

非高斯噪声驱动下一维双稳系统的逻辑操作*

靳晓琴 许勇[†] 张慧清

(西北工业大学应用数学系, 西安 710072)

(2013年3月28日收到; 2013年6月8日收到修改稿)

本文以成功率作为逻辑随机共振的测度, 主要研究了非高斯噪声激励下一维双稳系统的逻辑随机共振现象, 并用平均首次通过时间的方法对此现象的机理进行了解释. 研究表明: 只有在适当的噪声强度带或关联时间带上, 成功率才会达到共振峰值. 通过对系统参数进行优化, 提高了系统实现逻辑操作的可靠性.

关键词: 逻辑随机共振, 一维双稳系统, 非高斯噪声, 平均首次通过时间

PACS: 05.90.+m, 05.45.-a, 05.40.Ca, 05.10.-a

DOI: 10.7498/aps.62.190510

1 引言

随机共振作为非线性动力学中普遍存在的一种自然现象, 其概念是于1981年由 Benzi 等^[1]提出的, 对古气象学中出现的冰川期和暖气候期交替出现的现象进行了解释. 随机共振现象是通过非线性系统、弱驱动信号和噪声三者之间的相互作用, 适量的噪声对信号起到增强的作用. 它被广泛应用在神经元^[2]、电路^[3]、光学^[4]等非线性系统中, 证实了噪声有利的一面. 例如 Manjarrez 等人于2002年对脑电波弱信号响应的研究^[5], 2004年 Sonya 等人对鳌虾尾部光感受器的研究^[6], 2006年 Yee-Joon 等人对人眼同时观察两幅不同图像的反应^[7]的研究, 秦等人^[8]对模拟电路实验的研究, 及 McNamara^[9]和 Vernuri^[10]等在双向环形激光器中的实验等研究中都观察到了随机共振现象的存在.

近年来, 鉴于计算设备尺寸纳米尺度化的趋势, 导致了噪声对计算性能的严重影响. 受随机共振理论的启发, 通过控制非线性系统构造非线性逻辑门的思路成为研究者的关注热点, 发现声在逻辑计算中起到了积极作用. 于是将随机共振用于逻辑计算, Murali 等人在2009年提出了逻辑随机共振的概念^[11], 提出利用两个逻辑方波信号叠加作为驱动

信号, 通过一个非线性系统能够实现逻辑操作. 随后逻辑随机共振涉及到了多种领域中诸如纳米力学系统^[12]、光学系统^[13]、生物系统^[14]等.

当前, 逻辑随机共振这一新思想逐渐成为人们的研究热点. 传统的随机共振的研究大多局限于输入信号为周期性激励的信号, 噪声为高斯噪声的情形, 通常采用输出信噪比来度量随机共振的可靠性^[15,16], 并在某个适当的噪声点上获得信噪比的峰值. 但在现实生活中, 一个系统所感受的外界激励并非是周期性的, 另外, 高斯噪声是一种理想化噪声, 这与实际不符已为人们所认识. 因此本文基于一维双稳的系统模型, 研究逻辑方波信号和非高斯噪声激励下的逻辑随机共振现象, 从平均首次通过时间的角度对系统的输出响应做出了合理的解释. 区别于传统的随机共振的测度指标, 逻辑随机共振采用逻辑输出成功率的方法来度量系统获得正确逻辑操作的可靠性, 在适当的噪声强度带或者关联时间带上实现成功率的峰值. 并进一步分析讨论了系统参数和非高斯噪声参数对逻辑输出成功率的影响.

2 一维双稳系统及平均首次通过时间

考虑一个非高斯噪声驱动下的具有一个三级方波信号作为输入信号的一维双稳系统, 如下式

* 国家自然科学基金(批准号: 11372247, 11102157)、教育部新世纪优秀人才支持计划和西北工业大学基础研究资助的课题.

[†] 通讯作者. E-mail: hsux3@nwpu.edu.cn

表示:

$$\dot{x} = x(a-x)(x-1) - \frac{b}{\gamma}x + I(t) + \eta(t), \quad (1)$$

上式的系统模型是简化一维的 FHN 神经元模型^[17]. 其中, a 反映的是系统的快变程度, 代表快变的膜电压变量, γ, b 均为正常数, 其中 b 反映的是慢变量对系统的影响, $I(t)$ 是外部输入电流. 由 (1) 式可以得出确定性方程的势函数

$$U(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{a+1}{3}x^3 + \frac{a\gamma+b}{2\gamma}x^2, \quad (2)$$

令 $\dot{U}(x) = 0$, 当参数满足 $\frac{b}{\gamma} < \left(\frac{a-1}{2}\right)^2$ 时, (2) 式的势函数有两个稳定不动点 $x_1 = 0, x_2 = \frac{a+1 + \sqrt{(a-1)^2 - 4b/\gamma}}{2}$, 其中 x_1, x_2 分别代表细胞神经元处于静息状态和激发状态. 势函数的一个不稳定点为 $x_u = \frac{a+1 - \sqrt{(a-1)^2 - 4b/\gamma}}{2}$. 对于 (1) 式中的噪声项 $\eta(t)$ 为非高斯噪声, 其满足

$$\dot{\eta} = -\frac{1}{\tau} \frac{d}{d\eta} V_p(\eta) + \frac{\sqrt{2D}}{\tau} \xi(t), \quad (3a)$$

$$V_p(\eta) = \frac{D}{\tau(p-1)} \ln \left(1 + \frac{\tau}{D}(p-1) \frac{\eta^2}{2} \right), \quad (3b)$$

$\xi(t)$ 是标准的高斯白噪声, 具有零均值 $\langle \xi(t) \rangle = 0$ 和关联函数 $\langle \xi(t_1)\xi(t_2) \rangle = 2D\delta(t_1 - t_2)$, 其噪声强度为 D . (3) 式中的 p 为偏离参数, 表示非高斯噪声 $\eta(t)$ 偏离高斯分布的程度, τ 是非高斯噪声的关联时间. 另外, 非高斯噪声^[18] 的统计性质为

$$\langle \eta(t) \rangle = 0, \quad (4a)$$

$$\langle \eta^2(t) \rangle = \begin{cases} \frac{2D}{\tau(5-3p)}, & p \in \left(-\infty, \frac{5}{3}\right), \\ \infty, & p \in \left(\frac{5}{3}, 3\right). \end{cases} \quad (4b)$$

利用路径积分法^[19] 可知, 当 $|p-1| \ll 1$ 时, 有:

$$\frac{1}{\tau} \frac{d}{d\eta} V_p(\eta) \approx \frac{\eta}{\tau_1}, \quad (5a)$$

$$\tau_1 = \frac{2(2-p)}{(5-3p)}\tau. \quad (5b)$$

将 (5) 式代入 (3) 式, 则可以把 (1) 式简化为

$$\frac{d\eta(t)}{dt} = -\frac{\eta}{\tau_1} + \frac{\xi_1(t)}{\tau_1}, \quad (6)$$

其中 $\xi_1(t)$ 是高斯白噪声, 均值为 0, 关联函数 $\langle \xi_1(t_1)\xi_1(t_2) \rangle = 2D_1\delta(t_1 - t_2)$, $D_1 = \left(\frac{2(2-p)}{5-3p}\right)^2 D$, 即应用上述路径积分法将噪声强度为 D , 关联时间

为 τ 的非高斯噪声近似的转化为噪声强度为 D_1 , 关联时间为 τ_1 的高斯色噪声. 利用统一色噪声近似法^[20] 可以得出 (1) 式对应的近似 FPK 方程的表达式

$$\frac{\partial P(x,t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} A(x)P(x,t) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} B(x)P(x,t), \quad (7a)$$

$$A(x) = \frac{x(a-x)(x-1) - \frac{b}{\gamma}x + I(t)}{1 + 2\tau_1 x^2 - \tau_1(a+1)x + \frac{I(t)}{x}\tau_1} + \sqrt{B(x)}(\sqrt{B(x)})', \quad (7b)$$

$$B(x) = \frac{D_1 x^2}{\left(1 + 2\tau_1 x^2 - \tau_1(a+1)x + \frac{I(t)}{x}\tau_1\right)^2}. \quad (7c)$$

从而求得定态概率密度函数^[21] 为

$$P(x) = \frac{N}{\sqrt{B(x)}} \exp \left\{ -\frac{\tilde{U}(x)}{D} \right\}, \quad (8a)$$

$$\begin{aligned} \tilde{U}(x) = & -\int \left[x(a-x)(x-1) - \frac{b}{\gamma}x + I(t) \right] \\ & \times \left[1 + 2\tau_1 x^2 - \tau_1(a+1)x + \frac{I(t)}{x}\tau_1 \right] dx/x^2 \\ = & \frac{\tau_1}{2}x^4 - \tau_1(a+1)x^3 \\ & + \frac{1}{2} \left[1 + 2\tau_1 a + \tau_1(a+1)^2 + \frac{2\tau_1 b}{\gamma} \right] x^2 \\ & - \left[(a+1)(1 + \tau_1 a) + \tau_1 I(t) \right. \\ & \left. + \frac{\tau_1 b(a+1)}{\gamma} \right] x + \ln x \left(a + \frac{b}{\gamma} \right) \\ & - \frac{1}{x} \left(\tau_1 I(t)a + \frac{\tau_1 b I(t)}{\gamma} - I(t) \right) \\ & + \frac{1}{x^2} \cdot \frac{I^2(t)\tau_1}{2}. \end{aligned} \quad (8b)$$

这里 N 为归一化常数, $\tilde{U}(x)$ 为广义势函数. $I(t) = I_1(t) + I_2(t)$, $I_1(t), I_2(t)$ 分别为非周期的两个逻辑方波信号. 不失一般性, 当 $I_{1,2}(t)$ 取值为 -0.3 时, 则认为逻辑值为 0, 取值为 0.3 时则认为逻辑值为 1, 故可能有四种不同的逻辑输入组合 (I_1, I_2) : $(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)$. 由于 $(0,1)$ 和 $(1,0)$ 有相同的 I 值, 因而四种不同的逻辑输入组合简化为三种, 即 $I(t)$ 是一个非周期的三级方波信号. 另外, 由 (8) 式可知系统的平均首次通过时间^[22] 的表达式为

$$T = \int P(x)dx. \quad (9)$$

3 逻辑随机共振的工作原理

逻辑输入 $I(t)$ 的逻辑值的选取在上述已经做了详细的阐述, 而对于逻辑输出的取值取决于系统所在的状态, 认为当系统位于左势阱时取其逻辑输出 0, 位于右势阱时取逻辑 1. 将逻辑输入与逻辑输出与逻辑真值表 1 对照, 可判断系统所实现的逻辑操作 [23].

表 1 逻辑关系真值表

(I_1, I_2)	OR	NOR	AND	NAND
(0,0)	0	1	0	1
(0,1)/(1,0)	1	0	0	1
(1,1)	1	0	1	0

对系统 (1) 设定一组参数: $a = 0.5, b = 0, \gamma = 1, p = 0.5, D = 0.01, I = -0.6, 0, 0.6$. 可以得到系统 (1) 这个双稳态系统的输入输出流见图 1. 将系统的逻辑输入输出与逻辑真值表 1 对照, 可以发现在噪声关联时间 $\tau = 0.01$ 时系统实现了逻辑 OR 操作, 而当 $\tau = 0.008$ 和 $\tau = 0.03$ 时, 系统输出状态没有实现任何一种逻辑操作. 另外, 从图中可以观察到输入信号 $I = -0.6$ 和 0.6 时, 随着非高斯噪声关联时间 τ 的增大, 系统输出状态没有发生在两个势阱间跳跃的情形, 而是始终稳定在各自的阱内. 对于输入信号 $I = 0$, 当非高斯噪声的关联时间 τ 较小时, 系统输出状态极其不稳定, 会在两个势阱间不断跳跃; 当关联时间 τ 较大时, 系统输出状态大多停留在左势阱, 说明此时也发生了势阱间逃逸的现象, 只在噪声关联时间适当时不发生逃逸. 因而当非高斯噪声的关联时间较大和较小时, 系统都不能实现任何一种逻辑操作, 只有当噪声关联时间适当时, 系统才实现了正确的逻辑操作, 产生了清晰的逻辑输出流.

就上述图 1 中的在不同噪声关联时间 τ 下的逻辑输出流, 可以从平均首次通过时间的角度进行解释. 根据 (9) 式可以做出图 2 所示的正向平均首次通过时间在不同输入信号下随非高斯噪声关联时间变化的曲线, 从图中观察到在三种不同的输入信号下, 平均首次通过时间随着关联时间的增大呈现了非单调的变化, 先增大后减小. 然而对于信号为 -0.6 和 0.6 的情形, 平均首次通过时间的值都相对较大, 因而不可能发生逃逸, 故在这两种信号下系统的输出粒子始终都稳定的停留在各自的阱内; 而对于信号为 0 的情形, 平均首次通过时间在关联时间较小和较大时, 其值都偏小, 即能够发生两个

势阱间的穿越, 在适当的关联时间时, 平均首次通过时间的值较大, 因而此时不能发生阱间跳跃现象. 通过分析, 可以得知只有在适当的关联时间带上才能实现正确的逻辑操作.

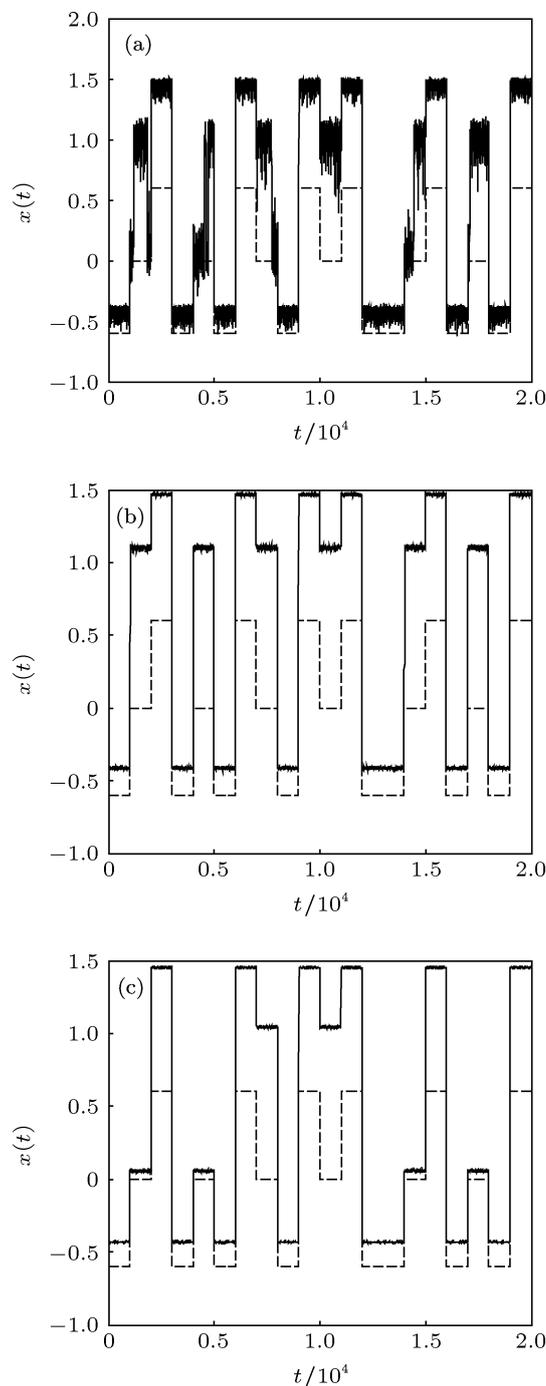


图 1 对于逻辑 OR 操作, 系统 (1) 的逻辑输出流 (实线) 与逻辑输入流 (虚线) (其中系统 (1) 参数为 $a = 0.5, b = 0, \gamma = 1, p = 0.5, D = 0.01, I = -0.6, 0, 0.6$. τ 为噪声关联时间) (a) $\tau = 0.008$; (b) $\tau = 0.01$; (c) $\tau = 0.03$

更进一步的, 为了度量获得正确逻辑操作的可靠性, 引入逻辑输出成功率 [24,25] 作为测度, 其表达

式为

$$P(\text{logic}) = \frac{\text{成功的驱动轮数}}{\text{驱动系统的总的轮数}} \quad (10)$$

由上式知, 正确逻辑输出成功率 $P(\text{logic})$ 是成功的驱动轮数与驱动系统总的轮数的比值. 判断一轮驱动成功的具体步骤如下: 向系统输入四个可能的逻辑输入集合 $(I_1, I_2): (0,0), (0,1), (1,0), (1,1)$ 的一个随机排列, 其中的每个输入集 (如 $(0,0)$) 驱动系统需要一段时间, 对这个时间内的系统输出进行采样, 将系统输出与输入对照逻辑关系真值表来检验逻辑关系的正确概率, 如正确率近似等于 1, 则认为这个逻辑输入集合下获得了正确的逻辑输出. 类似地, 对其他三个输入集进行正确率的计算, 当此轮中的四个逻辑输入集合下都获得了近似于 1 的正确率, 则认为此轮驱动成功. 用此方法将系统驱动多轮, 统计成功驱动的轮数, 从而可以求得逻辑输出的成功率 $P(\text{logic})$.

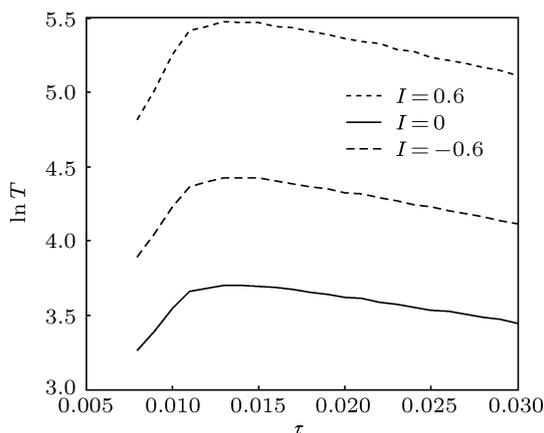


图2 平均首次通过时间作为非高斯噪声关联时间的函数在不同输入信号下的变化图 (系统 (1) 参数同图 1 为 $a = 0.5, b = 0, \gamma = 1, p = 0.5, D = 0.01$)

4 非高斯噪声各因素及系统参数对逻辑成功率的影响

根据 (10) 式, 讨论非高斯噪声的关联时间 τ 、噪声强度 D 及偏离参数 p 、系统参数 b 对逻辑输出成功率的影响.

对系统 (1) 设定参数 $a = 0.5, b = 0, \gamma = 1, p = 0.5$, 图 3 给出了逻辑输出成功率 $P(\text{OR})$ 作为非高斯噪声强度 D 的函数随不同的关联时间 τ 变化的曲线. 从图中可以观察到固定关联时间 τ 时, 系统的逻辑成功率随着噪声强度的增大呈现了非单调的变化, 先增大后减小, 在适当的噪声强度带上时, 逻辑成功率达到了峰值, 即 $P(\text{OR}) \approx 1$. 此外, 随

着噪声关联时间 τ 从 0.01 增大到 0.1, 逻辑成功率的共振峰值右移且其所对应的噪声强度带逐渐变宽. 图 4 给出了逻辑成功率 $P(\text{OR})$ 作为非高斯噪声的关联时间 τ 的函数随不同的噪声强度 D 变化的曲线. 当固定噪声强度 D 时, 随着关联时间 τ 的增大, 逻辑成功率 $P(\text{OR})$ 出现了共振峰值. 且发现随着噪声强度 D 从 0.01 增大到 0.5, 共振峰值右移, 峰值所对应的关联时间带变宽.

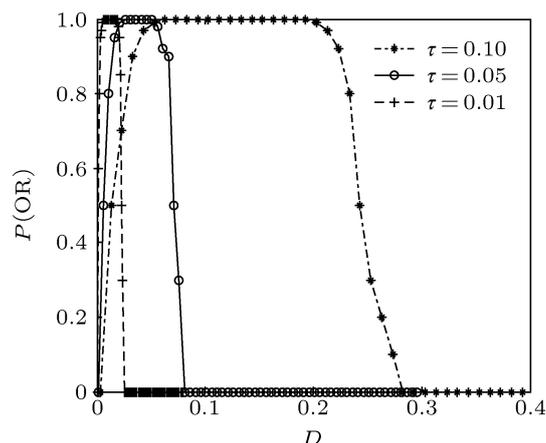


图3 逻辑成功率 $P(\text{OR})$ 在不同的关联时间 τ 下随着噪声强度 D 的变化图 (系统 (1) 的参数: $a = 0.5, b = 0, \gamma = 1, p = 0.5$)

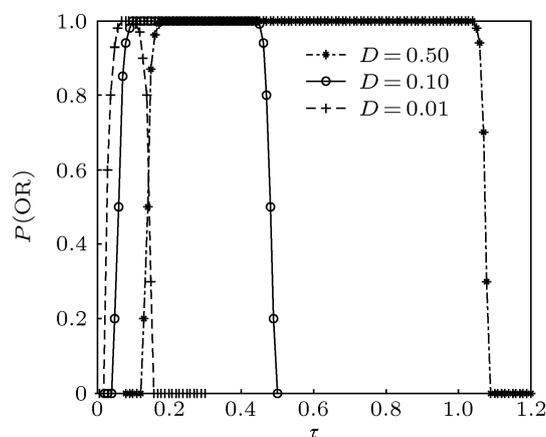


图4 逻辑成功率 $P(\text{OR})$ 在不同的噪声强度 D 下随着关联时间 τ 的变化图 (系统 (1) 的参数: $a = 0.5, b = 0, \gamma = 1, p = 0.5$)

图 5 给出了系统参数为 $a = 0.5, \gamma = 1, p = 0.5, D = 1$ 时的逻辑成功率 $P(\text{OR})$ 作为关联时间 τ 的函数随不同的系统参数 b 变化的曲线. 从图中可以观察到固定系统参数 b 时, 系统的逻辑成功率 $P(\text{OR})$ 随着关联时间 τ 的增大先增大后减小, 在适当的关联时间带上时, 逻辑成功率 $P(\text{OR})$ 达到了共振峰值. 且发现随着系统参数 b 从 -0.1 增大到 0.1 , 逻辑成功率 $P(\text{OR})$ 的共振峰值左移且其所对应的关联时间带逐渐变窄.

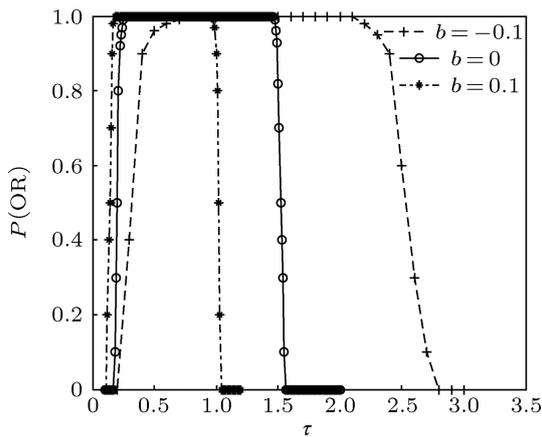


图5 逻辑成功率 $P(\text{OR})$ 在不同的系统参数 b 下随着关联时间 τ 的变化图(系统(1)的参数: $a = 0.5, \gamma = 1, p = 0.5, D = 1$)

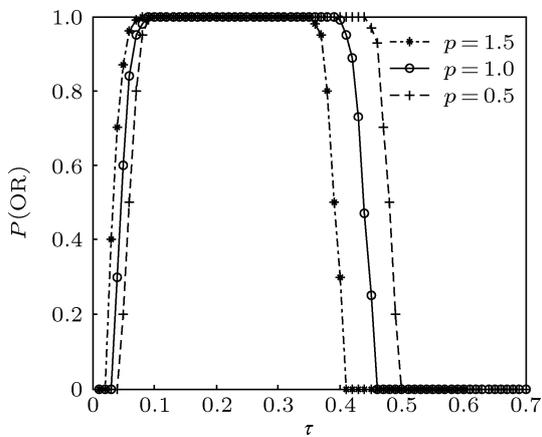


图6 逻辑成功率 $P(\text{OR})$ 在不同的偏离参数 p 下随着关联时间 τ 的变化图(系统(1)的参数: $a = 0.5, b = 0, \gamma = 1, D = 0.1$)

图6给出了系统参数为 $a = 0.5, b = 0, \gamma = 1, D = 0.1$ 时的逻辑成功率 $P(\text{OR})$ 作为关联时间 τ 的函数随不同的偏离参数 p 变化的曲线. 从图中可

以观察到固定偏离参数 p 时, 系统的逻辑成功率 $P(\text{OR})$ 随着关联时间 τ 的增大先增大后减小, 在适当的关联时间带上时, 逻辑成功率 $P(\text{OR})$ 达到了共振峰值. 且发现随着偏离参数 p 从 0.5 增大到 1.5, 逻辑成功率 $P(\text{OR})$ 的共振峰值左移且其所对应的关联时间带逐渐变窄.

5 结论

本文主要研究了非高斯噪声激励下的一维双稳系统的逻辑随机共振现象. 从平均首次通过时间的角度, 对这一系统在不同的非高斯噪声关联时间下的系统输出响应进行了合理的解释. 并通过将系统的输出及逻辑输入对照逻辑真值表的方法得知系统所实现的逻辑操作. 另外, 利用成功率作为逻辑随机共振现象的测度, 分析讨论了非高斯噪声的关联时间、噪声强度、系统参数 b 及偏离参数 p 对成功率的影响. 研究表明: 非高斯噪声激励下的一维双稳系统中的逻辑随机共振现象的存在不仅仅局限于周期信号, 在非周期的三级方波信号下也同样存在. 此外, 适当优化非高斯噪声各因素及系统参数可以提高系统实现逻辑操作的可靠性. 具体地, 参数变化对成功率的影响出现了两类结果: 第一是随着非高斯噪声关联时间和噪声强度的增大, 成功率的共振峰值出现了右移且共振峰值区域变宽的趋势; 第二类是随着系统参数 b 和偏离参数 p 的增大, 成功率的共振峰值出现了左移且其区域变窄的趋势.

[1] Benzi R, Sutera A, Vulpiani A 1981 *J. Phys. A: Math. Gen.* **14** L453
 [2] Gan C B, Matjaz P, Wang Q Y 2010 *Chin. Phys. B* **19** 040508
 [3] Fauve S, Heslot F 1983 *Phys. Lett. A* **97** 5
 [4] Marino F, Giudici M, Barland S, Balle S *Phys. Rev. Lett.* **88** 040601
 [5] Manjarrez E, Diez M O, Méndez I, Flores A 2002 *Neuroscience Letters* **324** 213
 [6] Sonya B, Moss F 2004 *Mathematical Biosciences* **188** 81
 [7] Yee-Joon K, Marcia G, Satoru S 2006 *Vision Research* **46** 392
 [8] Qin G R, Gong D C, Hu G 2005 *Chin. Phys. Sin.* **41** 360 (in Chinese) [秦光戎, 龚德纯, 胡岗 2005 物理学报 **41** 360]
 [9] McNamara B, Wiesenfeld K 1989 *Phys. Rev. A* **39** 4854
 [10] Vemuri G, Roy R 1989 *Phys. Rev. A* **39** 4668
 [11] Murali K, Sinha S, Ditto W L, Bulsara A R 2009 *Phys. Rev. Lett.* **102** 104101
 [12] Guerra D N, Bulsara A R, Ditto W L 2010 *Nano. Letters* **10** 1168
 [13] Zamora-Munt J, Masoller C 2010 *Optics Express* **18** 418
 [14] Dari A, Kia B, Bulsara A R, Ditto W L 2011 *Chaos* **21** 047521
 [15] Han X P, Liu J, Tong Q Y 2004 *Acta Biophysica Sinica* **20** 409 (in Chinese) [韩晓鹏, 刘军, 童勤业 2004 生物物理学报 **20** 409]
 [16] Xu Y, Li J J, Feng J, Zhang H Q, Xu W, Duan J Q 2013 *Eur. Phys. J. B* **86** 198
 [17] Zhang J J, Jin Y F 2012 *Chin. Phys. Sin.* **61** 130502 (in Chinese) [张静静, 靳艳飞 2012 物理学报 **61** 130502]
 [18] Horacio S W, Raul T 2008 *Physics D* **193** 161
 [19] Fuentes M A, Horacio S W, Raul T 2002 *Physica A* **303** 91
 [20] Jung P, Hanggi P 1987 *Phys. Rev. A* **35** 4464
 [21] Wang C Q, Xu W, Zhang N M, Li H Q 2008 *Chin. Phys. Sin.* **57** 0749 (in Chinese) [王朝庆, 徐伟, 张娜敏, 李海泉 2008 物理学报 **57** 0749]
 [22] Zhao Y, Xu W, Zou S C 2009 *Chin. Phys. Sin.* **58** 1396 (in Chinese) [赵燕, 徐伟, 邹少存 2009 物理学报 **58** 1396]
 [23] Zhang L, Song A G 2011 *Chinese Journal of Scientific Instrument* **32** 2394 (in Chinese) [张雷, 宋爱国 2011 仪器仪表学报 **32** 2394]
 [24] Singh K P, Sinha S 2011 *Phys. Rev. E* **83** 046219
 [25] Xu Y, Jin X Q, Zhang H Q, Yang T T 2013 *J. Stat. Phys.* **152** 753

The reliability of logical operation in a one-dimensional bistable system induced by non-Gaussian noise*

Jin Xiao-Qin Xu Yong[†] Zhang Hui-Qing

(Department of Applied Mathematics, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China)

(Received 28 March 2013; revised manuscript received 8 June 2013)

Abstract

Using success probability as a measure of logical stochastic resonance, we mainly studied the phenomenon of logical stochastic resonance (LSR) in a one-dimensional bistable system induced by non-Gaussian noise in this paper. And we explained the cause of this phenomenon via the method of the mean first-passage time. Results show that the resonance peak of the success probability can be achieved only when in an appropriate range of noise intensity or correlation time. Through an optimization of system parameters, we have improved the reliability of realizing logic operation in the system.

Keywords: Logical stochastic resonance, one-dimensional bistable system, non-Gaussian, mean first-passage time

PACS: 05.90.+m, 05.45.-a, 05.40.Ca, 05.10.-a

DOI: 10.7498/aps.62.190510

* Project supported by the National Science Foundation of China Natural (Grant Nos. 11372247, 11102157). NCET and NPU Foundmental foundation research.

[†] Corresponding author. E-mail: hsux3@nwpu.edu.cn