

# 基于量子粒子群算法的混沌系统参数辨识

张宏立 宋莉莉<sup>†</sup>

(新疆大学电气工程学院, 乌鲁木齐 830047)

(2013年5月8日收到; 2013年6月11日收到修改稿)

针对混沌系统参数辨识问题, 在基本群智能算法粒子群优化算法的基础上, 提出量子粒子群算法, 测试函数证明了算法具有良好的全局优化能力. 进而将其应用于混沌系统参数辨识问题, 将参数辨识问题转化为多维函数空间上的优化问题. 通过对平衡板热对流典型混沌系统 Lorenz 系统进行研究, 并与基本算法和遗传算法比较. 仿真实验证明, 算法的有效性, 对混沌理论的发展有着非常重要的意义.

**关键词:** 量子粒子群算法, 混沌系统, 系统辨识

**PACS:** 05.45.Gg, 98.62.Tc

**DOI:** 10.7498/aps.62.190508

## 1 引言

混沌系统是一个非线性的确定性系统, 在各种不同领域的学科中, 混沌现象时常出现, 如通信、生物医学、管理、金融等领域<sup>[1]</sup>. 根据观测到的数据确定混沌系统模型的阶次, 这样可以更好的理解和掌握复杂的真实的世界.

在多数情况下, 模型参数的估计是基于时间序列同步可观测的状态和相应的模型输出进行的, 在大多数的这些方法中, 像反馈、自适应控制和最优跟踪都是使同步误差最小化原则. 实现对混沌系统的同步控制, 许多学者提出了很多有效的方法, 如模糊控制<sup>[2]</sup>, 状态反馈控制<sup>[3]</sup>, 主动控制<sup>[4]</sup>, 变结构控制<sup>[5]</sup>. 但是, 由于混沌系统的复杂性, 当参数未知时, 上述方法很难实现同步控制. 因此, 估计混沌系统的未知参数具有非常重要的意义. 近几年, 许多学者提出了混沌辨识的方法, 文献<sup>[6]</sup>提出基于 Lyapunov 稳定性理论的辨识方法, 文献<sup>[7]</sup>提出动态神经网络辨识混沌系统的方法. 文献<sup>[8]</sup>提出自适应辨识法辨识不确定混沌系统参数. 文献<sup>[9]</sup>提出混合差分进化的混沌系统参数估计方法. 文献<sup>[10]</sup>提出利用遗传算法进行混沌系统参数估计的方法.

粒子群优化算法 (particle swarm optimization,

PSO)<sup>[11]</sup> 为一种优化计算技术, 源于对鸟群觅食行为的研究. 由于该算法原理简单, 容易实现, 操作算子少等优点, 已广泛应用于各个领域, 如组合优化、控制器设计、电力系统、系统辨识等领域. 但是, 针对该算法收敛速度慢、搜索精度低等不足, 提出基于量子粒子群算法 (quantum particle swarm optimization, QPSO), 通过对典型基准测试函数仿真研究, 结果证明了算法的有效性, 并将其应用于混沌系统参数辨识中. 以典型混沌系统 Lorenz 系统进行仿真研究, 将混沌系统参数辨识问题转化多维空间参数优化问题, 并与基本 PSO 算法和 GA 算法比较, 仿真表明, 量子粒子群算法可以有效的辨识混沌系统.

## 2 量子粒子群算法

### 2.1 基本粒子群算法

粒子群算法将每个个体比作为无体积、无质量的“粒子”, 每个“粒子”代表着一个潜在的解. 粒子的好坏由一个事先设定好的适应度函数来评价, 在每次迭代过程中, 粒子通过跟踪两个极值“个体极值  $p_i$ ”、“全局最优  $p_g$ ”. 在这种搜索过程中, 粒子根据以下公式更新速度、位置:

$$v_i(t+1) = wv_i(t) + c_1r_1(p_i(t) - x_i(t))$$

<sup>†</sup> 通讯作者. E-mail: 734388126@qq.com

$$+ c_2 r_2 (p_g(t) - x_i(t)), \quad (1)$$

$$x_i(t+1) = x_i(t) + v_i(t+1), \quad (2)$$

其中,  $v_i(t)$ ,  $x_i(t)$  分别表示粒子  $i$  在第  $t$  代的速度和位置;  $w$  称为惯性权重;  $c_1$  表示认知系数;  $c_2$  表示社会系数;  $r_1, r_2$  为服从均匀分布的随机数; 个体历史最优位置  $p_i(t)$  表示粒子  $i$  在前  $t$  代搜索到的最优位置. 其更新规则为

$$p_i(t) = \begin{cases} p_i(t-1), & f(p_i(t)) > f(p_i(t-1)), \\ x_i(t), & \text{其他.} \end{cases} \quad (3)$$

群体历史最佳位置为

$$p_g(t) = \arg \min \{f(p_i(t)) | i = 1, 2, \dots, n\}. \quad (4)$$

在基本 PSO 算法中, 粒子的收敛是以轨道的形式实现的. 由于粒子速度的局限性, 粒子在搜索过程中, 搜索的空间是有限的, 所以基本 PSO 算法已在理论上被证明, 不能以概率 1 搜索到全局最优解 [12].

## 2.2 量子粒子群算法

量子粒子群算法 [13] 是从量子力学的角度出发而被提出. 量子空间中的粒子满足聚集态的性质, 粒子的聚集性是通过粒子运动中心的束缚态来描述, 而这种束缚态是由存在于粒子中的某种吸引势来产生的. 束缚态中的粒子能以一定的概率密度出现在量子空间任意一点. 在量子粒子群算法模型中, 粒子的运动状态用波函数 [14,15]  $\psi(X, t)$  来表示:

$$|\psi|^2 dx dy dz = Q dx dy dz, \quad (5)$$

$Q$  是概率密度函数, 且满足

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi|^2 dx dy dz = \int_{-\infty}^{+\infty} Q dx dy dz = 1. \quad (6)$$

在量子力学中, 粒子的运动满足运动学 Schrödinger 方程

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(X, t) = \hat{H} \psi(X, t), \quad (7)$$

其中,  $\hbar$  为普朗克常量,  $\hat{H}$  为哈密顿算子, 其表示形式为

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(X). \quad (8)$$

上式中,  $m$  表示粒子质量;  $V(X)$  表示粒子所在的势能. 该模型称为  $\delta$  势阱模型. 量子粒子群算法就是基于  $\delta$  势阱模型被提出来的. 其数学描述

为: 假设在一个  $N$  维的目标搜索空间中, 量子粒子群算法由  $m$  个代表潜在问题解的粒子组成群体  $X(t) = \{X_1(t), X_2(t), \dots, X_m(t)\}$ , 在  $t$  时刻, 第  $i$  个粒子位置为

$$X_i(t) = \{X_{i,1}(t), X_{i,2}(t), \dots, X_{i,N}(t)\}, i = 1, 2, \dots, m.$$

粒子没有速度向量, 个体最好位置表示为:  $P_i(t) = [P_{i,1}(t), P_{i,2}(t), \dots, P_{i,N}(t)]$ , 群体的全局最好位置:  $G(t) = [G_1(t), G_2(t), \dots, G_N(t)]$ , 且  $G(t) = P_g(t)$ , 其中  $g$  为处于全局最好位置粒子的下标,  $g \in \{1, 2, \dots, m\}$ . 为了保证算法的收敛性, 每个粒子收敛于一点吸引子  $rr_i = (rr_{i,1}, rr_{i,2}, \dots, rr_{i,N})$ . 其公式为

$$rr = (r_1 \cdot P_i + r_2 \cdot P_g) / (r_1 + r_2), \quad (9)$$

式中,  $r_1$  和  $r_2$  为  $[0, 1]$  之间随机数. 通过在  $rr$  点建立一个  $\delta$  势阱来模拟粒子的学习倾向性. 这与基本粒子群算法中粒子向个体极值和全局极值学习的能力相类似.

量子粒子群算法中引入了平均最好位置 (mean best position, mbest). 它定义为所有粒子个体最好位置的平均值, 即

$$\text{mbest} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m p_i(t) = \left( \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m p_{i,1}(t), \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m p_{i,2}(t), \dots, \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m p_{i,N}(t) \right), \quad (10)$$

其中,  $m$  为种群规模.

则量子粒子群算法的进化方程为

$$x(t+1) = rr \pm \alpha |\text{mbest} - (t)| \ln \frac{1}{u}, \quad (11)$$

其中,  $u$  为  $[0, 1]$  之间随机数;  $\alpha$  为收缩 - 膨胀因子, 对参数  $\alpha$  的控制将直接影响算法的性能. 一般,  $\alpha$  取值为从 1.0 线性减小到 0.5 时, 可以达到比较好的效果, 即

$$\alpha = 1 - \frac{t}{T} \times 0.5, \quad (12)$$

其中,  $T$  为最大迭代次数;  $t$  为当前迭代次数; 与基本 PSO 算法相比, 在量子粒子群算法中, 对于聚集在  $P_g$  附近的粒子, 由于吸引子  $rr$  点是在  $P_i$  和  $P_g$  之间, 所以粒子以很大的概率在  $P_g$  附近出现. 算法操作算子更少, 简化了计算, 并且引入平均最好位置  $\text{mbest}$ , 这样使粒子间存在等待效应, 大大提高了算法的协同工作能力, 从而增强了算法的全局搜索能力.

### 3 算法性能测试

为了验证算法的有效性和可行性, 分别利用 PSO 算法、基于模拟退火算法的粒子群算法 (simulated annealing particle swarm optimization, SA-PSO) 和本文提出的量子粒子群算法对以下 2 个典型测试函数进行研究. 此时, 适配函数即为函数本身.

#### 1) Schaffer 函数

$$f(x) = 0.5 + \frac{(\sin \sqrt{x^2 + y^2})^2 - 0.5}{(1.0 + 0.001(x^2 + y^2))^2},$$

$$x \in [-100, 100],$$

$$y \in [-100, 100],$$

$$f(0, 0) = 0.$$

#### 2) RA-Rastrigin 函数

$$f(x) = x^2 + y^2 - \cos(18x) - \cos(18y),$$

$$x \in [-5, 5],$$

$$y \in [-5, 5],$$

$$f(0, 0) = -2.$$

对上述 2 个典型测试函数进行仿真测试, 算法参数设置为: QPSO 算法、SA-PSO 算法、基本 PSO 算法的群体规模均为  $m = 30$ , 迭代次数均为  $\text{max iter} = 200$ , 种群维数均为  $d = 2$ .

QPSO 算法参数设置为  $\alpha$  在  $[1, 0.5]$  之间线性递减; SA-PSO 算法设置为衰减因子  $\lambda = 0.95$ , 加速因子  $c_1 = c_2 = 2.05$ , 初始温度  $t = \text{fitness}(p_g) / \ln(2)$ ; PSO 算法的参数设置为加速因子  $c_1 = c_2 = 2$ , 惯性权重  $w$  在  $[0.9, 0.4]$  之间线性递减; 三种方法下, Schaffer 函数、RA-Rastrigin 函数的适应度值随迭代次数的变化曲线分别如图 1, 图 2 所示.

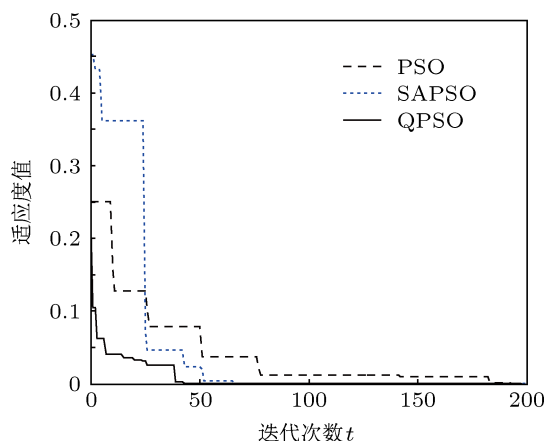


图 1 Schaffer 函数结果比较图

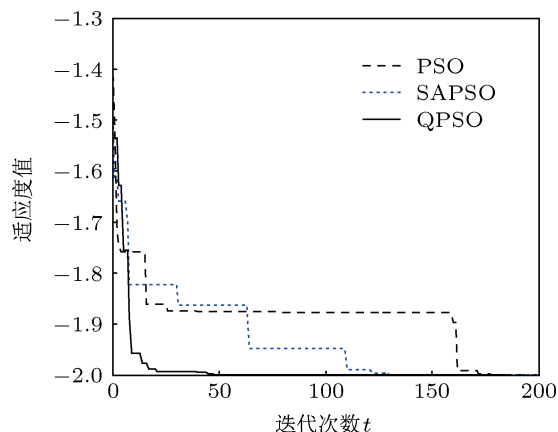


图 2 RA-Rastrigin 函数结果图

从图 1、图 2 的仿真结果可以看出, 利用 QPSO 算法、SA-PSO 算法、基本 PSO 算法对 Schaffer 和 RA-Rastrigin 函数进行寻优, 随着迭代次数的增加, QPSO 算法可以快速收敛于最优点, 所用时间短, 弥补 PSO 算法的不足, 证明了 QPSO 算法的有效性.

## 4 基于 QPSO 算法的混沌系统辨识

### 4.1 混沌系统辨识原理

考虑如下的具有  $m$  个参数  $n$  维的混沌动力学系统为

$$\dot{x} = f(x, x_0, \theta), \quad (13)$$

其中,  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in R^n$  表示一个  $n$  维的原系统状态向量;  $x_0$  表示初始向量;  $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m)^T$  表示初始参数.

当进行估计参数时, 假设被估计系统为

$$\tilde{x} = f(\tilde{x}, x_0, \tilde{\theta}), \quad (14)$$

其中,  $\tilde{x} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n)^T \in R^n$  为待估计状态向量.  $\tilde{\theta} = (\tilde{\theta}_1, \tilde{\theta}_2, \dots, \tilde{\theta}_m)^T$  为参数待估计值. 则混沌系统辨识原理图如图 3 所示:

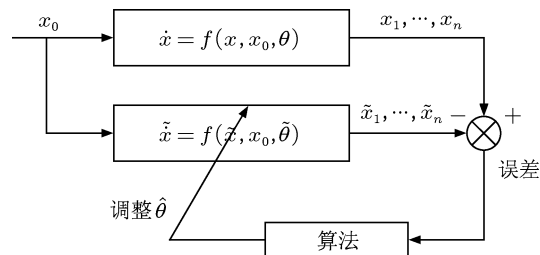


图 3 参数估计原理图

为了获得混沌系统参数的估计值  $\tilde{\theta} = (\tilde{\theta}_1, \tilde{\theta}_2, \dots, \tilde{\theta}_m)$ , 将原系统参数的输出  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  与参数系统输出  $\tilde{x} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n)$  的误差的平方和反馈到算法中, 在一个适配函数的评价下通过不断调整参数模型, 直至适配函数取最小值.

### 4.2 适配函数选取

由混沌系统辨识原理可知, 进行参数估计问题, 配置成如下所示的优化问题:

$$\min J = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m \|\dot{x}_k - \tilde{x}_k\|^2, \quad (15)$$

其中  $m$  表示用于参数估计的数据的长度,  $\dot{x}_k, \tilde{x}_k$  分别表示状态矢量原系统与待估计系统在  $k$  时刻的输出值. 明显的, 混沌系统的优化估计是一个多维的连续优化问题. 由于不稳定的混沌系统的动态行为, 参数不容易获得, 另外, 对于适配函数, 存在多个变量、多个局部最优点的问题, 传统的优化方法很容易捕获在局部最优点, 但是难以实现全局最优参数. 本文利用量子粒子群算法对典型混沌系统进行参数估计, 并与基本粒子算法与遗传算法进行比较, 从而验证了量子粒子群算法对混沌系统进行参数辨识具有很重要的意义.

### 4.3 算法实现流程

利用 QPSO 算法辨识混沌系统, 将需要辨识的一组参数比作算法中的一个粒子, 在适配函数 (15) 的评价下, 使原系统输出逼近参数模型输出. 具体流程为:

```

初始化种群中的每个粒子的位置, 并记录个体极值  $p_i$  和全局极值  $p_g$ 
for  $i = 1 : m$  (mis population size)
    计算函数适应度值  $f(x_i)$ ;
    if  $f(x_i) < f(p_i)$ , then  $p_i = x_i, p_g = \min(p_i)$ ,  $mbest = \frac{1}{m} \times \sum_{i=1}^m p_i$ 
end for
for  $j = 1 : d$  (dis population dimension)
     $r_1 = \text{rand}, r_2 = \text{rand}; u = \text{rand}; rr = r_1 \cdot P_1 + r_2 \cdot P_g / r_1 + r_2$ ; end for
    If  $\text{rand}(0, 1) > 0.5$   $x_{id}(t+1) = rr_{id}(t) - \alpha |mbest(t) - x_{id}(t)| \ln\left(\frac{1}{u}\right)$ 
    else
         $x_{id}(t+1) = rr_{id}(t) + \alpha |mbest(t) - x_{id}(t)| \ln\left(\frac{1}{u}\right)$ 
    end if
until meet the termination conditions
    
```

## 5 混沌系统仿真实验

为了验证算法的有效性, 选择典型的混沌系统

——Lorenz 系统进行参数估计. 下述系统是一个物理上的两平衡板间的热对流问题. 其表达式为

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= a(x_2 - x_1), \\ \dot{x}_2 &= bx_1 - x_2 - x_3x_1, \\ \dot{x}_3 &= x_1x_2 - cx_3, \end{aligned} \quad (16)$$

其中,  $x_1$  是正比于对流强度的量,  $x_2$  是正比于上升与下沉气流之间的温度差,  $x_3$  正比于实际温度垂直分布于线性分部的偏差.  $a$  表示与流体的普朗特准数成比例, 反应流体物性对传热的影响.  $b$  表示流体空间水平与垂直方向的特征数.  $c$  表示与流体 Rayleigh 数成比例. 这里主要研究参数  $a, b, c$  未知时的情况. 当参数  $a = 8/3, b = 10, c = 28$  时, 系统表现为混沌状态. 其演化过程为如图 4 所示.

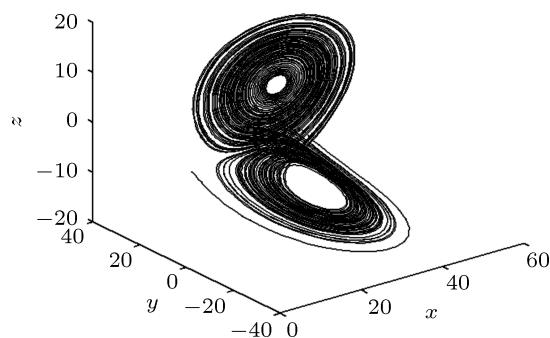


图 4 Lorenz 混沌系统动力学轨迹

利用量子粒子群算法辨识上述 Lorenz 系统, 假设  $x = (x_1, x_2, x_3)$  为可观察数据,  $\theta = (a, b, c)$  为要估计参数向量.

在仿真过程中, 参数设置为: 参数变化范围:  $a \in [0, 3], b \in [9, 12], c \in [25, 30]$ , 三种方法的迭代次数均为 30 次, 种群规模为 30. QPSO 算法设置为  $\beta$  在  $[0.5, 1]$  线性减小. PSO 算法: 加速因子  $c_1 = c_2 = 1.49445$ , 惯性权重  $w = 0.729$ , 最大速度  $v_{\max} = [2, 10, 30]$ ; GA 算法设置: 交叉概率  $p_c = 0.85$ , 变异概率  $p_m = 0.02$ , 分别利用上述三种方法对混沌系统辨识, 独立运行 20 次, 结果如表 1.

从表 1 可以看出, 利用 QPSO 算法得到的  $a, b, c$  三个参数的值的精度要比 PSO 算法和 GA 算法得到的参数的精度要高. 从运行时间上, GA 算法的运行时间最长, 占用电脑大量资源, QPSO 算法运行时间最短, 提高利用率. 三种方法下函数适配值随着迭代次数的增加, 显示过程如图 5 所示.

表 1 算法结果参数值

算法	辨识参数值			运行时间/s
	$a$	$b$	$c$	
GA	2.639	9.891	27.125	487.875
PSO	2.686	9.991	27.900	144.265
QPSO	2.667	10.003	28.000	75.828

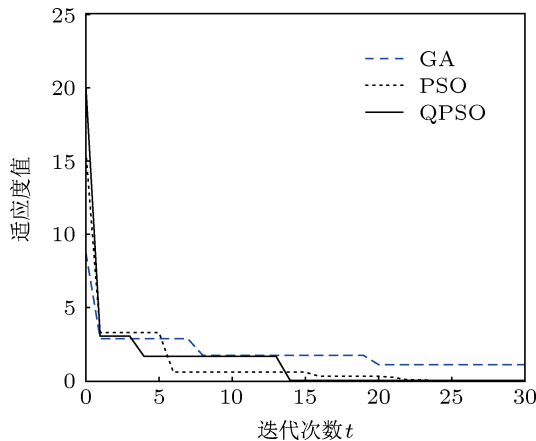


图 5 函数适应度值曲线

从图 5 可以看出,随着迭代次数的增加,GA 算法虽然很快收敛,但是陷入了一个局部极值过程,当迭代次数达到 15 代左右时,QPSO 算法已经找到最优解,而基本 PSO 算法则处于搜索过程当中,当迭代次数到达 25 左右时,PSO 算法收敛于全局极值,而此时,QPSO 算法已趋于稳定.从而也说明了 QPSO 算法的收敛速度要好于另外两种方法.为了显示三个参数的变化过程,本文给出了基本 PSO 算法和 QPSO 算法的  $a, b, c$  三个参数变化过程比较

图,此时,选取的迭代次数为 120,结果如图 6 所示.

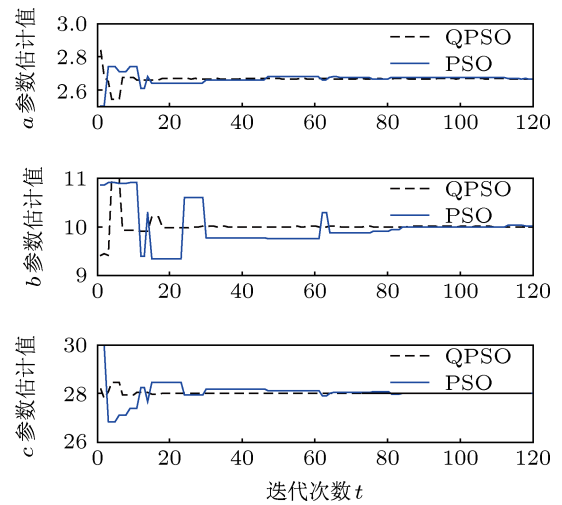


图 6 参数  $a, b, c$  比较图

从图 6 可以看出,QPSO 算法对参数  $a, b, c$  的估计值,可以在很短时间内收敛到真实值.而 PSO 算法的收敛速度要慢.从而也验证了 QPSO 算法的快速收敛性.

## 6 结论

本文在基本粒子群算法的基础上,提出量子粒子群算法对混沌系统进行参数辨识的方法,首先利用典型测试函数证明算法具有更好的全局优化能力,弥补了基本算法的不足,并以典型混沌系统 Lorenz 系统进行研究,仿真证明,该方法可以得到很好的辨识结果,对混沌控制与同步具有很重要的意义.

[1] Edward O, Celso G, James A 1990 *Phys. Rev. Lett.* **64** 1196  
 [2] Wang X Y, Meng J 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 3780 (in Chinese) [王兴元, 孟娟 2009 物理学报 **58** 3780]  
 [3] Li N, Li J F, Liu Y P, Ma J 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 1404 (in Chinese) [李农, 李建芬, 刘宇平, 马健 2008 物理学报 **57** 1404]  
 [4] Huang L L, Feng R P, Wang M 2004 *Phys. Lett. A* **2** 271  
 [5] Wang C C, Su J P 2003 *Chaos Solitons and Fractals* **2** 275  
 [6] Chen S H, Hu J, Wang C P, Lu J H 2004 *Phys. Lett. A* **150**  
 [7] Poznyak A S, Yu W, Sanchez E N 1999 *IEEE Trans. Circ. Syst.* **12** 1491  
 [8] Zhao J C, Zhang Q J, Lu J A 2011 *Chin. Phys. B* **20** 050507  
 [9] Wang J Y, Huang D X 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 2755 (in Chinese) [王钧炎, 黄德先 2008 物理学报 **57** 2755]  
 [10] Dai D, Ma X K, Li F C, You R 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 2459 (in Chinese) [戴栋, 马西奎, 李富才, 尤勇 2002 物理学报 **51** 2459]  
 [11] Kennedy J, Eberhart R C 1995 *IEEE International Conference on Neural Networks* Perth, Australian, November 27–December 1, 1995 p1942  
 [12] Sun J, Fang W 2011 *Quantum-behaved particle swarm optimization principle and its application* (Beijing: Tsinghua University Press) p33 (in Chinese) [孙俊, 方伟 2011 量子行为粒子群优化原理及其应用 (北京: 清华大学出版社) 第 33 页]  
 [13] Wen S H, Wang Z, Liu F C 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 3753 (in Chinese) [温淑焕, 王哲, 刘福才 2009 物理学报 **58** 3753]  
 [14] Coelho L S 2008 *Chaos Solitons and Fractals* **5** 1409  
 [15] Liu C H, Zhang Y J, Zhang J, Wu J H 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 019501 (in Chinese) [刘朝华, 张英杰, 章兢, 吴建辉 2011 物理学报 **60** 019501]

# Parameter identification in chaotic systems by means of quantum particle swarm optimization

Zhang Hong-Li Song Li-Li<sup>†</sup>

(Xinjiang University, Department of Electrical Engineering, Urumqi Xinjiang 830047, China)

(Received 8 May 2013; revised manuscript received 11 June 2013)

## Abstract

Aiming at the parameter identification problem in chaotic systems, we propose the quantum particle swarm optimization algorithm based on the swarm intelligence particle swarm optimization. The test functions show that the method has good global optimization. Then the method is applied to the parameter identification problem of the chaotic system. We transform the parameter identification problem into the optimization in the multi-dimensional function space. Through research on the balance board thermal convection in a typical chaotic Lorenz system, the proposed method has been compared with the basic algorithm and the genetic algorithm. Simulation results show that the proposed algorithm is effective, and is very important to the development of chaos theory.

**Keywords:** quantum particle swarm optimization, chaotic system, system identification

**PACS:** 05.45.Gg, 98.62.Tc

**DOI:** 10.7498/aps.62.190508

---

<sup>†</sup> Corresponding author. E-mail: 734388126@qq.com