

统一非对称光波导横向耦合模理论分析*

裴丽[†] 赵瑞峰

(北京交通大学光波技术研究所, 全光网与现代通信网教育部重点实验室, 北京 100044)

(2013年3月26日收到; 2013年6月6日收到修改稿)

光波导横向耦合模理论包含正交耦合模理论和非正交耦合模理论两大类, 为了追求形式上的完美, 两类理论没有统一的解析解, 并且都没有对非匹配耦合系统中耦合功率的非对称性进行深入研究. 本文一方面由 Helmholtz 方程出发推导出了一种新型的非正交耦合模方程, 并对两类理论中的耦合模方程进行了统一处理和求解, 得到了一种统一的解析解; 另一方面根据所得到的统一的解析解对非匹配耦合系统中耦合功率的非对称性进行了详细研究, 计算结果表明非匹配耦合系统中的最大互耦合功率和最小自耦合功率均可用统一的解析解进行近似计算.

关键词: 光波导, 耦合模理论, 耦合器, 最大耦合功率

PACS: 42.79.Gn, 42.81.Qb, 42.82.Et

DOI: 10.7498/aps.62.184213

1 引言

光波导耦合模理论是一种研究光波导中不同传输模式之间能量相互耦合的解析理论, 是对光波导中多种电磁波传播规律的近似而又直观的描述, 包括在同一波导中因随机非均匀扰动引起的引导模式、辐射模式和泄露模式之间的耦合^[1], 在同一波导中因纵向周期性扰动引起的同向模式之间或反向模式之间的耦合^[2], 以及分别在两个或多个相距较近的平行波导中的模式之间的耦合^[3]. 在许多应用中, 光波导耦合模理论可用于光波导的初期设计阶段, 与各种数值计算方法(例如: 模拟电磁波传输的有限差分方法方法和束传播方法, 计算光波导传输模式的有限元方法)相结合后可完成光波导的精确设计. 用于研究平行波导之间能量耦合的光波导耦合模理论被称为光波导横向耦合模理论^[4], 与其他光波导耦合模理论一样, 光波导横向耦合模理论也是一种近似理论. 由不同的方法和假设条件得到的光波导横向耦合模方程可分为两大类: 正交耦合模方程和非正交耦合模方程^[5]. 两者相比, 非正交耦合模方程更加准确, 但在耦合较弱时, 两者相差不大.

现有的光波导横向耦合模理论未对非匹配波导系统中耦合功率的非对称性进行深入研究, 而且仅分别对正交耦合模方程和非正交耦合模方程进行了单独求解. 为此, 本文提出了一种统一非对称光波导横向耦合模理论, 一方面给出了两类耦合模方程的统一解, 另一方面对非匹配波导系统中耦合功率的非对称性进行了较深入的研究. 本文的主要内容包括: 在第3节对现有的两种正交耦合模方程分别进行了补充和修正; 在第4节推导并提出了一种新型非正交耦合模方程, 并将其与变分法非正交耦合模方程做比较, 证明了这种新型非正交耦合模方程的正确性; 在第5节给出了一种正交耦合模方程和非正交耦合模方程的统一求解方法, 并给出了解析解结果; 在第6节对两个非匹配的平行光波导之间的耦合功率的非对称性进行了详细分析, 并与模式匹配原理进行了对比.

2 双平行波导模型

图1所示为一种纵向均匀的阶跃型双波导系统的截面图, 该系统包含两个芯子区域 S_a , S_b 和一个包层区域 S_c . 折射率分别为 n_a , n_b , n_c . 在这个双波导系统中包含了两个平行介质波导: 以 S_a , S_c 区

* 国家自然科学基金(批准号: 61275076, 61177069)资助的课题.

[†] 通讯作者. E-mail: lpei@bjtu.edu.cn

域构成的 a 波导和以 S_b, S_c 区域构成的 b 波导. 图 2 所示的平面光波导定向耦合器是具有正常模式 (normal mode) 解的最简单的双波导系统, 其中折射率为 n_c 的区域构成的整体可认为是 S_c 区域. 在双波导系统中, 如果只存在 a 波导, 则有功率归一化的模场 $e_a(x, y)$ 和 $h_a(x, y)$ 存在, 如果只存在 b 波导, 则有功率归一化的模场 $e_b(x, y)$ 和 $h_b(x, y)$ 存在, 即 e_a, h_a, e_b, h_b 满足下列 Maxwell 方程及波动方程:

$$\nabla \times \mathbf{h}_i = j\omega\epsilon_i \mathbf{e}_i, \quad (1)$$

$$\nabla \times \mathbf{e}_i = -j\omega\mu_0 \mathbf{h}_i, \quad (2)$$

$$\nabla_T^2 \mathbf{e}_i + (\omega^2 \mu_0 \epsilon_i - \beta_i^2) \mathbf{e}_i = 0, \quad (3)$$

其中 $i = a, b$ 表示 a 波导或 b 波导, β_i 为传输常数, ϵ_i 为介电常数, 其表达式为:

$$\epsilon_i(x, y) = \begin{cases} n_i^2 \epsilon_0 & (x, y) \in S_i \\ n_c^2 \epsilon_0 & (x, y) \notin S_i \end{cases}. \quad (4)$$

双波导系统中的电磁波被假设为 a 波导和 b 波导中功率归一化的模场的线性叠加:

$$\begin{cases} \mathbf{E}(x, y, z) = \mathbf{E}_a(x, y, z) + \mathbf{E}_b(x, y, z) \\ \quad = A_a(z) \mathbf{e}_a(x, y) + A_b(z) \mathbf{e}_b(x, y) \\ \mathbf{H}(x, y, z) = \mathbf{H}_a(x, y, z) + \mathbf{H}_b(x, y, z) \\ \quad = A_a(z) \mathbf{h}_a(x, y) + A_b(z) \mathbf{h}_b(x, y) \end{cases}, \quad (5)$$

其中 $A_a(z)$ 和 $A_b(z)$ 包含了模场振幅沿传输方向的变化.

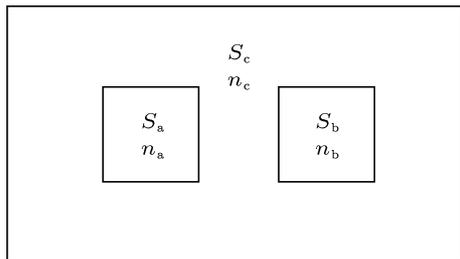


图 1 双平行波导截面图

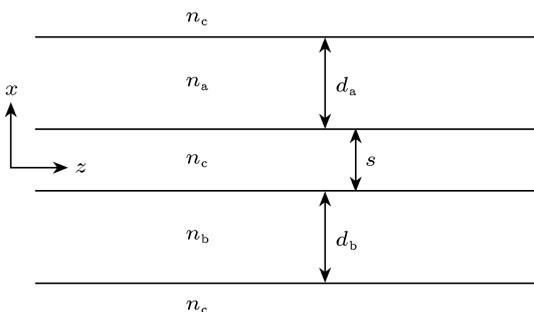


图 2 平面光波导定向耦合器示意图

模场功率是由电场和磁场共同决定的, 但在弱导光波导中, 模场功率可以只用电场的积分求得, 且有下列式成立:

$$\frac{\beta_i}{2\omega\mu_0} \iint_S |\mathbf{e}_i|^2 ds \cong \frac{1}{2} \iint_S (\mathbf{e}_i \times \mathbf{h}_i^*) \cdot \hat{\mathbf{z}} ds = 1, \quad (6)$$

其中 S 表示整个横截面, $\hat{\mathbf{z}}$ 表示 z 方向上的单位向量. 另外, 模式之间的交叉功率满足:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4} \iint_S (\mathbf{e}_j \times \mathbf{h}_i^* + \mathbf{e}_i^* \times \mathbf{h}_j) \cdot \hat{\mathbf{z}} ds \\ & \cong \frac{\beta_i + \beta_j}{4\omega\mu_0} \iint_S \mathbf{e}_j \mathbf{e}_i^* ds. \end{aligned} \quad (7)$$

光波导耦合模理论适用于弱导光波导, 所以以上两式适用于耦合模方程的推导, 特别地, 对于 TE 模式, 以上两式中的“ \cong ”可以换为“ $=$ ”.

3 对正交耦合模方程的补充和修正

正交耦合模方程中隐含 $(\mathbf{e}_a, \mathbf{h}_a)$ 正交于 $(\mathbf{e}_b, \mathbf{h}_b)$ 的假设, 其一般表达式为

$$\frac{d}{dz} \begin{bmatrix} A_a(z) \\ A_b(z) \end{bmatrix} = -j \begin{bmatrix} \beta_a + M_a & K_{ab} \\ K_{ba} & \beta_b + M_b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_a(z) \\ A_b(z) \end{bmatrix}, \quad (8)$$

其中, M_a, M_b 为自耦合系数, K_{ab}, K_{ba} 为互耦合系数. 作者参阅的相关理论分析文献中, 存在的主要不足如下: 一是利用微扰极化电流法推导出的正交耦合模方程中只包含了互耦合系数, 而不包含自耦合系数; 二是在利用微扰电极化强度法推导正交耦合模方程的过程中引入了错误的微扰电极化强度项. 本节对这两个问题分别进行了补充和修正, 得到了相同的正交耦合模方程.

3.1 微扰极化电流正交耦合模方程

当两个波导同时存在时, 并考虑到两个模场是相对独立的, $\mathbf{E}_i, \mathbf{H}_i$ 必须满足下列方程:

$$\nabla \times \mathbf{H}_i = j\omega\epsilon \mathbf{E}_i = j\omega\epsilon_i \mathbf{E}_i + j\omega(\epsilon - \epsilon_i) \mathbf{E}_i, \quad (9)$$

其中 ϵ 为实际双波导系统的介电常数. 将 (9) 式与 (1) 式比较后, 可发现 (9) 式右侧的第二项是多余项, 该项是由介质极化引起的, 具有电流的量纲, 被称为微扰极化电流, 且被认为是对独立波导模场 $\mathbf{E}_i (\mathbf{H}_i)$ 的微扰源. 有些文献只考虑了模场 $\mathbf{E}_a (\mathbf{H}_a)$ 产生的微扰极化电流 $j\omega(\epsilon - \epsilon_a) \mathbf{E}_a$ 对模场 $\mathbf{E}_b (\mathbf{H}_b)$

的影响. 而没有考虑对自身模场的影响. 将微扰极化电流的表达式变为

$$\mathbf{J}' = j\omega(\varepsilon - \varepsilon_a)\mathbf{E}_a + j\omega(\varepsilon - \varepsilon_b)\mathbf{E}_b, \quad (10)$$

并按照文献 [4] 的推导方法, 可以得到正交耦合模方程的自耦合系数和互耦合系数为

$$\begin{bmatrix} M_a & K_{ab} \\ M_b & K_{ba} \end{bmatrix} = \frac{\omega\varepsilon_0}{4} \times \begin{bmatrix} \iint_{S_b} (n_b^2 - n_c^2) |e_a|^2 ds & \iint_{S_a} (n_a^2 - n_c^2) e_b e_a^* ds \\ \iint_{S_a} (n_a^2 - n_c^2) |e_b|^2 ds & \iint_{S_b} (n_b^2 - n_c^2) e_a e_b^* ds \end{bmatrix}. \quad (11)$$

3.2 微扰极化强度正交耦合模方程

根据线性各向同性介质的本构关系, 如果只有一个波导存在, 则电场强度 \mathbf{E} 与电极化强度 \mathbf{P} 的关系为

$$\mathbf{P}_i = (\varepsilon_i - \varepsilon_0)\mathbf{E}_i. \quad (12)$$

当两个波导同时存在时, 并考虑到两个模场是相对独立的, \mathbf{E} 与 \mathbf{P} 的关系变为

$$\mathbf{P}_i = (\varepsilon - \varepsilon_0)\mathbf{E}_i = (\varepsilon_i - \varepsilon_0)\mathbf{E}_i + (\varepsilon - \varepsilon_i)\mathbf{E}_i. \quad (13)$$

将 (12), (13) 两式做比较, 可发现 (12) 式的第二项是多余项, 类似于微扰极化电流法, 微扰电极化强度的定义为

$$\mathbf{P}' = (\varepsilon - \varepsilon_a)\mathbf{E}_a + (\varepsilon - \varepsilon_b)\mathbf{E}_b. \quad (14)$$

有些文献在推导 M_a 和 K_{ab} 的过程中, 认为 $\mathbf{P}' = (\varepsilon - \varepsilon_a)(\mathbf{E}_a + \mathbf{E}_b)$, 在推导 M_b 和 K_{ba} 的过程中, 认为 $\mathbf{P}' = (\varepsilon - \varepsilon_b)(\mathbf{E}_a + \mathbf{E}_b)$. 这显然是错误的. 修正之后, 按照文献 [7] 的推导过程可得到与 (11) 式相同的结果.

4 新型非正交耦合模方程

非正交耦合模方程中 $(\mathbf{e}_a, \mathbf{h}_a)$ 和 $(\mathbf{e}_b, \mathbf{h}_b)$ 是非正交的, 其一般表达形式为 [5]

$$\begin{bmatrix} 1 & X_{ab} \\ X_{ba} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dA_a/dz \\ dA_b/dz \end{bmatrix} = -j \begin{bmatrix} \beta_a + \bar{M}_a & \bar{K}_{ab} \\ \bar{K}_{ba} & \beta_b + \bar{M}_b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_a \\ A_b \end{bmatrix}, \quad (15)$$

其中 X_{ab}, X_{ba} 为交叉功率系数, 并且 $\bar{K}_{ab}, \bar{K}_{ba}$ 的表达式中包含交叉功率系数, 正交耦合模方程是非正交耦合模方程在交叉功率系数等于 0 时的特殊情形. 本节以电磁波 Helmholtz 方程为基础, 推导出了—种新型的非正交耦合模方程, 并将其与传统的由变分法得到的非正交耦合模方程进行了对比研究.

4.1 新型非正交耦合模方程的推导

设双波导系统中传输的电磁波满足下列 Helmholtz 方程:

$$\nabla^2 \mathbf{E} + \omega^2 \mu_0 \varepsilon \mathbf{E} = 0. \quad (16)$$

将 (5) 式代入 (16) 式, 并考虑到 (3) 式, 可得:

$$\begin{aligned} & (2\beta_a^2 + \omega^2 \mu_0 (\varepsilon - \varepsilon_a)) A_a e_a \\ & + (2\beta_b^2 + \omega^2 \mu_0 (\varepsilon - \varepsilon_b)) A_b e_b \\ & = \left[-\frac{d^2 |A_a|}{dz^2} \exp(j\phi_a) \exp(-j\beta_a z) + 2j\beta_a \frac{dA_a}{dz} \right] e_a \\ & + \left[-\frac{d^2 |A_b|}{dz^2} \exp(j\phi_b) \exp(-j\beta_b z) + 2j\beta_b \frac{dA_b}{dz} \right] e_b, \end{aligned} \quad (17)$$

其中, $\nabla_T^2 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$, $A_i(z) = |A_i(z)| \times \exp(j\phi_i) \exp(-j\beta_i z)$. (17) 式中包含了二阶导数项, 但因为已设 A_a, A_b 对 z 是缓慢变化的, 所以可以略去二阶导数项, (17) 式可以近似为

$$\begin{aligned} & j\beta_a \frac{dA_a}{dz} e_a + j\beta_b \frac{dA_b}{dz} e_b \\ & = \left(\beta_a^2 + \frac{1}{2} \omega^2 \mu_0 (\varepsilon - \varepsilon_a) \right) A_a e_a \\ & + \left(\beta_b^2 + \frac{1}{2} \omega^2 \mu_0 (\varepsilon - \varepsilon_b) \right) A_b e_b. \end{aligned} \quad (18)$$

将 (18) 式两边同乘以 e_a^* , 然后在 (x, y) 平面上积分, 并将两边同除以 $2\omega\mu_0$, 得到:

$$\begin{aligned} & \frac{\beta_a}{2\omega\mu_0} \iint_S |e_a|^2 ds \frac{dA_a}{dz} \\ & + \frac{\beta_b}{2\omega\mu_0} \iint_S e_a^* e_b ds \frac{dA_b}{dz} \\ & = \left[-j\beta_a \frac{\beta_a}{2\omega\mu_0} \iint_S |e_a|^2 ds \right. \\ & - j \frac{\omega\varepsilon_0}{4} \iint_{S_b} (n_b^2 - n_c^2) |e_a|^2 ds \left. \right] A_a \\ & + \left[-j\beta_b \frac{\beta_b}{2\omega\mu_0} \iint_S e_a^* e_b ds \right. \\ & \left. - j \frac{\omega\varepsilon_0}{4} \iint_{S_a} (n_a^2 - n_c^2) e_a^* e_b ds \right] A_b. \end{aligned} \quad (19)$$

考虑到 (6) 式, 并与非正交耦合模方程的一般表达式做比较, 可得由 (19) 式确定的非正交耦合模方程的各系数分别为

$$X_{ab} = \frac{\beta_b}{2\omega\mu_0} \iint_S e_a^* e_b ds, \quad \bar{M}_a = M_a, \quad \bar{K}_{ab} = \beta_b X_{ab} + K_{ab}. \quad (20)$$

类似地, 可以得到:

$$X_{ba} = \frac{\beta_a}{2\omega\mu_0} \iint_S e_b^* e_a ds, \quad \bar{M}_b = M_b, \quad \bar{K}_{ba} = \beta_a X_{ba} + K_{ba}, \quad (21)$$

其中 M_a, K_{ab}, M_b, K_{ba} 的表达式与 (11) 式相同. (20), (21) 两式就是本文推导并提出的新型耦合模方程中各系数的表达式, 方程式中包含了功率交叉项 X_{ab} 及 X_{ba} , 属于非正交耦合模方程. 虽然新型耦合模方程的推导是从严格的 Helmholtz 方程开始的, 但由于 (5) 式的引入, 使得该方程仍属于传统的弱耦合范畴.

4.2 与变分法非正交耦合模方程的比较

由变分原理得到的非正交耦合模方程的矩阵形式为^[6]

$$\begin{bmatrix} P_{aa} & P_{ab} \\ P_{ba} & P_{bb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dA_a/dz \\ dA_b/dz \end{bmatrix} = -j \begin{bmatrix} H_{aa} & H_{ab} \\ H_{ba} & H_{bb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_a \\ A_b \end{bmatrix}, \quad (22)$$

其中

$$P_{ij} = \frac{1}{4} \iint_S (e_j \times h_i^* + e_i^* \times h_j) \cdot \hat{z} ds \quad (i, j = a, b),$$

$$H_{ij} = \beta_j P_{ij} + \frac{\omega}{4} \iint_S (\varepsilon - \varepsilon_j) e_i^* e_j ds \quad (i, j = a, b).$$

根据功率归一化公式 (6) 式可得 $P_{aa} = P_{bb} = 1$, 将 (22) 式中的各系数与新型非正交耦合模方程的各系数做比较, 并结合 (7) 式和 (11) 式, 可得变分法非正交耦合模方程中与新型非正交耦合模方程中不相同的系数为

$$X_{ab} = X_{ba} = X \approx \frac{\beta_a + \beta_b}{4\omega\mu_0} \iint_S e_a e_b^* ds. \quad (23)$$

因此, 本文提出的新型非正交耦合模方程与传统的变分法非正交耦合模方程的最大区别在于交叉功率系数的不同, 同时 \bar{K}_{ab} 和 \bar{K}_{ba} 的表达式中也包含了交叉功率系数, 它们在两种方程中也是不同的, 而 \bar{M}_a, \bar{M}_b 在两种方程中是相同的. 特别地, 当两个波导同步时, 即当 $\beta_a = \beta_b$ 时, 两种方程的各个系数

的差异将是微小的, 由 (6) 式和 (7) 式可以看出, 这种微小的不同是可以忽略的. 也就是说, 当两个波导同步时, 新型非正交耦合模方程与传统的变分法非正交耦合模方程是相同的, 从而证明新型非正交耦合模方程具有一定的准确性. 在实际应用中, β_a 与 β_b 之间的差异也是微小的, 否则两个波导之间会因为失谐而无能量耦合, 这进一步说明了两种方程中交叉功率系数的差异是微小的.

5 耦合模方程的统一求解

正交耦合模方程和非正交耦合模方程的一般表达式都包含了两个相互耦合的常微分方程, 可以用统一的方法进行求解. 将 (20) 式和 (21) 式中关于 $\bar{M}_a, \bar{M}_b, \bar{K}_{ab}, \bar{K}_{ba}$ 的表达式代入 (15) 式可得到与正交耦合模方程一般表达式 (8) 式相同形式的表达式:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dz} \begin{bmatrix} A_a \\ A_b \end{bmatrix} \\ &= -j \begin{bmatrix} 1 & X_{ab} \\ X_{ba} & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \beta_a + \bar{M}_a & \bar{K}_{ab} \\ \bar{K}_{ba} & \beta_b + \bar{M}_b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_a \\ A_b \end{bmatrix} \\ &= -j \begin{bmatrix} \beta_a + M'_a & K'_{ab} \\ K'_{ba} & \beta_b + M'_b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_a \\ A_b \end{bmatrix}, \quad (24) \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} M'_a &= \frac{M_a - K_{ba} X_{ab}}{1 - X_{ab} X_{ba}}, \\ K'_{ab} &= \frac{K_{ab} - X_{ab} M_b}{1 - X_{ab} X_{ba}}, \\ M'_b &= \frac{M_b - K_{ab} X_{ba}}{1 - X_{ab} X_{ba}}, \\ K'_{ba} &= \frac{K_{ba} - X_{ba} M_a}{1 - X_{ab} X_{ba}}. \end{aligned}$$

特别地, 在变分法非正交耦合模方程中满足 $X_{ab} = X_{ba} = X$, (24) 式已经包含了这种特殊情形. 下面的推导虽然针对 (24) 式, 但也适用于 (8) 式, 只需将对应的耦合系数替换即可. 令

$$A_i(z) = \hat{A}_i(z) \exp\left(-j \frac{\beta_a + M'_a + \beta_b + M'_b}{2} z\right),$$

将上式代入 (24) 式可得:

$$\frac{d}{dz} \begin{bmatrix} \hat{A}_a \\ \hat{A}_b \end{bmatrix} = -j \begin{bmatrix} -\delta & K'_{ab} \\ K'_{ba} & \delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{A}_a \\ \hat{A}_b \end{bmatrix}, \quad (25)$$

其中 $2\delta = \beta_b + M'_b - \beta_a - M'_a$, (25) 式的解为 [7]

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \hat{A}_a \\ \hat{A}_b \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos(\sigma z) + j\frac{\delta}{\sigma} \sin(\sigma z) & -j\frac{K'_{ab}}{\sigma} \sin(\sigma z) \\ -j\frac{K'_{ba}}{\sigma} \sin(\sigma z) & \cos(\sigma z) + j\frac{\delta}{\sigma} \sin(\sigma z) \end{bmatrix} \\ & \times \begin{bmatrix} \hat{A}_a(0) \\ \hat{A}_b(0) \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (26)$$

其中 $\sigma = (\delta^2 + K'_{ab}K'_{ba})^{1/2}$. 值得注意的是, 上式包含了在两个波导失配时 $K'_{ab} \neq K'_{ba}$ 的情况, 而没有将两者合并.

6 非对称耦合功率分析

假设在输入端只有波导 a 的模式被激发, 即 $\hat{A}_a(0) = 1, \hat{A}_b(0) = 0$, 由 (26) 式可得两个波导中的传输功率分别为

$$P_{aa}(z) = \frac{1}{\gamma_a} \left[\cos^2(\sigma z) + \frac{\delta^2}{\sigma^2} \sin^2(\sigma z) \right], \quad (27)$$

$$P_{ba}(z) = \frac{1}{\gamma_a} \frac{K'^2_{ba}}{\sigma^2} \sin^2(\sigma z), \quad (28)$$

$$\gamma_a = \cos^2(\sigma z) + \frac{\delta^2 + K'^2_{ba}}{\sigma^2} \sin^2(\sigma z), \quad (29)$$

其中 γ_a 的引入是为了在概念上满足能量守恒定律, 即 $P_{aa}(z) + P_{ba}(z) \equiv 1$, 如果只有波导 b 的模式被激发, 可以得到与 (27)—(29) 式类似的公式. 为了计算的方便, 可以认为 $\sigma z = \pi/2$ 时达到最大耦合功率, 即耦合长度取 $L = \pi/(2\sigma)$. 在奇数倍的耦合长度处, 可以得到最小自耦合功率和最大互耦合功率分别为

$$P_{aa}(L) = \frac{\delta^2}{\delta^2 + K'^2_{ba}}, \quad P_{bb}(L) = \frac{\delta^2}{\delta^2 + K'^2_{ab}}, \quad (30)$$

$$P_{ba}(L) = \frac{K'^2_{ba}}{\delta^2 + K'^2_{ba}}, \quad P_{ab}(L) = \frac{K'^2_{ab}}{\delta^2 + K'^2_{ab}}. \quad (31)$$

因为在两波导失配情况下 $K'^2_{ba} \neq K'^2_{ab}$, 所以从波导 a 到波导 b 的最大互耦合功率 $P_{ba}(L)$ 不等于从波导 b 到波导 a 的最大互耦合功率 $P_{ab}(L)$, 波导 a 的最小自耦合功率 $P_{aa}(L)$ 也不等于波导 b 的最小自耦合功率 $P_{bb}(L)$.

另一方面, 如文献 [5] 所述, 耦合长度和耦合功率也可由模式匹配原理精确计算得到. 数值计算的

结果表明, 由各种耦合模方程得到的耦合长度和由模式匹配原理得到的耦合长度基本相同, 可以认为两者相等. 由模式匹配原理得到的耦合功率为

$$P'_{ii} = (\langle i|e\rangle\langle e|i\rangle - \langle i|o\rangle\langle o|i\rangle)^2, \quad (32)$$

$$P'_{ij} = (\langle i|e\rangle\langle e|j\rangle + \langle i|o\rangle\langle o|j\rangle)^2, \quad (33)$$

其中 P'_{ii} 表示最小自耦合功率, P'_{ij} ($i, j = a, b$ 且 $i \neq j$) 表示最大互耦合功率, $\langle \cdot | \cdot \rangle$ 表示不同模式之间的交叠积分, e 和 o 分别表示类对称模式和类反对称模式. 因为 $\langle \cdot | \cdot \rangle$ 中的两个模式满足交换律, 所以有 $P'_{ba}(L) = P'_{ab}(L)$, 即利用模场匹配原理得到的精确的最大互耦合功率是相等的. 图 3 显示了由耦合模方程得到的图 2 中的平板波导的最大互耦合功率随 n_b 的变化曲线, 计算中的各参数分别取 $n_a = 3.5, n_c = 3.2, d_a = d_b = 1 \mu\text{m}, s = 0.4 \mu\text{m}$, 波长取 $1.5 \mu\text{m}$, 图中的精确解是指由模式匹配原理得到的最大互耦合功率. 当 $n_a = n_b$ 时, $P_{ba}(L) = P_{ab}(L)$, 而由图可得, 随着 n_b 的减小, 两者之间的相对差异逐渐增大, 且 $P_{ba}(L) < P_{ab}(L)$, 这主要是由 K'^2_{ba} 与 K'^2_{ab} 之间的相对差异逐渐增大造成的. 值得注意的是, 由正交耦合模方程和非正交耦合模方程得到的耦合功率相差不大, 可以认为图 3 及后文图形中给出的曲线是所有这些方程的曲线.

由图 3 还可以看出, 最大互耦合功率的精确解位于 $P_{ba}(L)$ 和 $P_{ab}(L)$ 之间, 这启发我们可以用 $P_{ba}(L)$ 和 $P_{ab}(L)$ 的平均数来近似精确解, 图 4 给出了在 n_a 和 n_b 的差异较大时, $P_{ba}(L)$ 和 $P_{ab}(L)$ 的几何平均数或算术平均数的变化曲线, 可以看出这两种平均数都与精确解比较接近, 但算术平均数的接近程度更高.

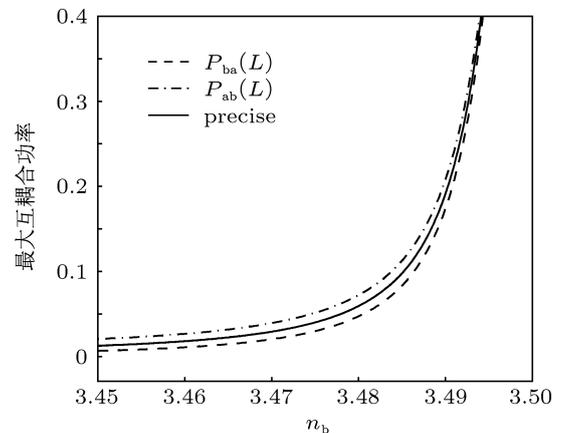


图 3 非对称最大互耦合功率随 b 波导折射率的变化

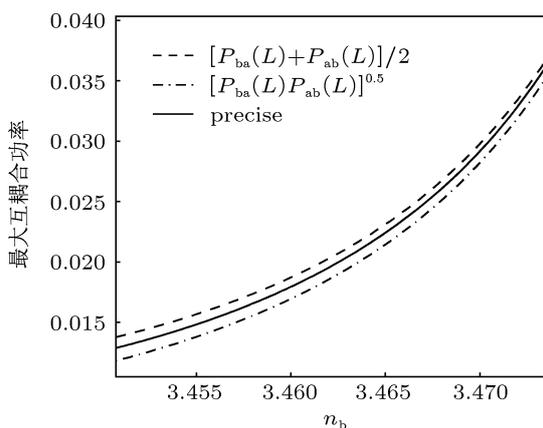


图4 非对称最大互耦合功率的几何平均数和算术平均数(虚线)

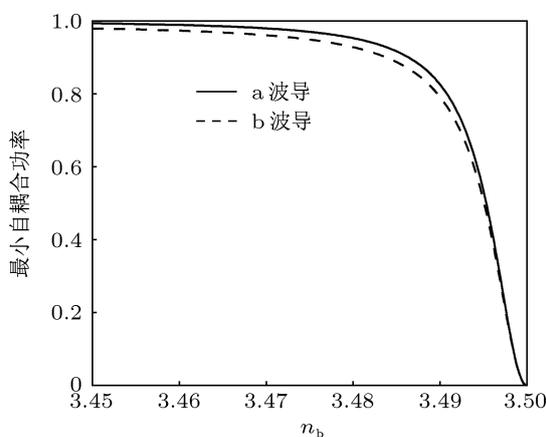


图5 非对称最小自耦合功率随b波导折射率的变化

幸运的是,由模式匹配原理得到的最小自耦合功率也是非对称的,即 $P'_{aa}(L) \neq P'_{bb}(L)$. 如图5所示,当两波导失配较大时 ($n_b < 3.495$),两波导自耦合系数的差异已比较明显. 定义由两种方法得到的自耦合系数的相对差异为

$$E_r = \frac{2(P'_{ii} - P'_{jj})}{P'_{ii} + P'_{jj}}. \quad (34)$$

图6给出了 E_r 随 n_b 的变化曲线,可以看出,当两波导失配较大时 ($n_b < 3.49$), E_r 不超过 1%,且 a 波导

的 E_r 要显著小于 b 波导的 E_r ,因此由耦合模方程的统一解得到的最小自耦合系数的准确性是可以接受的.

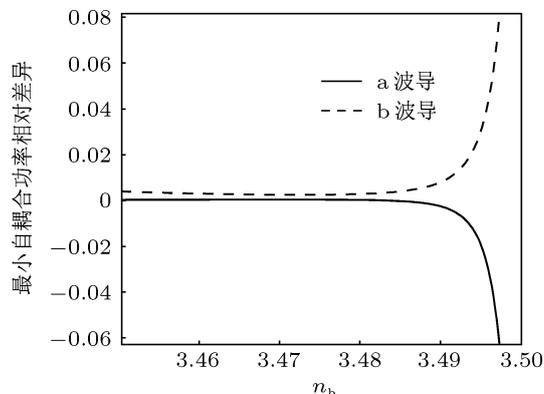


图6 最小自耦合功率与精确值的相对差异随b波导折射率的变化

7 结论

本文提出了一种统一的非对称光波导横向耦合模理论. 在统一性方面: 给出了正交耦合模方程和非正交耦合模方程的一般表达形式; 分别补充和修正了两种正交耦合模方程, 且使其符合一般表达形式; 推导出了—种新型非正交耦合模方程, 通过将其与传统的变分法正交耦合模方程相比较证明了其正确性; 将两类耦合模方程进行了统一处理和求解, 得到了一种统一的解析解. 在非对称性方面: 发现由耦合模方程的统一解析解得到的最小自耦合功率和最大互耦合功率均具有非对称性; 由模式匹配原理得到的精确的最小自耦合功率具有非对称性, 而由其得到的精确的最大互耦合功率具有对称性; 精确的最大互耦合功率可用由耦合模方程的统一解析解得到的两个最大互耦合功率的几何平均数或算术平均数近似, 在两个波导失配较严重时两个精确的最小自耦合功率可分别用由耦合模方程的统一解析解得到的两个最小自耦合功率近似.

[1] Skorobogatiy M, Johnson S G, Jacobs S A, Fink Y 2003 *Phys. Rev. E* **67** 046613
 [2] Erdogan T 1997 *J. Lightwave Technol.* **15** 1277
 [3] Cheo P K, Liu A, King G G 2001 *Photon. Technol. Lett. IEEE* **13** 439
 [4] Wu C Q 2005 *Theory of Optical Waveguides* (Beijing: Tsinghua University Press) p196 (in Chinese) [吴重庆 2005 光波导理论(北京:清华大学出版社)第196页]

[5] Huang W P 1994 *J. Opt. Soc. Am. A* **11** 963
 [6] Haus H, Huang W P, Kawakami S, Whitaker N 1987 *J. Lightwave Technol.* **5** 16
 [7] Ma C S, Liu S Y 2007 *Mode Theory of Optical Waveguides* (Changchun: Jilin University Press) p305 (in Chinese) [马春生, 刘式庸 2007 光波导模式理论(长春:吉林大学出版社)第305页]

Analysis of unified unsymmetric lateral coupled-mode theory of optical waveguide*

Pei Li[†] Zhao Rui-Feng

(Key Laboratory of All Optical Network and Advanced Telecommunication Network, Ministry of Education, Institute of Lightwave Technology, Beijing Jiaotong University, Beijing 100044, China)

(Received 26 March 2013; revised manuscript received 6 June 2013)

Abstract

Lateral coupled-mode theory of optical waveguide includes orthogonal coupled-mode theory and nonorthogonal coupled-mode theory. However, the two kinds of coupled-mode theories do not have unified analytical solutions. And they both do not deal with the asymmetric coupling power of unmatched-coupled waveguides deeply. On the one hand, a new kind of nonorthogonal coupled-mode equation is derived from the Helmholtz wave equation in this paper. And both of the orthogonal coupled-mode equations and the nonorthogonal coupled-mode equations are processed and solved uniformly. As a result, a unified solution is obtained. On the other hand, the asymmetric coupling power of unmatched-coupled waveguides is studied in detail, based on the obtained solution. The calculated results show that both of the maximum mutual-coupling power and the minimum self-coupling power can be approximated by the unified solution.

Keywords: optical waveguide, coupled-mode theory, coupler, maximum coupling power

PACS: 42.79.Gn, 42.81.Qb, 42.82.Et

DOI: 10.7498/aps.62.184213

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 61275076, 61177069).

[†] Corresponding author. E-mail: lipei@bjtu.edu.cn