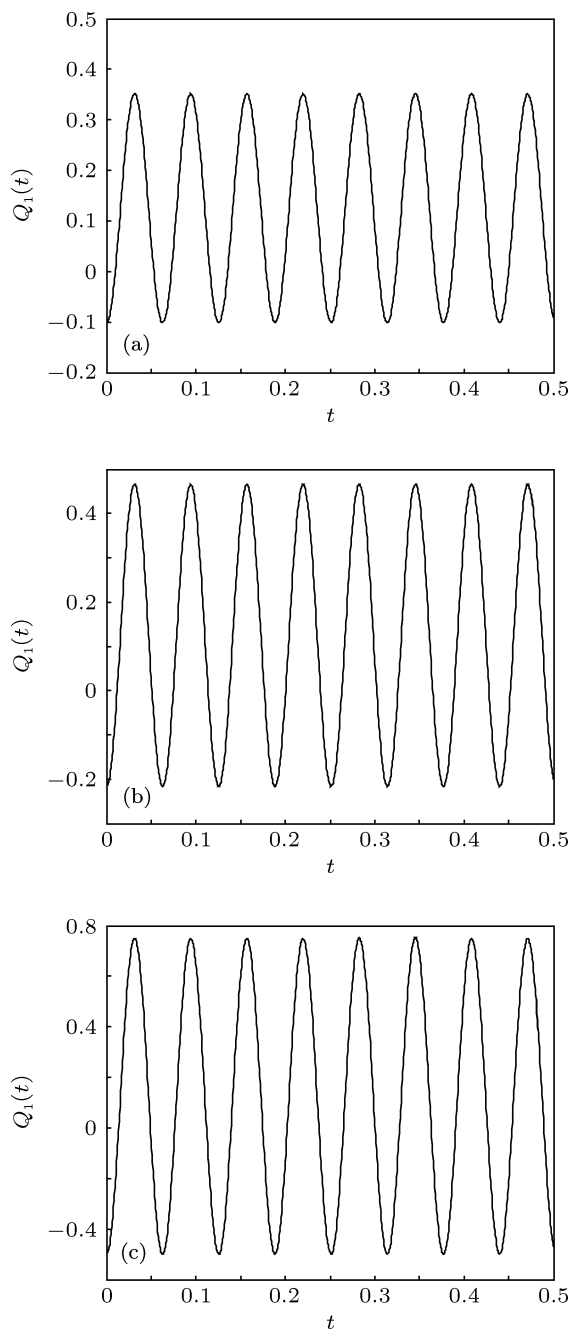


图 2  $Q_1(t)$  的时间演化曲线 ( $N_1 = 1000, \omega = 50, u_0 = 20, E_2 = 50.1, \varepsilon = 0.5$ ) (a)  $r = 1$ ; (b)  $r = 1.2$ ; (c)  $r = 1.5$

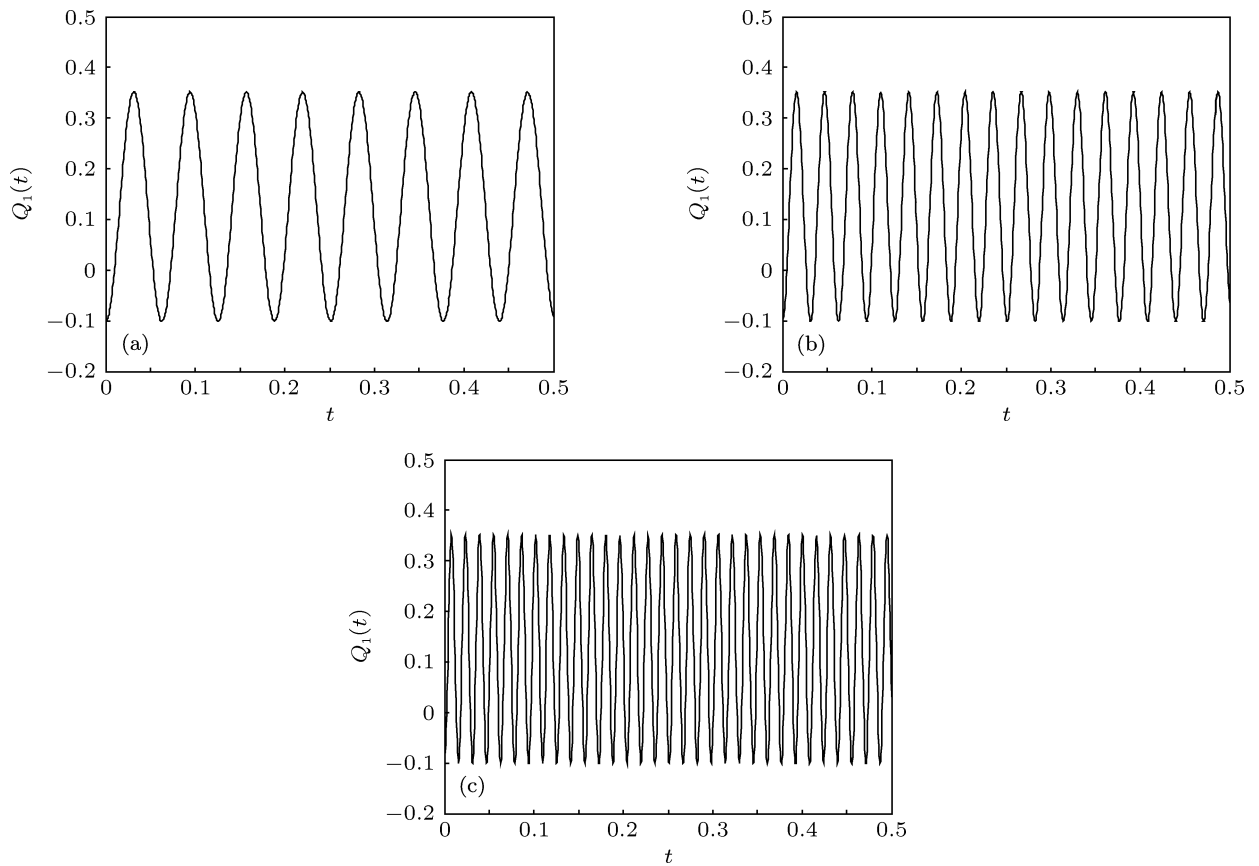


图3  $Q_1(t)$  的时间演化曲线 ( $N_1 = 1000, u_0 = 20, E_2 = \omega + 0.1, \varepsilon = 0.5, r = 1$ ) (a)  $\omega = 50$ ; (b)  $\omega = 100$ ; (c)  $\omega = 200$

## 4 结论

本文利用格子液体方法,对文献中给出的  $\Xi$  型三能级原子玻色-爱因斯坦凝聚体与单模压缩相干态光场相互作用系统的哈密顿量进行了改进,并且

研究了  $\Xi$  型三能级原子单模光场系统中的光场压缩性质. 结果表明: 光场两正交分量交替呈现周期性压缩,其最大压缩深度与光场与原子间的相互作用强度  $\varepsilon$  和光场初始压缩因子  $r$  有关且成正比,而压缩时间只与光场的圆频率  $\omega$  有关且成反比.

- [1] Anderson M H, Ensher J R, Matthews M R, Wieman C E 1995 *Science* **269** 198
- [2] Davis K B, Mewes M O, Andrews M R, Druten N J, Durfee D S, Kurn D M, Ketterle W 1995 *Phys. Rev. Lett.* **75** 3969
- [3] Fried D G, Killian T C, Willmann L, Landhuis D, Moss S C, Kleppner D, Greytak T J 1998 *Phys. Rev. Lett.* **81** 3811
- [4] Mewes M O, Andrews M R, Kurn D M, Durfee D S, Townsend C G, Ketterle W 1997 *Phys. Rev. Lett.* **78** 582
- [5] Anderson B P, Kasevich M A 1998 *Science* **282** 1686
- [6] Hagley E W, Deng L, Kozuma M, Wen J, Helmerson K, Rolston S L, Phillips W D 1999 *Science* **283** 1706
- [7] Kuang L M, Ouyang Z W 2000 *Phys. Rev. A* **61** 023604
- [8] You L, Lewenstein M, Cooper J 1995 *Phys. Rev. A* **51** 4712
- [9] Sun C P, Zhan H, Miao Y X, Li J M 1998 *Commun. Theor. Phys.* **29** 161
- [10] Jing H, Chen J L, Ge M L 2001 *Phys. Rev. A* **63** 15601
- [11] Zhou M, Huang C J 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 2514 (in Chinese) [周明, 黄春佳 2002 物理学报 **51** 2514]
- [12] Zhou M, Fang J Y, Huang C J 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 1916 (in Chinese) [周明, 方家元, 黄春佳 2003 物理学报 **52** 1916]
- [13] Zhou M, Huang C J 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 54 (in Chinese) [周明, 黄春佳 2004 物理学报 **53** 54]
- [14] Zhang J M, Liu W M, Zhou D L 2008 *Phys. Rev. A* **77** 033620
- [15] Li Z G, Fei S M, Wang Z D, Liu W M 2009 *Phys. Rev. A* **79** 024303
- [16] Li Z G, Fei S M, Albeverio S, Liu W M 2009 *Phys. Rev. A* **80** 034301
- [17] Li Z G, Zhao M J, Fei S M, Liu W M 2010 *Phys. Rev. A* **81** 042312
- [18] Li M 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 063201 (in Chinese) [李明 2011 物理学报 **60** 063201]
- [19] Li M, Tang T, Chen D H 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 073203 (in Chinese) [李明, 唐涛, 陈鼎汉 2011 物理学报 **60** 073203]
- [20] Zhou M, Huang C J 2009 *Acta Opt. Sin.* **29** 1096 (in Chinese) [周明, 黄春佳 2009 光学学报 **29** 1096]
- [21] Ni G J, Chen S Q 2000 *Advanced Quantum Mechanics* (Shanghai: Fudan University Press) p372 (in Chinese) [倪光炯, 陈苏卿 2000 高等量子力学 (上海: 复旦大学出版社) 第 372 页]
- [22] Li M, Sun J X 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 2702 (in Chinese) [李明, 孙久勋 2006 物理学报 **55** 2702]
- [23] Peng J S, Li G X 1996 *Introduction of Modern Quantum Optics* (Beijing: Science Press) p185 (in Chinese) [彭金生, 李高翔 1996 近代量子光学导论 (北京: 科学出版社) 第 185 页]

# Influence of $\Xi$ -type three-level atomic Bose-Einstein condensate on the squeezing properties of light field\*

Li Ming<sup>1)†</sup> Chen Ding-Han<sup>1)</sup> Chen Cui-Ling<sup>2)‡</sup>

1) ( College of Science, Guilin University of Technology, Guilin 541004, China )

2) ( College of Mathematics Science, Guangxi Normal University, Guilin 541004, China )

( Received 6 February 2013; revised manuscript received 4 May 2013 )

## Abstract

The Hamiltonian operator of a system of  $\Xi$ -type three-level atomic Bose-Einstein condensate interacting with single-mode squeezed coherent light field is improved in terms of the lattice-liquid model, and the squeezing properties of light field in this system are studied. The results show that two quadrature components of light can be squeezed periodically. The maximum depth of squeezing is determined by the interaction intensity between light field and atoms and the initial squeezing factor of light, and squeezing period is correlated with the frequency of the light field.

**Keywords:** Bose-Einstein condensate,  $\Xi$ -type three-level atoms, squeezed coherent state, single-mode squeezed field

**PACS:** 32.80.Qk, 42.50.-p

**DOI:** 10.7498/aps.62.183201

---

\* Project supported by the Foundation for Key Program of Ministry of Education of China (Grant No. 209094) and Scientific Research Fund of Guangxi Provincial Education Department of China (Grant No. 200103YB058).

† Corresponding author. E-mail: liming928@163.com

‡ Corresponding author. E-mail: mathchen@163.com