

周期外力对频率涨落的过阻尼谐振子所作的 功和能量随机共振*

张良英 曹力 吴大进†

(湖北文理学院物理与电子工程学院, 襄阳 441053)

(2013年4月25日收到; 2013年6月25日收到修改稿)

研究了周期外力对频率涨落的过阻尼谐振子系统做功的特点. 结果揭示了瞬时功率随时间的周期变化出现不对称性. 研究结果还揭示周期外力一个周期对系统所做的功随乘法噪声强度的变化出现非单调行为, 系统是否出现能量随机共振与抑制并存, 由乘法噪声与加法噪声之间互关联的符号决定.

关键词: 过阻尼谐振子, 频率涨落, 周期外力做功, 能量随机共振与抑制

PACS: 05.40.-a, 05.45.-a, 05.10.Gg

DOI: 10.7498/aps.62.190502

1 引言

在随机共振现象的研究中, 一个十分引人注目的共同研究对象是噪声驱动的谐振子. 它是自然界各种现象的最简单的基础模型, 从而也成为各类基本概念的理论典范. 从历史看, 布朗谐振子的噪声驱动力学早在半个多世纪前就由 Chandrasekhar 运用朗之万方程和福克-普朗克方程进行了研究^[1], 之后 Chandrasekhar 模型和它的各式各样变形在如今的文献中常常见到^[2,3]. 例如, 具有涨落频率的谐振子已成为包括物理学、生物学和化学等诸多学科领域的研究对象^[4]. 近年来, 谐振子随机共振的研究有三个方面的进展: 1) 线性谐振子的频率涨落引起的随机共振^[5]; 2) 线性谐振子的阻尼系数涨落引起的随机共振^[6]; 3) 过阻尼线性谐振子的随机共振^[7].

以往的随机共振研究是从随机动力学的角度, 利用信噪比, 驻留时间分布或周期响应的振幅等随噪声强度变化的非单调行为来表征随机共振. 本世纪初, Iwai 等提出用外部周期力所作的功来刻画双稳系统的随机共振^[8]. 在随机动力学系统中引入热力学的基本概念内能、做功和传热, 最先由

Sekimomt 提出^[9,10]. 林敏等在文献^[9,10]的基础上, 提出了以能量为核心的能量随机共振及控制方法^[11,12], 并在一定近似条件下, 解析地研究了双稳系统随机共振的能量输入机理^[13]. 随后随机热力学研究取得不少进展, 主要是揭示热力学量涨落的规律^[14-18].

以往外力做功的研究只针对加法噪声的朗之万系统, 本文对既有加法噪声又有乘法噪声且二者互关联的朗之万系统进行周期外力做功的研究, 以期获得周期外力对这类随机非线性朗之万系统做功的瞬时功率的精确解析表达式.

2 模型——两互关联噪声和周期外力驱动的过阻尼谐振子

阻尼谐振子的运动方程为

$$\ddot{x} = -\gamma\dot{x} - \bar{\omega}^2 x, \quad (1)$$

其中 γ 是系统的阻尼系数, 在过阻尼情况, 可忽略惯性项 \ddot{x} , 方程 (1) 降为一阶常微分方程. 下面考虑两方面涨落的影响, 并引入相应的噪声: 一方面引入加法高斯白噪声 $\xi(t)$ 反映振子受环境涨落的影响; 另一方面引入乘法高斯白噪声 $\eta(t)$ ^[19] 反映振

* 国家自然科学基金(批准号: 11045004)资助的课题.

† 通讯作者. E-mail: dajinwu@public.wh.hb.cn

子频率受环境涨落的影响. 两噪声 $\xi(t)$ 和 $\eta(t)$ 来自同一噪声源, 故相互关联^[20,21]. 两互关联噪声和周期外力驱动过的阻尼谐振子的无量纲随机动力学方程为

$$\dot{x} = -(\omega^2 + \eta(t))x + \xi(t) + A \cos \Omega t, \quad (2)$$

其中

$$\begin{aligned} \langle \eta(t) \rangle &= \langle \xi(t) \rangle = 0, \\ \langle \eta(t)\eta(t') \rangle &= 2Q\delta(t-t'), \\ \langle \xi(t)\xi(t') \rangle &= 2D\delta(t-t'), \\ \langle \eta(t)\xi(t') \rangle &= \langle \xi(t)\eta(t') \rangle \\ &= 2\lambda\sqrt{DQ}\delta(t-t'), \end{aligned}$$

式中, D, Q 分别为 $\xi(t)$ 和 $\eta(t)$ 的强度, λ 为两噪声的关联系数, 其取值范围为 $-1 \leq \lambda \leq 1$. 物理上, $\lambda < 0$ 和 $\lambda > 0$ 的图像有很大的差别. 定性看, $\xi(t)$ 和 $\eta(t)$ 正关联 ($\lambda > 0$), 表示当一个噪声取某一正实现时, 另一噪声取正实现的概率较大. 而 $\xi(t)$ 和 $\eta(t)$ 负关联 ($\lambda < 0$), 则意味着当一个噪声取某一正实现时, 另一噪声取负实现的概率较大. 关联系数 λ 是上述特点和程度定量的描述^[22].

必须指出, 由于朗之万方程 (2) 出现乘法白噪声项, 故必须对它进行适当的解释. 本文选取对 (2) 式作 Stratonovich 解释, 从而可运用通常的微积分进行运算. 此外, 虽说 (2) 式的确定论部份是线性的, 但方程 (2) 作为随机微分方程是非线性的, 这是因为乘法噪声项引起非线性效应, 含乘法噪声项的朗之万方程在文献中明确划为非线性随机微分方程^[23,24].

3 瞬时功率

下面计算周期外力对模型 (2) 作功的功率, 从而研究模型 (2) 的能量随机共振. 按照 Sekimomt 的随机能量方法^[9,10], 周期外力 $A \cos \Omega t$ 对过阻尼谐振子系统作功的功率 $p(t)$ 是对 $\xi(t)$ 和 $\eta(t)$ 的单一实现来定义的, 即

$$\begin{aligned} p(t) &= A \cos \Omega t \cdot \dot{x} \\ &= A \cos \Omega t \cdot (-\omega^2 + \eta(t))x \\ &\quad + \xi(t) + A \cos \Omega t, \end{aligned} \quad (3)$$

其中已经认定方程 (2) 中的 $\xi(t)$ 和 $\eta(t)$ 代表单一实现, 从而方程 (2) 成为确定性线性常微分方程, 上

式中的 x 应是这一确定性线性常微分方程在一定初始条件下的解. 记 $x(t=0) = x_0$, 则该解为

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{-\int_0^t (\omega^2 + \eta(s')) ds'} \left(x_0 + \int_0^t (\xi(s) \right. \\ &\quad \left. + A \cos \Omega s) e^{\int_0^s (\omega^2 + \eta(s')) ds'} ds \right). \end{aligned} \quad (4)$$

我们知道, 本文研究的是两互关联高斯白噪声和周期外力驱动过的阻尼谐振子系统, 其动力学方程是作为非线性随机微分方程 (2) 式, 而噪声 $\xi(t)$ 和 $\eta(t)$ 的实现是服从高斯分布的. 由于 $\xi(t)$ 和 $\eta(t)$ 的实现是随机的, 故我们观测的瞬时功率 $P(t)$ 应是 $p(t)$ 按 $\xi(t)$ 和 $\eta(t)$ 的分布所取的平均. 即 $P(t) = \langle p(t) \rangle$. 故由 (3) 式有

$$\begin{aligned} P(t) &= -\omega^2 A \cos \Omega t \langle x \rangle \\ &\quad - A \cos \Omega t \langle \eta(t) \cdot x \rangle + A^2 \cos^2 \Omega t. \end{aligned} \quad (5)$$

把解 (4) 代入 (5) 式, 利用公式^[25]

$$\begin{aligned} \langle \eta(t)\xi(s) e^{\int_t^s \eta(s') ds'} \rangle \\ = \lambda \sqrt{DQ} (\delta(t-s) + 2Q) e^{-\frac{Q}{2}(s-t)}, \end{aligned}$$

经过冗长的运算, 得到瞬时功率的精确表达式

$$P(t) = h_1(t) + h_2(t) + h_3(t) + h_4(t), \quad (6)$$

其中

$$\begin{aligned} h_1(t) &= \left(\frac{A\omega^2(\omega^2 + Q)}{(\omega^2 + Q)^2 + \Omega^2} - \frac{\omega^2 \lambda \sqrt{QD}}{(\omega^2 + Q)} \right) \\ &\quad \times e^{-(\omega^2 + Q)t} A \cos \Omega t \\ &\quad + \frac{4AQ\lambda \sqrt{QD}}{(\omega^2 - Q/2)} e^{-(\omega^2 - Q/2)t} A \cos \Omega t, \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} h_2(t) &= \left(1 + \frac{\omega^2}{\omega^2 + Q} + \frac{4Q}{\omega^2 - Q/2} \right) \\ &\quad \times \lambda \sqrt{QD} A \cos \Omega t, \end{aligned} \quad (8)$$

$$h_3(t) = -\frac{\Omega \omega^2}{(\omega^2 + Q)^2 + \Omega^2} A^2 \cos \Omega t \sin \Omega t, \quad (9)$$

$$\begin{aligned} h_4(t) &= \left(1 - \frac{\omega^2(\omega^2 + Q)}{(\omega^2 + Q)^2 + \Omega^2} - \lambda \sqrt{QD}/4 \right) \\ &\quad \times A^2 \cos^2 \Omega t. \end{aligned} \quad (10)$$

从精确表达式 (6) 式看出, 周期外力 $A \cos \Omega t$ 对谐振子作功的功率由四个部分组成: 第一部分 $h_1(t)$ 为两个衰减项, 分别以时标 $(\omega^2 + Q)$ 和 $(\omega^2 - Q/2)$ 随时间衰减. 其中, $\omega^2 > Q/2$, 因为 $\omega^2 < Q/2$ 系统不稳定. 第二部分 $h_2(t)$ 以频率 Ω 和外力同步振动, 这一部分与 $\lambda \sqrt{QD}$ 成正比, 且 $\lambda = 0$ 时为零. 第三

部分 $h_3(t)$ 以倍频 2Ω 作正弦振动, 这一部分与 λ 和 D 无关. 第四部分 $h_4(t)$ 以 2Ω 作偏置的周期振动.

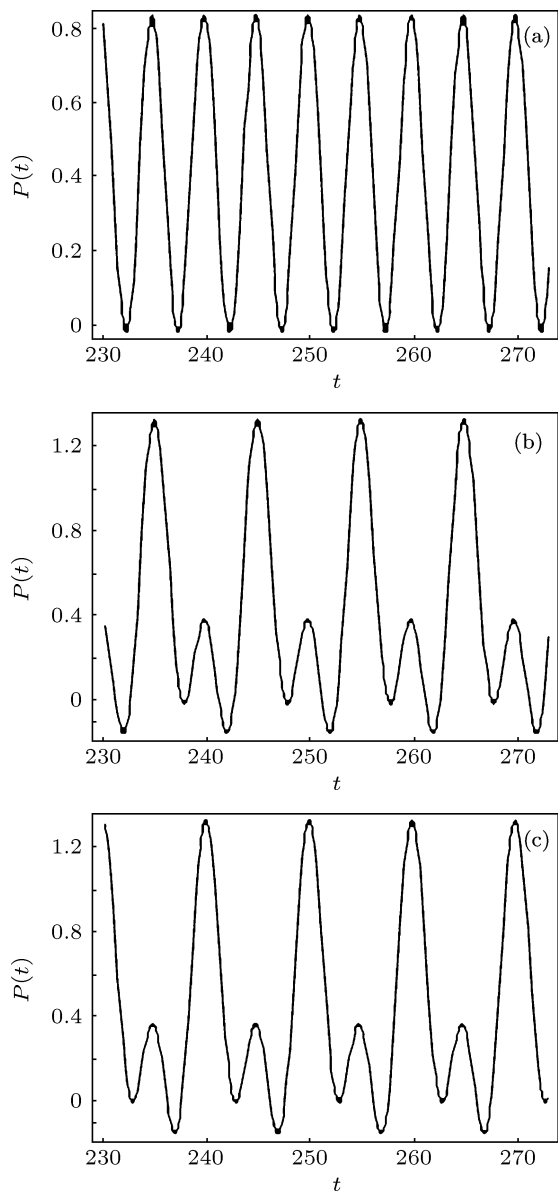


图1 功率 $P(t)$ 随时间变化的曲线 (参数值: $A = 1, T = 10, \omega = 0.5, Q = 0.2, D = 0.6$) (a) $\lambda = 0$; (b) $\lambda = -0.2$; (c) $\lambda = 0.2$

第一部分将随时间衰减而趋于零. 这时功率 $P(t)$ 由后面三个部分组成, 作以 Ω 为周期的振动. 图1显示它是如何受到噪声互关联 λ 的控制的. 图1(a)为 $\lambda = 0$ 时的 $P(t)-t$ 曲线, 功率随时间作对称的周期变化. 图1(b)为 $\lambda = -0.2$ 时的 $P(t)-t$ 曲线, 功率随时间作不对称的周期变化. 图1(c)为 $\lambda = 0.2$ 时的 $P(t)-t$ 曲线, 功率也随时间作不对称的周期变化, 但相位相对于 $\lambda = -0.2$ 的有所移动. 图1(b)和(c)的物理意义是: 噪声的互关联导致相邻峰值一升高一降低, 而相邻谷值也一升高一降低并降到更大的负值, 从而外部周期力对系统做功出现大的负

功率, 表示系统在加法噪声和乘法噪声关联在一起之后, 释放能量转化为传热到环境.

4 能量随机共振

在 t 充分大的渐近情况下, 周期外力在一个驱动周期 $(2\pi/\Omega)$ 所做的功 W 就由 $h_4(t)$, 即含 $A^2 \cos^2 \Omega t$ 的项决定. 其他项对 W 的贡献为零. 即

$$W = \int_t^{t+2\pi/\Omega} P(t) dt = \frac{\pi A^2}{\Omega} \left(1 - \frac{\omega^2(\omega^2 + Q)}{(\omega^2 + Q)^2 + \Omega^2} - \lambda \sqrt{QD}/4 \right). \quad (11)$$

由于 $A^2 \cos^2 \Omega t$ 项的系数包含了加法噪声、周期外力和随机非线性三个因素的相互作用, 从而使 W 随着乘法噪声强度的变化出现复杂的非单调行为. 图2画出了噪声关联强度 λ 取值 $-1, -0.9$ 及 -0.8 时的 $W-Q$ 曲线. 显示在负 λ 条件下, 存在能量随机共振和抑制并存的现象. 共振峰随 $|\lambda|$ 的增大而变高, 抑制谷则变浅. 图3绘出了 λ 分别取值 $-1, 0, +1$ 时的 $W-Q$ 曲线. 曲线显示在 $\lambda < 0$ 的参数区存在能

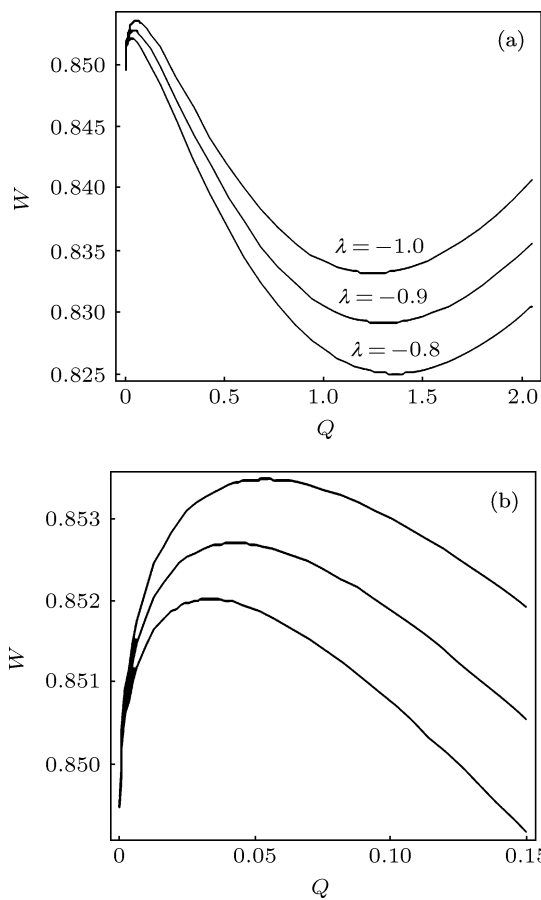


图2 周期外力一个周期对系统所做的功 W 随频率噪声的强度 Q 变化的曲线 (b) 是 (a) 图峰值附近曲线的放大 (参数值: $A = 1, T = 2, \omega = 1.15, D = 0.02$)

量随机共振和抑制并存的现象. 随着 λ 由 -1 逐渐增大到零, 共振峰变低最后消失, $\lambda = 0$ 时只存在抑制. 进入 $\lambda > 0$ 的参数区, $W-Q$ 曲线呈单调下降.

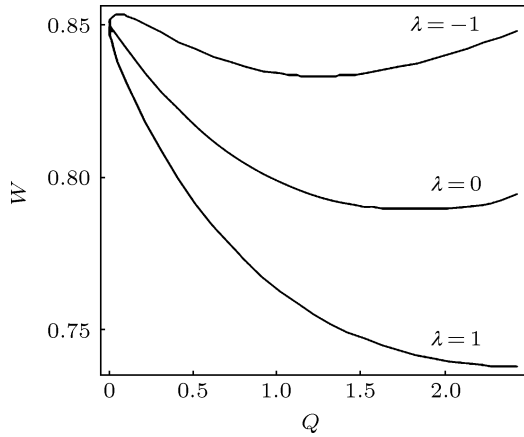


图3 周期外力一个周期对系统所做的功 W 随频率噪声的强度 Q 变化的曲线 (参数值: $A = 1, T = 2, \omega = 1.15, D = 0.02$)

5 结论

数学上, 我们利用描述本文模型的非线性随机微分方程可以精确求解的特点, 在物理上参照

Sekimomt 提出的随机能量方法, 对具有频率涨落的过阻尼谐振子系统, 求得了周期外力对系统做功的瞬时功率的精确表达式. 据此, 我们分析了周期外力对该系统做功的特点. 同时, 根据渐近情况下周期外力在一个驱动周期 $\left(\frac{2\pi}{\Omega}\right)$ 所做的功 W 的表达式, 揭示了该系统存在随机能量共振和抑制.

本文侧重研究频率涨落 (表现为乘法噪声 $\eta(t)$) 和速度涨落 (表现为加法噪声 $\xi(t)$) 之间的关联对周期外力做功的影响. 得到如下结论:

1. 噪声间的互关联 ($\lambda \neq 0$) 使瞬时功率的时间演化出现不对称性, 物理上表现为负功率区变宽变深, 说明系统在两噪声相互关联的影响下, 更快和更多地将能量转化为热释放到环境.

2. 要出现能量随机共振和抑制并存, λ 必须小于零. 说明在 W 表达式所包含的加法噪声、周期外力和随机非线性三个因素中, 加法噪声和随机非线性 (由频率涨落引起) 相互作用的性质决定了系统是否存在随机能量共振和抑制并存.

3. $\lambda = 0$ 时共振峰消失, 只存在抑制. $\lambda > 0$ 则 $W-Q$ 曲线呈单调下降.

- [1] Chandrasekhar 1943 *Rev. Mod. Phys.* **15** 1
- [2] Liu L, Zhang L Y, Cao L 2009 *Chin Phys. B* **18** 4182
- [3] Chen D Y, Wang Z L 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 111 (in Chinese) [陈德彝, 王忠龙 2010 物理学报 **59** 111]
- [4] Liu L, Wu D J 2009 *College Physics* **16** 28 (in Chinese) [刘立, 吴大进 2009 大学物理 **16** 28]
- [5] Gitterman M 2003 *Phys. Rev. E* **67** 057103
- [6] Gitterman M 2004 *Phys. Rev. E* **69** 041101
- [7] Zhang L, Liu L, Cao L 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 1494 (in Chinese) [张莉, 刘立, 曹力 2010 物理学报 **59** 1494]
- [8] Iwai T 2001 *Physica A* **300** 350
- [9] Sekimomt K 1997 *J. Phys. Soc. Jpn.* **66** 1234
- [10] Sekimomt K 1998 *Prog. Theor. Phys. Suppl.* **130** 17
- [11] Lin M, Zhang M L 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 020501 (in Chinese) [林敏, 张美丽 2011 物理学报 **60** 020501]
- [12] Lin M, Zhang M L, Huang Y M 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 080509 (in Chinese) [林敏, 张美丽, 黄咏梅 2011 物理学报 **60** 080509]
- [13] Lin M, Huang Y M 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 220205 (in Chinese) [林敏, 黄咏梅 2012 物理学报 **61** 220205]
- [14] Seifert U 2008 *Eur. Phys. J. B* **64** 423
- [15] Seifert U 2005 *Phys. Rev. Lett.* **95** 040602
- [16] Sekimomt K 2007 *Phys. Rev. E* **76** 060103(R)
- [17] Horowitz J M 2012 *Phys. Rev. E* **85** 031110
- [18] Esposito M 2012 *Phys. Rev. E* **85** 041125
- [19] Jin Y F, Hu H Y 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 2895 (in Chinese) [靳艳飞, 胡海岩 2009 物理学报 **58** 2895]
- [20] Zhang L, Cao L 2010 *Chin. Phys. Lett.* **27** 060504
- [21] Cao L, Wu D J 2007 *Int. J. Mod. Phys. B* **21** 1721
- [22] Goodman J W 1995 *Statistical Optics* (New York: Wiley-Interscience Publication)
- [23] Arnold L 1974 *Stochastic Differential Equations: Theory and Applications* (New York: Wiley-Interscience Publication)
- [24] Risken H 1984 *The Fokker-Planck Equation* (Berlin: Springer-Verlag)
- [25] Cao L, Wu D J 2007 *Physica A* **376** 191

Work done by a periodical external force on an overdamped harmonic oscillator with frequency fluctuation and energetic stochastic resonance*

Zhang Liang-Ying Cao Li Wu Da-Jin[†]

(School of Physics and Electronic Engineering, Xiangfan University, Xiangyang 441053, China)

(Received 25 April 2013; revised manuscript received 25 June 2013)

Abstract

Characterization of the work done by a periodic external force on an overdamped harmonic oscillator with frequency fluctuation is studied. Results indicate that the instantaneous power with periodic variations of time shows asymmetry. It is also revealed that the work done by a periodic external force on the system in one period with the variation of multiplicative noise intensity exhibits non-monotonic behavior. Whether the system shows the coexistence of energetic stochastic resonance and suppression or not is determined by the sign of the correlation coefficient between the multiplicative noise and the additive noise.

Keywords: overdamped harmonic oscillator, frequency fluctuation, work done by a periodical external force, energetic stochastic resonance and suppression

PACS: 05.40.-a, 05.45.-a, 05.10.Gg

DOI: 10.7498/aps.62.190502

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No.11045004).

[†] Corresponding author. E-mail: dajinwu@public.wh.hb.cn