

# 二维势场中弹性耦合粒子的定向输运研究\*

吴魏霞<sup>1)</sup> 郑志刚<sup>2)†</sup>

1) (北京印刷学院基础部, 北京 102600)

2) (北京师范大学物理学系, 北京 100875)

(2013年6月9日收到; 2013年8月15日收到修改稿)

建立了二维势场中弹性耦合粒子的输运模型, 其中一维上加交流驱动及噪声, 另一维上不加驱动及噪声, 分析讨论了过阻尼情形下系统和外部参量对定向流的影响. 结果表明, 粒子可以通过相互耦合使一个方向上输入的驱动能量转化到垂直方向上, 从而使无能量输入的方向产生定向流. 适当的弹簧自由长度及耦合强度可以使定向流达到极值, 特别是当耦合强度及噪声强度固定时, 定向流会随弹簧自由长度的变化而振荡, 出现多峰现象. 研究还发现, 定向流随噪声强度的变化出现随机共振现象. 当产生定向流方向上的势的不对称度达到一定程度时会出现流反转现象.

**关键词:** 弹性耦合, 定向输运, 随机共振, 流反转

**PACS:** 05.10.Gg, 05.60.Cd

**DOI:** 10.7498/aps.62.190511

## 1 引言

定向输运现象普遍存在于物理、生物等众多领域中, 包括物质、能量的定向输运. 其中生物领域中物质的定向输运非常普遍, 如分子马达的定向输运<sup>[1-3]</sup>; 而物理学中的能量的定向输运有热能的定向输运、随机共振<sup>[4]</sup>等. 研究定向输运机理可以帮助人们理解物质、能量的输运机理, 从而从新的角度去认识和利用这一机理. 有关定向输运问题的研究已成为物理学、生物学等学科共同关注的热点问题之一<sup>[5,6]</sup>.

以往对定向输运的研究大多集中在对单个粒子的输运机理进行分析, 这方面已取得了许多成果<sup>[7-9]</sup>. 但是在许多情况下, 粒子之间的相互耦合不可避免, 这种耦合甚至起着决定性的作用. 如生物体内物质的长距离输运就必须通过多个分子马达耦合在一起, 相互合作才能完成<sup>[10-12]</sup>. 所以研究耦合粒子的定向输运机理意义重大. 目前此方面的研究大多集中在一维问题上<sup>[13-15]</sup>, 但多维情况

更具普遍性, 所以有必要研究其多维定向输运问题. 目前对多维问题的研究主要集中在二维问题上. 为了让系统偏离平衡态, 以往的模型在所关注的产生定向流的方向上或者加噪声<sup>[16,17]</sup>, 或者加驱动<sup>[18]</sup>, 或者让外势随时间周期变化等<sup>[19]</sup>. 最近, 有文献研究了二维势场(其中一维上加交流驱动, 另一维上不加驱动)中确定性马达的合作定向输运行为, 并提出了一种新的输运机理, 即马达可以通过合作使一维上的输入能量转化到另一维上做功, 从而使另一维上产生定向流<sup>[20]</sup>. 如果在垂直于定向流产生方向上加上驱动及噪声, 系统会有什么样的行为? 噪声对系统定向流起什么作用? 系统自身和外部参量对定向流会产生什么样的影响?

本文研究二维势场中弹性耦合粒子的定向输运机理. 其中一个方向上加交流驱动及噪声(即此方向有能量输入), 另一垂直方向上无外加驱动, 研究无外加驱动的方向上是否可以产生定向流? 及系统和外部参量对定向流产生什么影响? 我们的结果与文献<sup>[20]</sup>所得结果类似, 验证了本文所建的模型中, 粒子通过耦合同样可以将一个方向上的输入能

\* 北京市教育委员会科技计划(批准号: KM201110015004)、北京市属高等学校人才强教深化计划(批准号: PHR201108353)、北京市优秀人才培养资助项目(批准号: 2012D005004000005)、国家自然科学基金(批准号: 11075016)和高等学校博士学科点专项科研基金(批准号: 20100003110007)资助的课题.

† 通讯作者. E-mail: zgzheng@bnu.edu.cn

量转化到垂直方向上,从而使无能量输入的方向上产生定向流.但本文所建模型在某些方面表现出更为丰富的输运行为,如当耦合强度或噪声强度固定时,定向流随弹簧自由长度的变化出现振荡,从而产生多个峰值;定向流随噪声强度的变化出现随机共振现象;当产生定向流方向上的势的不对称度达到一定程度时会出现流反转现象等.

## 2 理论模型

二维势场  $U(x,y)$  中,过阻尼情况下的  $N$  个弹

$$U_x(x) = \begin{cases} \frac{d}{b}(x-nL), & nL \leq x < nL+b, \\ -\frac{d}{L-b}[x-(n+1)L], & nL+b \leq x < (n+1)L, \end{cases} \quad (n=0,1,2,\dots), \quad (2a)$$

$$U_y(y) = \frac{1}{2}\omega_y y^2. \quad (2b)$$

粒子耦合系统所处的二维势场示意图如图 2 所示.

$U_{\text{int}}$  为粒子之间的相互作用势,我们考虑最简单的两个粒子弹性耦合的情况,则

$$U_{\text{int}} = \frac{1}{2}k[\|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1\| - a]^2, \quad (3)$$

其中  $k$  为弹簧的弹性系数,即粒子的耦合强度,  $a$  为弹簧的自由长度.  $y$  方向所加驱动为周期性交流驱动

$$F_i(t) = A_i \cos(\omega_i t + \phi_i), \quad (4)$$

其中  $A_i$  为驱动振幅,  $\omega_i$  为驱动频率,  $\phi_i$  为驱动初相位.

$\xi_i(t)$  为高斯白噪声,满足下面条件:

$$\begin{aligned} \langle \xi_i(t) \rangle &= 0, \\ \langle \xi_i(t)\xi_j(t') \rangle &= 2D\delta_{ij}\delta(t-t'), \end{aligned} \quad (5)$$

其中  $D$  为噪声强度.

定义  $x$  方向的定向流为

$$J = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{NT} \int_0^T \sum_{i=1}^N \dot{x}_i dt, \quad (6)$$

其中  $N$  为粒子数,  $T$  为时间.

众所周知,热力学第二定律决定:处于热力学平衡态的系统不可能有定向运动产生.为了产生定向流,必须要打破系统的热力学平衡,通常的做法

性耦合粒子满足以下运动方程:

$$\gamma \dot{x}_i + \frac{\partial U}{\partial x_i} + \frac{\partial U_{\text{int}}}{\partial x_i} = 0, \quad (1a)$$

$$\gamma \dot{y}_i + \frac{\partial U}{\partial y_i} + \frac{\partial U_{\text{int}}}{\partial y_i} = F_i(t) + \xi_i(t), \quad (1b)$$

这里,第  $i$  个粒子  $t$  时刻的位置可以表示为  $\mathbf{r}_i(t) = (x_i(t), y_i(t))$ ,  $\gamma$  为阻尼系数.二维势场  $U(x,y) = U_x(x) + U_y(y)$ , 其中  $U_x(x)$  为周期性棘齿势(图 1), 其空间周期为  $L$ , 高度为  $d$ ,  $b$  的大小可表征棘齿势的不对称度.  $U_y(y)$  取抛物势.  $U_x(x)$  和  $U_y(y)$  可分别表示为

是在产生定向流的方向上加噪声,或者加驱动,或者令势场随时间变化.我们的做法是在一维上( $y$  方向)加交流驱动及噪声,另一垂直维上( $x$  方向)不加这两者,考察系统能否出现定向流.对于这种情况,如果是单粒子,不可能产生定向流,因为  $y$  方向抛物势的作用使得它只能被束缚在  $x$  方向上势阱底部并沿着  $y$  方向作周期振荡.如果粒子之间存在耦合会是如何呢?

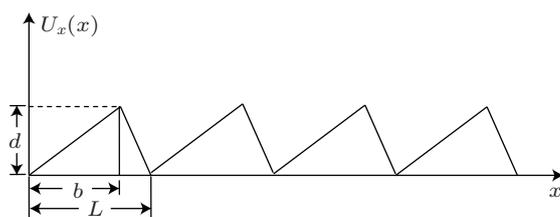


图 1 周期棘齿势示意图

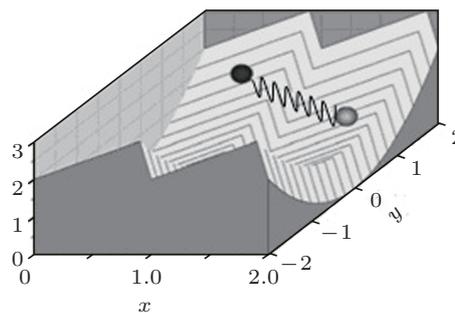


图 2 粒子耦合系统处于二维势场示意图

### 3 数值模拟

采用四阶随机 Runge-Kutta 算法求解随机微分方程 (1). 计算中取时间步长  $\Delta t = 0.01$ , 共演化  $5 \times 10^6$  步, 且为了模拟更精确, 取系统演化 10000 步时的值作为初值. 此外, 取粒子数  $N = 2$ , 阻尼系数标度为  $\gamma = 1.0$ . 棘齿势周期  $L = 1$ , 势高度  $d = 1$ . 交流驱动幅度  $A_1 = 0.1, A_2 = 0.2$ , 驱动频率  $\omega_1 = 0.025, \omega_2 = 0.035$ , 驱动相位差  $\phi_1 - \phi_2 = \pi$  (即  $F_1(t) = -F_2(t)$ ).

图 3 显示了在合适的参数选择下, 粒子位移的时间演化. 可以看出, 两个粒子在  $x$  方向上的位移均随时间增大, 并且由于耦合作用, 两粒子同步前进, 说明有定向流产生.  $y$  方向上的位移随时间在平衡位置附近振荡, 平均位移为零. 这说明本文所建模型可以产生定向流, 且粒子通过耦合可以将一个方向的输入能量转化到无能量输入的垂直方向上.

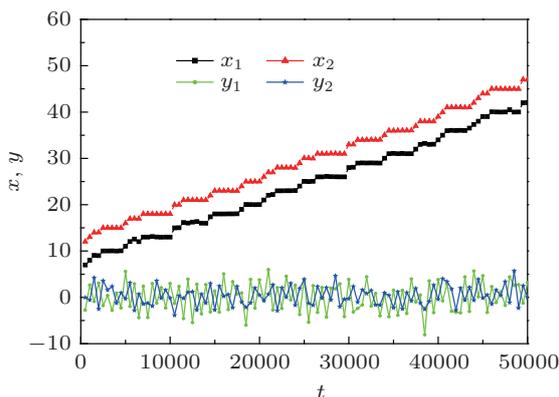


图 3 粒子位移随时间的演化 (参数取值:  $b = 0.9, k = 1.5, a = 6.0, D = 2.0, \omega_y = 0.2$ )

图 4(a), (b) 和 (c) 分别是不同耦合强度、不同噪声强度和不同  $y$  方向势参数下系统定向流随弹簧自由长度的变化关系. 可以看到, 系统要想产生定向流, 弹簧的自由长度必须达到一定值, 即自由长度需要一个阈值. 产生这种现象的原因来自于耦合的空间尺度 (自由长度) 与棘齿势场空间周期的竞争, 如果自由长度比较小, 耦合系统就无法完成与外力配合而产生沿棘齿势方向跨越势垒的定向运动. 此外, 还可看到, 定向流随弹簧自由长度的增加而振荡 [21], 出现一系列的峰值, 且每两个峰值之间所对应的自由长度恰好为棘齿势周期的整数倍. 振荡的原因同样来自于上述两个空间尺度的竞争效应, 空间尺度的匹配可以产生最大定向流. 从图中还可看出, 弹簧自由长度较小时, 定向流随自由长度的增加而增大, 这一点对应于生物分子马达而

言就是“长腿效应”<sup>[22,23]</sup>, 也就是腿长跑的更快. 如具有更长颈部的肌球蛋白, 其步长更大, 沿轨道移动得也更快. 但定向流不能随自由长度的增加无限增大, 当自由长度增大到一定程度后, 定向流会下降直到零.

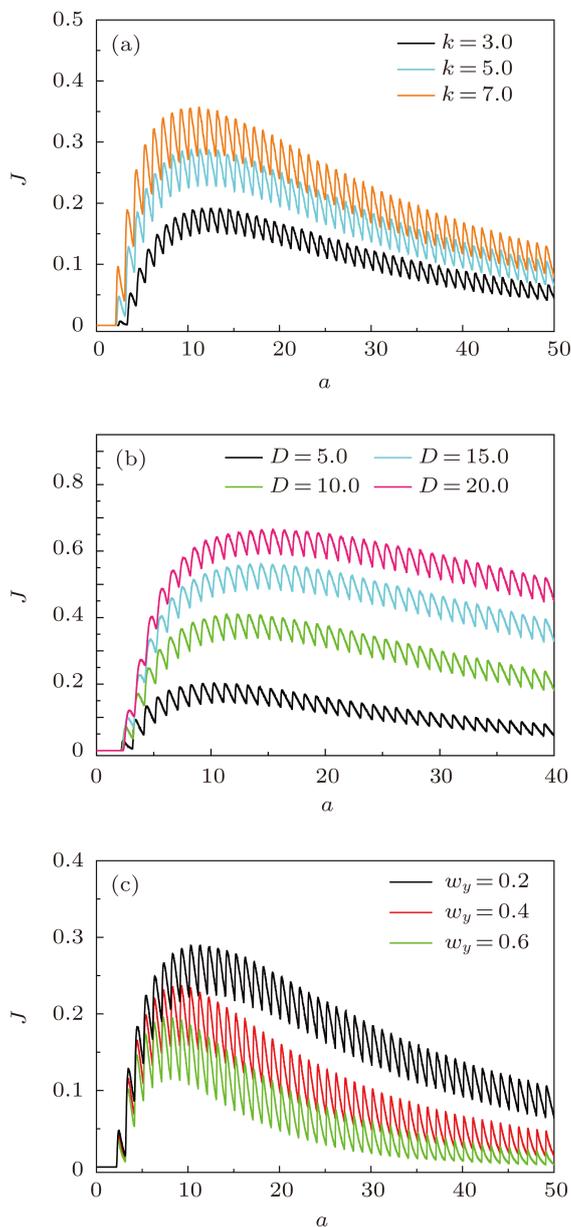


图 4 定向流随弹簧自由长度的变化关系 (参数取值:  $b = 0.9$ ) (a) 耦合强度不同  $D = 7.0, \omega_y = 0.2$ ; (b) 噪声强度不同  $k = 5.0, \omega_y = 0.2$ ; (c)  $y$  方向势参数不同.  $k = 5.0, D = 7.0$

图 5 给出了系统定向流随粒子耦合强度的变化曲线. 可以看出, 耦合强度很弱时, 两粒子可看成相互独立, 它们各自只能被束缚在  $x$  方向上势阱底部并沿着  $y$  方向作周期振荡, 系统无定向流产生. 耦合很强时, 两粒子之间可以看成硬杆连接, 它们在棘齿势中的协调性也会大大降低, 定向流也很小.

所以, 合适的耦合强度可以增强两粒子之间的协调性, 从而产生最大定向流.

噪声强度反映了外部涨落对系统定向流的影响程度. 噪声较小时, 噪声对定向流有增强作用; 当噪声较大时, 噪声的作用远远大于棘齿势的作用, 定向流的产生受到严重限制. 这正反应了定向流随噪声强度变化的随机共振行为<sup>[24]</sup>, 如图 6 所示.

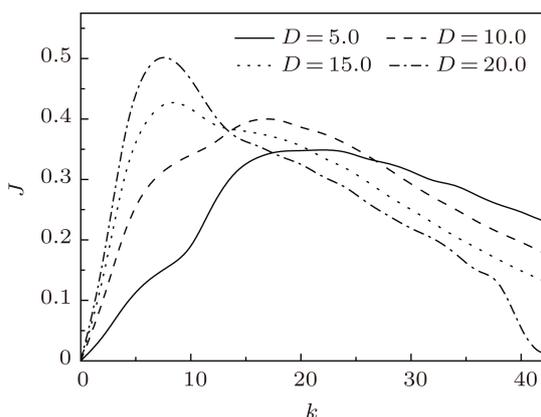


图 5 定向流随耦合强度的变化关系. 参数取值:  $b=0.9, a=6.0, \omega_y=0.2$

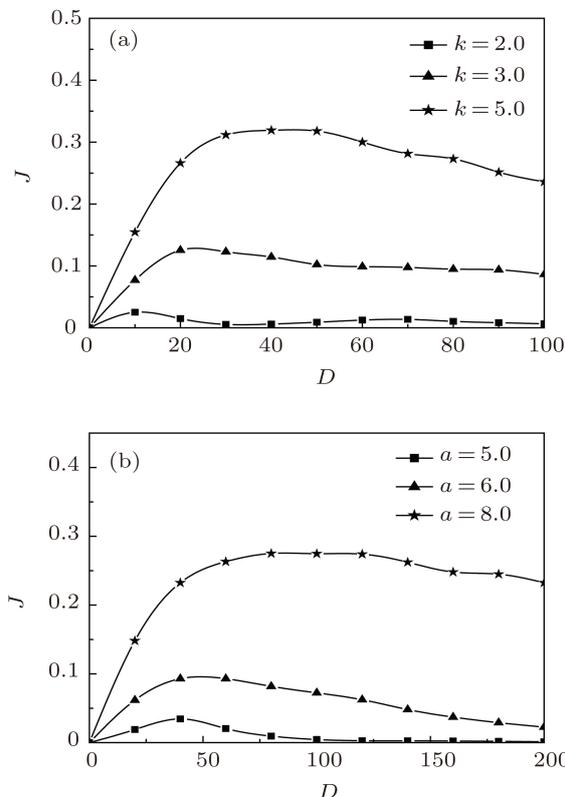


图 6 定向流随噪声强度的变化关系 (参数取值:  $b=0.9, \omega_y=0.2$ ) (a) 耦合强度不同,  $a=6.0$ ; (b) 自由长度不同,  $k=1.5$

为了考察  $x$  方向棘齿势的不对称度及  $y$  方向势参数  $\omega_y$  是否对定向流产生影响, 我们定义  $x$  方向棘齿势的不对称度为  $\chi = \log[b/(L-b)]$ . 图 7 显示

了定向流随棘齿势不对称度的变化关系. 当  $\chi=0$  时, 即  $b=L/2$ , 系统的定向流为零, 这就暗示了定向流的产生必须要求棘齿势不对称, 即空间对称破缺. 在  $\chi=0$  的两侧, 定向流随  $\chi$  的变化趋势相同. 此外, 还可看出, 当棘齿势的不对称度达到一定程度时会出现流反转现象. 图 8 为定向流随  $y$  方向势参数  $\omega_y$  的变化曲线.  $\omega_y$  的大小直接影响了弹簧的形变量.  $\omega_y$  越大, 弹簧在  $y$  方向的束缚越大, 其形变量就越小, 弹簧的弹性力在  $x$  方向上的分量就越小, 定向流就越小. 这与图 4(c) 所说明的结果一致. 当  $\omega_y$  达到一定值时, 导致弹簧无法发生足够大的形变, 粒子将很难克服棘齿势场的作用向前运动, 因而系统无法实现定向运动.

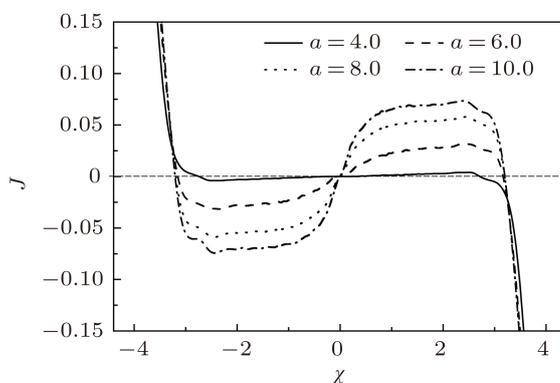


图 7 定向流随棘齿势不对称度的变化关系 (参数取值:  $k=1.5, \omega_y=0.2, D=7.0$ )

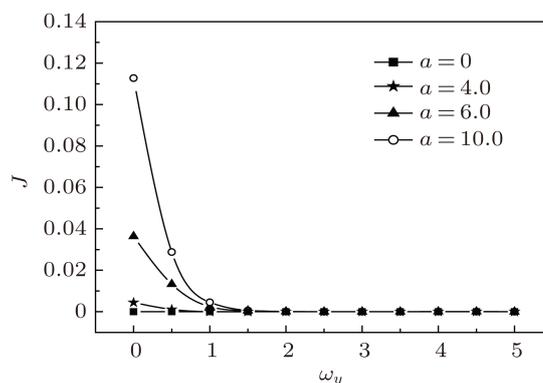


图 8 定向流随  $y$  方向势参数的变化关系 (参数取值:  $b=0.9, k=1.5, D=7.0$ )

## 4 结论

针对目前建立的耦合粒子的二维定向运输模型大都将驱动或噪声加在产生定向流方向上的情况, 本文所建模型将驱动及噪声加在垂直于定向流方向上, 研究了系统及外部参量对定向流的影响. 得到如下结论: 1) 粒子通过耦合可以将一个方向上的输入能量转化到垂直方向上, 从而使无能量输入

的方向上产生定向流; 2) 定向流随弹簧自由长度的变化产生振荡, 出现多峰现象; 且适当的弹簧自由长度下可产生最大定向流; 3) 定向流对粒子的耦合强度也具有选择性, 且定向流随噪声强度的变化出

现随机共振现象; 4) 棘齿势不对称度及  $y$  方向势参数均可对定向流产生明显影响. 当棘齿势不对称度达到某一程度时可发生流反转现象, 而当  $y$  方向势参数太大时可严重限制定向流的产生.

- [1] Schnitzer M J, Block S M 1997 *Nature* **388** 386
- [2] Asbury C L, Fehr A N, Block S M 2003 *Science* **302** 2130
- [3] Coy D L, Wagenbach M, Howard J 1999 *J. Biol. Chem.* **274** 3667
- [4] Zheng Z G 2004 *Spatiotemporal Dynamics and Collective Behaviors in Coupled Nonlinear Systems* (Beijing: Higher Education Press) p278 (in Chinese) [郑志刚 2004 耦合非线性系统的时空动力学与合作行为 (北京: 高等教育出版社) 第 278 页]
- [5] Bai W S M, Peng H, Tu Z, Ma H 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 210501 (in Chinese) [白文斯密, 彭皓, 屠浙, 马洪 2012 物理学报 **61** 210501]
- [6] Bao J D 2009 *Stochastic Simulation Method of Classic and Quantum Dissipative System* (Beijing: Science Press) p160 (in Chinese) [包景东 2009 经典和量子耗散系统的随机模拟方法 (北京: 科学出版社) 第 160 页]
- [7] Gehlen S V, Evstigneev M, Reimann P 2009 *Phys. Rev. E* **79** 031114
- [8] Astumian R D 1997 *Science* **176** 917
- [9] Li W, Guo H Y, Ji Q, Zhan Y, Zhao T J 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 3684 (in Chinese) [李微, 郭鸿涌, 纪青, 展永, 赵同军 2004 物理学报 **53** 3684]
- [10] Shubeita G T, Tran S L, Xu J, Vershinin M, Cermelli S, Cotton S L, Welte M A, Gross S P 2008 *Cell* **135** 1098
- [11] Mallik R, Petrov D, Lex S A, King S J, Gross S P 2005 *Curr Biol.* **15** 2075
- [12] Hill D B, Plaza M J, Bonin K, Holzwarth G 2004 *Eur Biophys J.* **33** 623
- [13] Wang F, Deng C, Tu Z, Ma H 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 040501 (in Chinese) [王飞, 邓翠, 屠浙, 马洪 2013 物理学报 **62** 040501]
- [14] Wang L F, Gao T F, Huang R Z, Zheng Y X 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 070502 (in Chinese) [王莉芳, 高天附, 黄仁忠, 郑玉祥 2013 物理学报 **62** 070502]
- [15] Zheng Z G, Liu F Z, Gao J 2003 *Chin. Phys.* **12** 846
- [16] Zhang H W, Wen S T, Chen G R, Li Y X, Cao Z X, Li W 2012 *Chin. Phys. B* **21** 038701
- [17] Xie P, Dou S X, Wang P Y 2004 *Chin. Phys.* **13** 1569
- [18] Avik W G, Sanjay V K 2000 *Phys. Rev. Lett.* **84** 5243
- [19] Bao J D, Zhuo Y Z 1998 *Phys. Lett. A* **239** 228
- [20] Chen H B 2006 *The Cooperative Transport in Deterministic Ratchets* (Beijing: Beijing Normal University) [陈宏斌 2006 博士学位论文 (北京: 北京师范大学)]
- [21] Zheng Z G, Chen H B 2010 *Europhys. Lett.* **92** 30004
- [22] Schott D H, Collins R N, Bretscher A 2002 *J. Cell Biol.* **156** 35
- [23] Sakamoto T, Yildiz A, Selvin P R, Sellers J R 2005 *Biochemistry* **44** 16203
- [24] Zhou C, Kurths J, Hu B 2001 *Phys. Rev. Lett.* **87** 098101

# Directed transport of elastically coupled particles in a two-dimensional potential\*

Wu Wei-Xia<sup>1)</sup> Zheng Zhi-Gang<sup>2)†</sup>

1) (*Science Education Department, Beijing Institute of Graphic Communication, Beijing 102600, China*)

2) (*Department of Physics, Beijing Normal University, Beijing 100875, China*)

(Received 9 June 2013; revised manuscript received 15 August 2013)

## Abstract

A transport model of elastically coupled particles in a two-dimensional potential is investigated. Here, we propose that one dimension of the model is exerted by an AC drive and an external noise, and the other dimension by neither AC drive nor external noise. The effects of system and external parameters on the directed current under an overdamped case are discussed. The studies show that particles can transfer energy from one direction to its perpendicular direction through coupling, thereby producing a directed current. There is an optimal value of the spring free length or the coupling intensity at which the directed current can reach a maximum. For a fixed coupling intensity or noise intensity, the directed current will oscillate as the free length of spring varies, that is, multiple peaks appear. Moreover, a stochastic resonance appears in the directed current as noise intensity varies. Finally, when the degree of asymmetry of the ratchet potential achieves a maximum value, the current reversion takes place.

**Keywords:** elastic coupling, directed transport, stochastic resonance, current reversion

**PACS:** 05.10.Gg, 05.60.Cd

**DOI:** 10.7498/aps.62.190511

---

\* Project supported by the Science and Technology Project of Beijing Municipal Education Commission, China (Grant No. KM201110015004), the Funding Project for Academic Human Resources Development in Institutions of Higher Learning Under the Jurisdiction of Beijing Municipality, China (Grant No. PHR201108353), the Foundation of cultivating talents in Beijing City, China (Grant No. 2012D005004000005), the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 11075016), and the Specialized Research Fund for the Doctoral Program of Higher Education of China (Grant No. 20100003110007).

† Corresponding author. E-mail: zgzheng@bnu.edu.cn