一个跃变电路切换系统的振荡行为及分岔机理分析*

高超 毕勤胜 张正娣†

(江苏大学理学院, 镇江 212013)

(2012 年 7 月 5 日收到; 2012 年 8 月 1 日收到修改稿)

本文研究两个非线性电路系统通过开关组成的时间切换系统的复杂振荡行为及其产生机理. 利用开环运算放大器放大倍数为极大值的特性, 即运算放大器总是处于正的或负的饱和状态, 当输入电压从负过零变正时, 输出电压从正饱和状态跃变为负饱和状态, 本文选择子电路系统中的非线性部分为跃变函数. 首先对两个子系统进行了稳定性分析, 给出了不同参数条件下的振荡行为, 然后在子系统单个参数在一定范围内变化, 而其他参数保持不变的情况下, 研究了切换系统的复杂振荡特征, 并分析了其产生机理. 由于子系统方程的非光滑性和切换带来的整个系统的非光滑性, 使得整个系统的周期振荡轨迹有四个切换点, 随着参数的变化, 周期振荡轨线与非光滑分界面发生擦边分岔, 导致周期振荡分裂成两个对称的周期振荡. 并且研究了切换点位置改变对整个系统周期振荡行为的影响以及切换点处的分岔机理.

关键词: 跃变电路, 切换, 非光滑, 周期振荡

PACS: 05.45.–a **DOI:** 10.7498/aps.62.020504

1 引 言

切换系统的研究近些年来受到广泛的重视, 许多实际系统如汽车引擎控制系统 [1]、智能交通控制系统 [2]、电力系统 [3]、机器人控制系统 [4] 以及化工过程控制系统 [5] 等等, 均可以由切换系统来描述.

切换系统一般是由一族子系统和描述它们之间联系的切换规则组成, 即它至少包含两个子系统, 每个子系统对应着离散变量的一种取值, 子系统之间的切换表示离散事件动态 [6]. 因此, 它是一种特殊的非光滑系统 [7−9], 吸引了大批学者对其展开研究工作, 例如 Xu 和 Antsaklis 讨论了二阶切换系统特征值不同分布下系统可稳的充要条件和鲁棒控制问题, 并初步涉及了切换系统动态性能分析问题 [10,11]; Zhang 等研究了二阶切换系统的稳定性问题 [12]; Cheng 研究了子系统为线性系统的切换系统模型的稳定性 [13]; 吴天一和毕勤胜分析了切换电路系统的振荡行为及其非光滑分岔机理 [14]. 在目前的这些研究工作中, 大部分切换系统中的子系统是光滑系统, 很少涉及非光滑系统之间的切换系统的复杂行为及其机理研究.

本文考虑非光滑电路切换系统, 选择两个简单的跃变电路系统作为切换系统的子系统, 采用开关控制系统将两个子电路构成时间切换电路. 跃变电路 [15] 是一类典型的非光滑电路系统, 一个简单的跃变电路一般由电阻、电容、二极管 [16] 和运算放大器组成, 相对应模拟的非线性微分方程为 $\dddot{x}+A\ddot{x}+\dot{x}=G(x)$[17], 其中 $G(x)$ 是分段线性函数. 这类非线性电路是利用了运算放大器的内在非线性特性, 即理想放大器的开环特性, 当输入电压过零时理想放大器的输出将从负饱和值跃变到正饱和值, 属于常见非光滑系统中三类模型中的第二类, 即系统的向量场和其 Jacobian 矩阵均不连续, 但其状态空间连续, 如干摩擦系统 [18]. 跃变电路系统这种非光滑特性使得切换系统在切换时间内表现出丰富的动力学现象, 再加上切换导致的非光滑因素让整个切换系统变得更为复杂, 即在电路本身的非光滑因素和时间切换导致的非光滑因素共同作用

* 国家自然科学基金 (批准号: 10972091, 20976075) 和江苏大学高级人才基金 (批准号: 09JDG011) 资助的课题.

† 通讯作者. E-mail: dyzhang@ujs.edu.cn

下, 该切换电路系统表现出复杂的振荡行为.

2 电路模型

如图 1 所示, S 是一个双向开关, 当开关置于 a 端, 对应子系统 a; 当开关置于 b 端, 对应子系统 b. S 按照时间切换规则在子系统 a 与子系统 b 之间进行切换, 两个子电路都是简单的跃变电路, 仅由电阻、电容和运算放大器构成 [19]. 其中, 子电路 a 与 b 中的运算放大器的内在非线性特性用跃变非线性函数 $G(x)$ 来描述, 即当输入电压过零时理想放大器的输出电压将从负饱和值跃变到正饱和值. 子系统 a 与子系统 b 分别可由非线性微分方程来描述

$$\text{子系统a:}\quad \dddot{x} + A\ddot{x} + \dot{x} = G_1(x), \tag{1}$$

$$\text{子系统b:}\quad \dddot{x} + A\ddot{x} + \dot{x} = G_2(x). \tag{2}$$

由 (1) 和 (2) 式可得

$$\text{子系统a:}\quad \begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = z, \\ \dot{z} = -A_1 z - y + G_1(x), \end{cases}$$

$$t \in [n(T_1+T_2), n(T_1+T_2)+T_1]; \tag{3}$$

$$\text{子系统b:}\quad \begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = z, \\ \dot{z} = -A_2 z - y - G_2(x), \end{cases}$$

$$t \in [n(T_1+T_2)+T_1, (n+1)(T_1+T_2)], \tag{4}$$

其中

$$A_{1,2} \geqslant 0, \quad B_{1,2} > 0, \quad C_{1,2} > 0,$$

$$G_i(x) = B_i x - C_i \mathrm{sgn}(x), \quad (i = 1,2),$$

$$\mathrm{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0, \end{cases}$$

T_1, T_2 分别表示在子系统 a, b 中运动的周期.

当计时开始 $t = n(T_1+T_2), n \in N$ 时刻, 开关位于 a 端时, 切换系统在子系统 a 中振荡; 当 $t = n(T_1+T_2)+T_1, n \in N$ 时刻, 开关从 a 端切换至 b 端, 切换系统进入子系统 b 中振荡. 由于此切换系统中采用时间切换规则, 它决定了切换动作的发生, 这使得切换系统与一般的系统相比具有特殊性, 例如存在切换点, 所以整个系统的动力学行为不仅仅与子系统有关, 还与切换规则有密切的联系. 因此, 在研究切换系统的振荡行为特征时, 既要考虑各个子系统的稳定性, 还要考虑整个系统在时间切换规则下的稳定性.

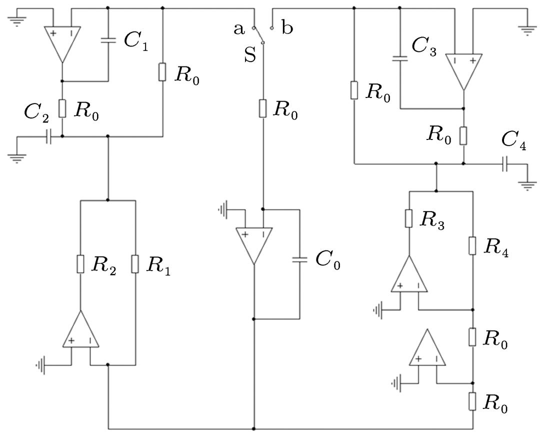

图 1 切换电路图

3 子系统的稳定性分析

子系统 a 存在一个非光滑分界面 $\Sigma = \{(x,y,z)\,|\,x=0\}$, 把相空间分成两个部分: $V_1 = \{(x,y,z)\,|\,x>0\}$, $V_2 = \{(x,y,z)\,|\,x<0\}$. 计算可得, 子系统 a 系统共存在三个平衡点, 即在 V_1 和 V_2 中存在一对对称的平衡点 $E_a^{\pm}(\pm C_1/B_1, 0, 0)$, 第三个平衡点 $E_a^0(0,0,0)$ 位于非光滑分界面上.

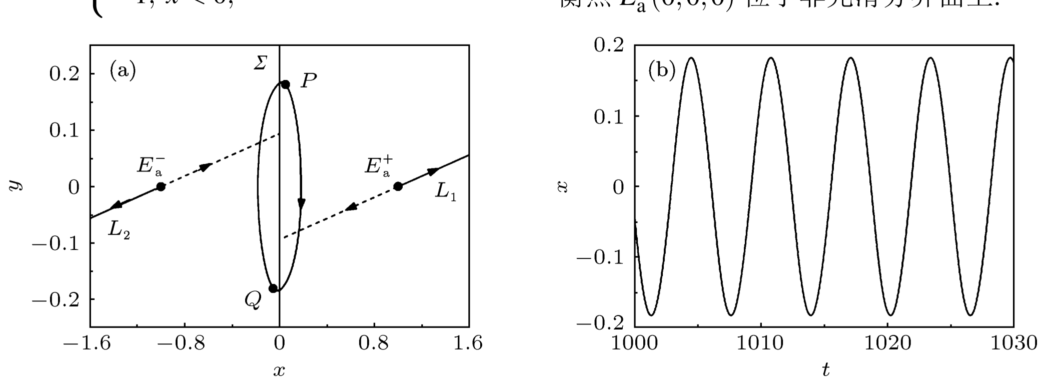

图 2 子系统 a 参数 $A_1 = 0.6, B_1 = 0.1, C_1 = 0.1$ 时 (a) 相图; (b) 时间历程图

经分析, 子系统 a 的平衡点 $E_a^{\pm}$ 的特征方程均为 $P_a(\lambda)=\lambda^3+A_1\lambda^2+\lambda-B_1=0$, 即平衡点 $E_a^{\pm}$ 的稳定性相同. 根据 Routh-Hurwitz 判断定理可知, 当 $A_1>0, B_1<0, A_1+B_1>0$ 时, 平衡点是稳定的, 但是由于受到条件 $A_1\geqslant 0, B_1>0, C_1>0$ 的约束, 此时系统 a 的平衡点 $E_a^{\pm}$ 都不稳定, 如取参数 $A_1=0.6$, $B_1=0.1, C_1=0.1$ 时, 平衡点 $E_a^{\pm}$ 为 $(\pm1.0,0,0)$, 特征值 $\lambda_1=0.094$, $\lambda_{2,3}=-0.347\pm0.972\mathrm{i}$, $E_a^{\pm}$ 是一对对称的鞍焦点. 如图 2 所示, 在非光滑分界面 Σ 右侧 V_1 中, 当轨线振荡至 E_a^{+} 右端 L_1 上时, 轨迹将沿着 L_1 朝其正方向发散; 当轨线振荡至 E_a^{+} 左端 L_1 上时, 轨迹将沿着 L_1 朝其负方向运动, 直至越过非光滑分界面 Σ. 根据 $E_a^{\pm}$ 的特征方程, V_1 和 V_2 中的向量场关于原点对称, 故在 V_2 中, 轨线受到 E_a^{-} 影响, 运动情况与在 V_1 中类似. 若以 P 为起点, 受到 E_a^{+} 向量场的影响, 轨迹朝下向 E_a^{+} 左端的 L_1 振荡, 在未振荡至 L_1 之前, 轨线穿过 Σ 运动到点 Q, 由于非光滑分界面 Σ 两侧的向量场关于原点中心对称, 轨线将以 $\widehat{PQ}$ 相同的方式穿过 Σ 回到 P 点, 形成一个沿顺时针方向运动的周期振荡, 且周期 T_a 约为 6.3.

若取初值 S_1 为 $(1.0204,0,0)$ 时, 如图 3 所示, 初值点在周期解的吸引域 [20] 之外, 轨线振荡至 $E_a^{+}(1,0,0)$ 左端 L_1 上后, 轨迹沿着 L_1 朝其正方向发散; 若当初值 S_1 为 $(0.9890,0,0)$ 时, 初值点在周期解吸引域之内, 轨线将沿着 L_1 朝其负方向运动至周期轨道上.

子系统 b 与子系统 a 形式大致相同, 唯一的不同点是平衡点 $E_b^{\pm}$ 的特征方程为 $P_b(\lambda)=\lambda^3+A_2\lambda^2+\lambda+B_2=0$, 使得子系统 b 的分岔特性与子系统 a 的相差很大. 根据 Routh-Hurwitz 判断定理可知, 当 $A_2>0, B_2>0, A_2-B_2>0$ 时, 子系统 b 的平衡点 $E_b^{\pm}$ 是稳定的.

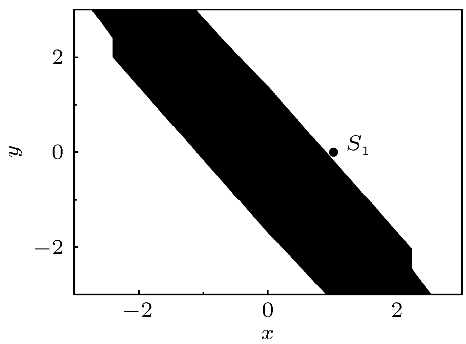

图 3 黑色部分是周期解的吸引域在 xoy 平面上的投影

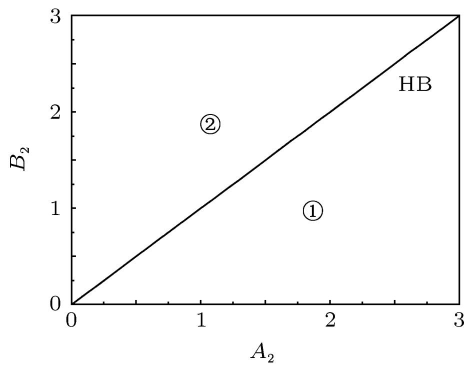

图 4 子系统 b 在参数 (A_2,B_2) 平面上的分岔集

由上分析可知, 平衡点 $E_b^{\pm}$ 的稳定性由参数 A_2 与 B_2 的大小来决定, 如图 4 给出参数 (A_2,B_2) 平面上的分岔集. HB 分岔线 $A_2-B_2=0$ 将参数 (A_2,B_2) 平面分成两个区域①和②, 在区域①中, 存在两个稳定的焦点. 现取子系统 b 的参数 $C_2=0.9$. 当 $A_2=2.0$, $B_2=0.972$ 时, 存在一对对称的焦点 $E_b^{\pm}$ 为 $(\pm0.926,0,0)$.

当参数穿过 HB 分岔线时, 平衡点 $E_b^{\pm}$ 产生 Hopf 分岔, 形成两个中心, 导致在区域②中存在不稳定的周期解, 且相关频率 $\Omega_{\pm}=1$, 如当 $A_2=2$, $B_2=2.001$ 时, 其中不稳定的焦点为 $E_b^{\pm}(\pm0.449,0,0)$, 如图 5 所示, 周期解的频率与 Hopf 分岔相一致, 即 $\Omega_{\pm}=1.001$.

取定 $A_2=2$, 随着 B_2 的值不断增大, 两个对称的平衡点 $E_b^{\pm}$ 之间距离不断减小, 围绕它们产生的不稳定周期振荡轨迹在相空间不断靠近, 当 $B_2=2.025$ 时, 在非光滑分界面处, 两个对称的中心最外层的轨迹开始碰撞, 如图 6 所示, 当 $B_2=2.5$ 时, $E_b^{\pm}(\pm0.36,0,0)$, 当周期振荡完全碰撞结束时, 产生一个新周期振荡.

4 切换系统的振荡行为以及相对应的振荡机理

切换系统由子系统 a 和子系统 b 两部分构成, 通过双向开关 S 使得系统在子系统 a 和子系统 b 之间来回切换, 即首先在子系统 a 中振荡, 运动时间 T_1 后, 到达第一个切换点, 进入子系统 b, 经过时间 T_2, 到达第二个切换点, 切换系统又重新进入 a 系统, 如此循环往复进行.

取定参数 a: $A_1=0.6$, $B_1=0.1$, $C_1=0.1$, b: $A_2=2.0$, $C_2=0.9$, $T_1=50$, $T_2=500$. 显然, 子系统

a 的参数已经确定, 即其特性固定不变; 对于子系统 b, 稳定性由 A_2 与 B_2 的大小关系来决定, 现已取定子系统 b 的参数 $A_2 = 2.0$, 讨论参数 B_2 的变化对整个切换系统振荡行为的影响.

从子系统 b 的稳定性分析可知, 当 $0 < B_2 < 2$ 时, 子系统 b 存在稳定的焦点 $E_{\mathrm{b}}^{\pm}$, 切换系统表现为周期解与焦点之间的切换; 当 $B_2 > 2$ 时, 子系统 b 存在鞍焦点 $E_{\mathrm{b}}^{\pm}$, 切换系统表现为周期解与周期解之间切换.

为了解释系统在切换点处的切换机理, 我们首先给出以下结论 [21]:

定理 若 $p^*(1)p^{**}(1) > 0 \Leftrightarrow \sigma_{+1}^* + \sigma_{+1}^{**}$ 为偶数成立, 即在边界两侧单位圆内外特征值的个数不发生变化, 则经过边界碰撞分岔点, 边界一侧的不动点 M^* 将转换为边界另一侧的不动点 M^{**}, 称为非光滑的连续转换. 其中 M^*, M^{**} 分别为边界两侧的不动点, $p^*(\lambda)$, $p^{**}(\lambda)$ 分别为边界两侧的特征多项式, $\{\lambda_i^*\}$, $\{\lambda_i^{**}\}$, $i = 1, 2, \cdots, n$ 分别为边界两侧的特征值. σ_{+1}^* 和 σ_{-1}^* 分别表示 $\{\lambda_i^*\} > 1$ 和 $\{\lambda_i^*\} < -1$ 的特征值个数, σ_{+1}^{**} 和 σ_{-1}^{**} 分别表示 $\{\lambda_i^{**}\} > 1$ 和 $\{\lambda_i^{**}\} < -1$ 的特征值个数.

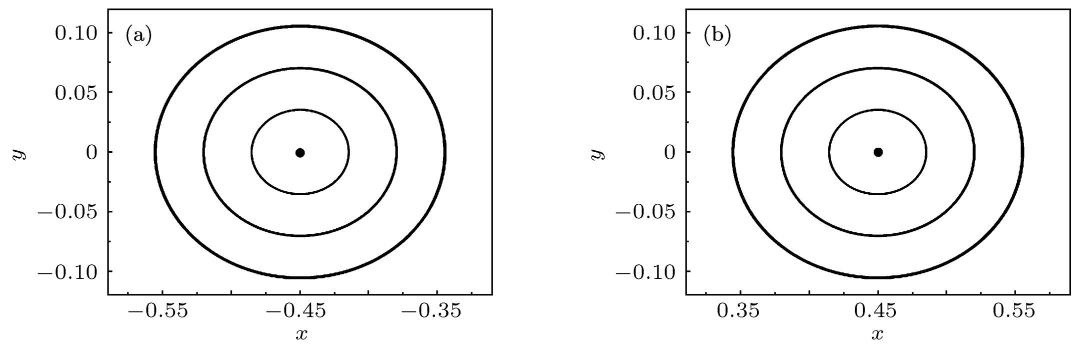

图 5 当 $B_2 = 2.001$ 时, (a) 和 (b) 为围绕平衡点 $E_{\mathrm{b}}^{\pm}$ 的周期解

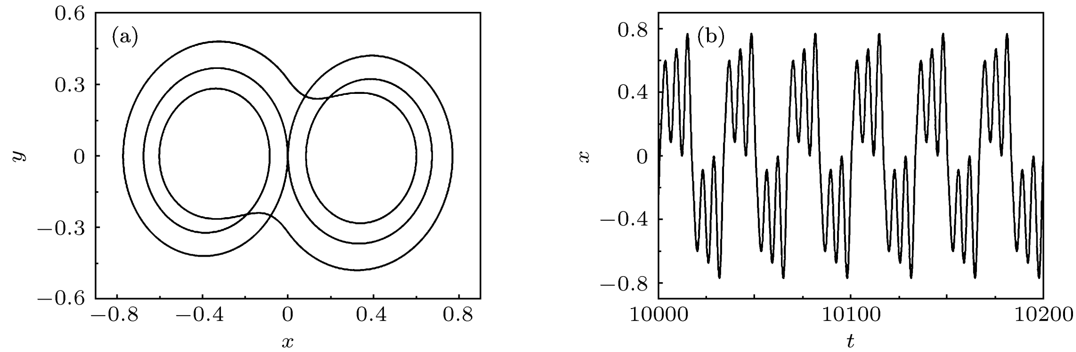

图 6 $B_2 = 2.5$ 时周期振荡 (a) 相图; (b) 时间历程图

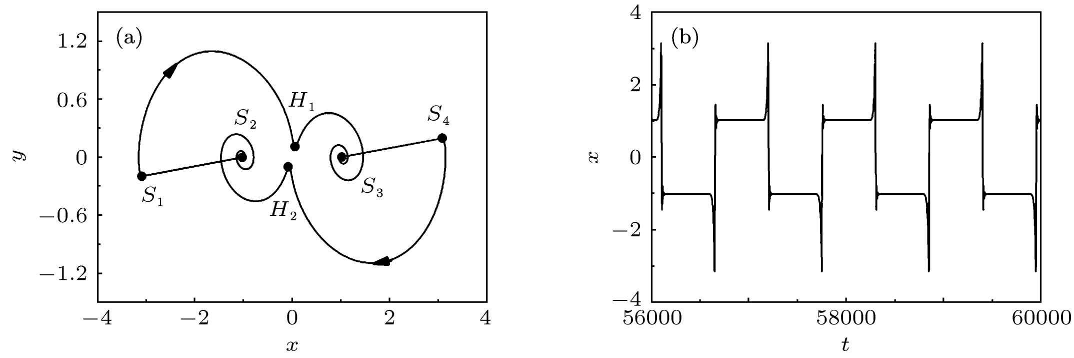

图 7 $B_2 = 0.882$ 时周期 $2(T_1 + T_2)$ 振荡 (a) 相图; (b) 时间历程图

当 $B_2 = 0.8820$ 时, 子系统 b 存在稳定的焦点 $E_b^{\pm}(\pm 1.0204, 0, 0)$, 对应特征值为 $\lambda_1 = -1.7168$, $\lambda_{2,3} = -0.1416 \pm 0.7026\mathrm{i}$, 如图 7(a) 所示, 切换系统表现为周期振荡, 周期为 $2(T_1 + T_2)$, 具有四个切换点: $S_{1,4}(\pm 3.0891, \pm 0.1961, \pm 0.0184)$, $S_{2,3}(\pm 1.0204, 0, 0)$, 且切换点 S_3 和 S_2 正好是子系统 b 的一对对称的焦点 $E_b^{\pm}$, 结合图 7(a) 和 (b) 可知, 切换系统以 S_2 为起点, 记 $t = 0$, 系统开始在子系统 a 中振荡, 由于 S_2 在子系统 a 的周期解吸引域外, 如图 2(a) 所示, 受到不稳定焦点 E_a^- 的排斥作用, 轨迹振荡至 L_2 并沿着 L_2 朝其负方向运动, 即沿着轨线 $\widehat{S_2S_1}$ 运动. 但是, 受到时间切换规则的限制, 运动到时刻 $t = T_1$ 时, 到达点 S_1, 切换系统转入子系统 b 中, 在相空间 $V_2 = \{(x, y, z)\,|\,x < 0\}$ 中, 以 S_1 为起点, 在时间 $[T_1, T_1 + T_2]$ 内, 受到子系统 b 的焦点 E_b^- 吸引作用, 顺时针方向沿着轨迹 $\widehat{S_1H_1}$ 朝焦点 E_b^- 逼近, 运动至点 H_1 时, 轨迹穿过非光滑分界面, 进入 V_1 的向量场, 朝 V_1 中稳定的焦点 E_b^+ 逼近, 运动至点 S_3, 即 E_b^+. 根据定理可知, 在这段时间内, 发生非光滑的连续转换. 因为子系统 b 的平衡点 $E_b^{\pm}$ 的特征方程 $P_b^+(\lambda) = P_b^-(\lambda) = P_b(\lambda)$, 故 $P_b^+(1)P_b^-(1) = P_b^2(1) = 4.882^2 > 0$, 且显然 $\sigma_{+1}^* + \sigma_{+1}^{**}$ 为偶数, 即在非光滑分界面 $\Sigma = \{(x, y, x)\,|\,x = 0\}$ 两侧的单位圆内外特征值个数不发生改变, 则经过边界碰撞分岔点, 边界 Σ 一侧的平衡点 E_b^- 将转换为边界另一侧的平衡点 E_b^+. 此时, 由于切换时间 T_2 大于系统沿轨迹 $\widehat{S_1S_3}$ 从 S_1 运动到点 S_3 的时间, 所以如图 7(b) 时间历程图所示, 在时间 $[t, T_1 + T_2]$ 内, 轨迹停留在点 S_3, 直至 $t = T_1 + T_2$ 时, 受到时间切换条件作用, 切换系统又再次进入子系统 a, 这时以 S_3 为新的起点; 当 $t = 2(T_1 + T_2)$ 时, 轨迹正好回到 S_2, 由于 $S_{1,4}$ 和 $S_{2,3}$ 是两对关于原点对称的点, 所以轨迹 $\widehat{S_3S_4S_2}$ 与 $\widehat{S_2S_1S_3}$ 关于原点对称, 且恰好完成一个周期为 $2(T_1 + T_2)$ 的周期振荡.

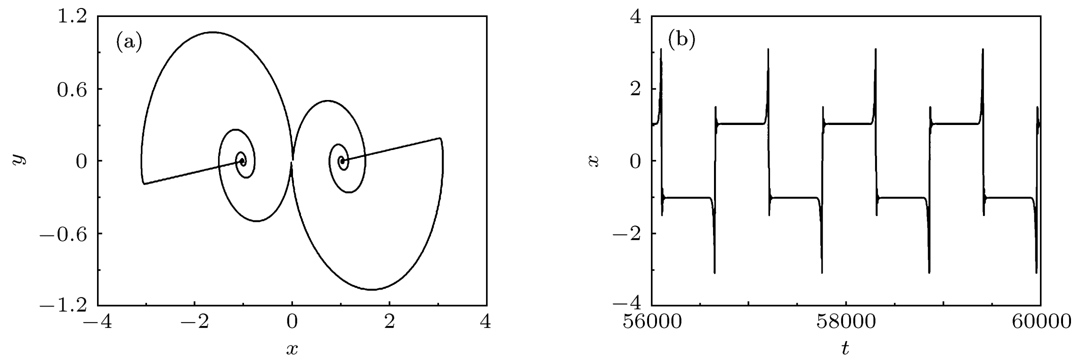

图 8 $B_2 = 0.8825$ 时周期 $2(T_1 + T_2)$ 振荡 (a) 相图; (b) 时间历程图

随着子系统 b 参数 B_2 的增大, 焦点 $E_b^{\pm}$ 逐渐向子系统 a 的焦点 $E_a^{\pm}$ 靠近. 如图 8 所示, 取 $B_2 = 0.8825$ 时, 切换系统表现为周期振荡, 切换点为 $S_{1,4}(\pm 3.0299, \pm 0.1906, \pm 0.0179)$、$S_{2,3}(\pm 1.0198, 0, 0)$, $E_b^{\pm}$ 为 $(\pm 1.0198, 0, 0)$, 特征值为 $\lambda_1 = -1.7169$, $\lambda_{2,3} = -0.1415 \pm 0.7028\mathrm{i}$. 从数值上相对于 $B_2 = 0.8820$ 时, 虚特征值实部从 -0.1416 变化至 -0.1415, 虚部从 0.7026 增加到 0.7028, 特征值的变化幅度较小. 在 V_2 中, 根据图 2(a) 可知, 从子系统 b 切换至子系统 a 时, 切换点 S_2 距离焦点 E_a^- 越近, 在子系统 a 中运行时发散得越慢. 即距离 S_2S_1 在切换时间 T_1 内从 2.0781 减小至 2.0192, 对振荡轨迹产生决定性的影响, 导致点 H_1 与 H_2 的距离减小. 随着参数 B_2 的继续增大, 系统轨线与分界面 Σ 仅相交于一点, 即系统轨线与分界面 Σ 相切, 发生擦边分岔. 当 B_2 增大至 0.8826 时, 点 H_1 与 H_2 碰撞后消失, 产生了两个对称的周期振荡, 如图 9(a), (b) 所示.

由上分析可知, 四个切换点 S_1, S_2, S_3, S_4 将切换系统分成四个部分, 且 $S_{1,4}$ 和 $S_{2,3}$ 是关于原点对称的点. 由于切换系统同时受到两个子系统和时间切换规则的控制, 所以在切换时间内, 系统往往朝各个子系统的稳定解运动. 但是显然, 当子系统 b 参数 $B_2 = 0.8820$ 时, 在子系统 a 中运动的时候, 没有朝稳定的周期解运动, 反而朝相反方向发散出去, 这是因为切换点 $S_{2,3}$ 即子系统 a 的起点正好处于子系统 a 周期解的不稳定区域, 又受到切换时间的限制, 运动时间 T_1 后, 转向子系统 b 稳定的焦点逼近, 继而表现为周期振荡. 故当参数 $B_2 < 0.9$ 时, 即切换系统的子系统 a 的起点在 E_a^- 负方向或者

E_a^+ 正方向时, 切换系统在子系统 b 中振荡时穿过非光滑分界面, 直至参数 $B_2 = 0.8226$ 时, 非光滑分界面两个尖点 H_1 与 H_2 发生碰撞, 导致切换系统周期振荡发生分裂, 周期从 $2(T_1+T_2)$ 变化为 T_1+T_2.

当 $B_2 = 0.9$ 时, 切换系统只有一个切换点, 此时因为子系统 a 与子系统 b 的平衡点重合, 都为 $(\pm 1.0, 0, 0)$, 轨迹表现为一点.

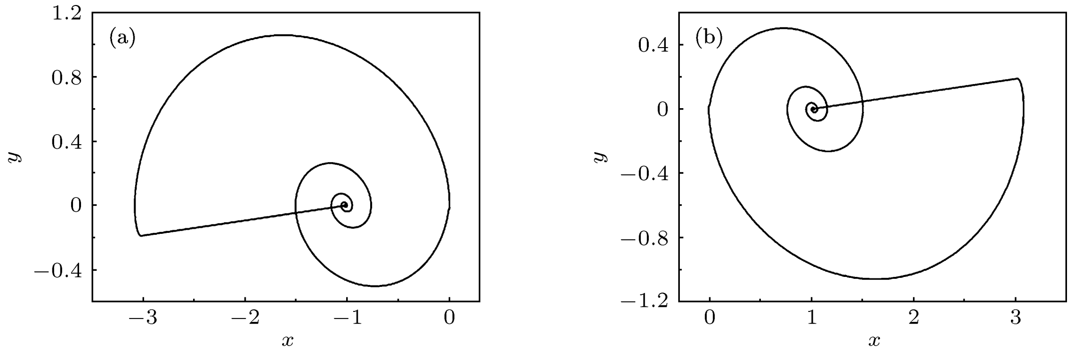

图 9　$B_2 = 0.8826$ 时周期 T_1+T_2 (a) V_2 中的相图; (b) V_1 中的相图

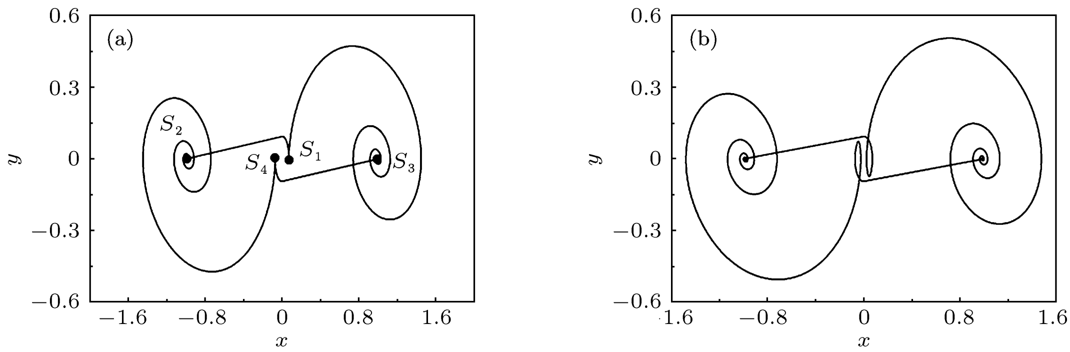

图 10　切换系统的周期 $2(T_1+T_2)$ (a) $B_2 = 0.910$; (b)$B_2 = 0.9105$

当 $B_2 > 0.9$ 时, 子系统 b 的焦点 $E_b^\pm$ 坐标远离子系统 a 的焦点 $E_a^\pm$, 到达 $E_a^\pm$ 内侧. 取 $B_2 = 0.9100$ 时, 切换系统仍表现为周期振荡, 且周期为 $2(T_1+T_2)$, 但是切换点变为 $S_{1,4}$ $(\pm 0.0728, \mp 0.0048, \mp 0.1249)$、$S_{2,3}$ $(\mp 0.9890, 0, 0)$, 其中 $S_{2,3}$ 恰好是子系统 b 的焦点 $E_b^\pm$, 切换系统周期振荡轨迹发生明显变化. 这主要是由子系统 a 的周期解吸引域导致的. 如图 10(a), 当双向开关 S 位于 a 端时, 切换系统以 S_2 为起点, 进入子系统 a 中振荡, 根据前面子系统 a 的稳定性分析可知, S_2 处于子系统 a 的周期解吸引域内, 轨线振荡至 E_a^- 右端 L_2 上, 将沿着 L_2 朝其负方向运动; 当 $t = T_1$ 时, 轨迹穿过非光滑分界面 Σ, 到达点 S_1, 进入向量场 V_1 中. 受到时间切换条件的限制, 切换系统以 S_1 为起点, 在时间 $[T_1, T_1+T_2]$ 内, 进入子系统 b 中振荡, 到达点 S_3. 由于轨迹 $\widehat{S_2S_1S_3}$ 与 $\widehat{S_3S_4S_2}$ 关于原点对称, $\widehat{S_3S_4S_2}$ 的运动情况不再累述. 取 $B_2 = 0.9105$ 时, 如图 10(b) 所示, 切换系统在子系统 a 中振荡时, 轨迹 $\widehat{S_2S_1}$ 已经明显进入子系统 a 的周期轨道, 但只穿过一次非光滑分界面; 当参数 $B_2 = 0.9140$ 时, 如图 11(a), (b) 所示, 轨迹 $\widehat{S_2S_1}$ 穿过两次非光滑分界面, 切换点 S_1 再次回到 V_2 中, 此时在 V_1, V_2 中具有独立的周期为 T_1+T_2 的周期振荡.

随着子系统 b 参数 B_2 继续增大, 子系统 b 的焦点 $E_b^\pm$ 坐标远离 $E_a^\pm$ 不断向原点靠近, 且 $E_b^\pm$ 为切换系统的切换点 $S_{2,3}$, 此时 $S_{2,3}$ 处于子系统 a 周期解的吸引域, 故在相同时间 T_1 内, 以 S_2 为起点的切换系统轨迹 $\widehat{S_2S_1}$ 不断增大, 且沿着子系统 a 的周期轨道运动. 当轨迹 $\widehat{S_2S_1}$ 奇数次穿过周期轨道时, 整个切换系统表现类似如图 10(a) 的周期为 $2(T_1+T_2)$ 的周期振荡; 当轨迹 $\widehat{S_2S_1}$ 偶数次穿过周期轨道时, 切换系统在 V_1, V_2 中具有独立的周期为 T_1+T_2 的周期振荡, 如图 11(a), (b), 这完全是由切换点 S_1, S_4 处于不同的向量场, 受到不同的焦点 $E_b^\pm$ 吸引导致的.

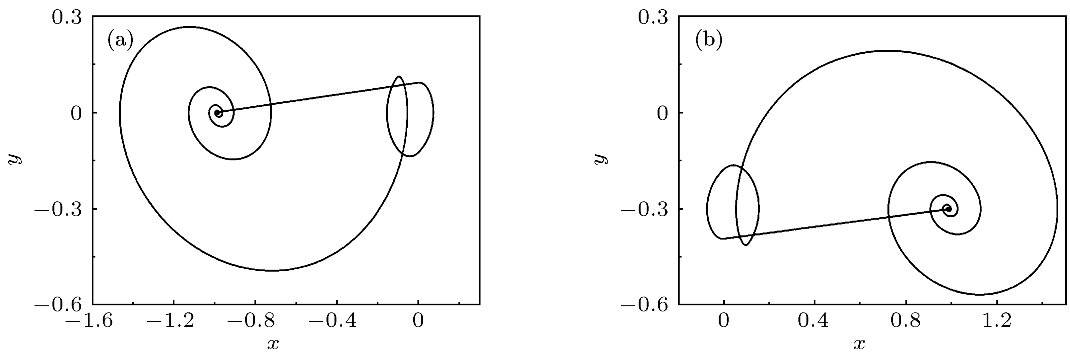

图 11 $B_2 = 0.914$ 时周期 $T_1 + T_2$ (a) V_2 中的相图; (b) V_1 中的相图

5 结 论

在所讨论的参数范围内, 切换系统表现为周期振荡, 整个切换周期振荡具有明显的非光滑特点, 其中包括切换导致的切换点, 以及子系统本身的非光滑性产生的尖点. 通过改变子系统的参数, 发现切换系统的周期振荡机制也相应改变. 起先切换系统表现为周期振荡是由于起点处于子系统 a 周期解的吸引域外, 背离周期解运动, 但是受到切换规则的限制, 运动时间 T_1 后进入另子系统 b 中, 在时间 T_2 内轨迹穿过非光滑分界面, 发生非光滑的连续转换, 产生尖点, 且伴随着参数的增大, 在 T_2 内的运动轨迹与非光滑分界面相切, 发生擦边分岔; 当参数增大到一定程度时, 周期振荡机制发生变化, 周期振荡轨迹明显地表现为周期解与焦点之间的切换系统, 这时切换系统的起点处于子系统 a 周期解的吸引域内, 在切换时间 T_1 内朝其周期解运动, 在时间 T_2 内受到子系统 b 焦点的吸引作用, 系统轨迹朝焦点运动且到达焦点. 显然, 切换系统与以往单个系统有很不相同, 因此, 在研究切换系统的振荡机理时, 不仅仅得分析子系统的振荡特性, 还得结合切换规则, 分析子系统和切换规则两者对整个切换系统的振荡特性的影响.

[1] Wyczalek F A 2001 *IEEE Aerospace and Electronics Systems Magazine* **16** 15

[2] Varaiya P P 1993 *IEEE Transactions on Automatic Control* **38** 195

[3] Dalvi A, Guay M 2009 *Control Engineering Practice* **17** 924

[4] Yildirim H, Frank G, Bernard B 2004 *Automatica* **40** 1647

[5] Yoshiyasu S, Masaru N, Hirokazu N, Yoshiyuki Y, Masatoshi Y, Sigeru M 2006 *Computer Aided Chemical Engineering* **21** 1515

[6] Sun Z D, Zheng D Z 2001 *IEEE Transactions on Automatic Control* **46** 291

[7] Leine R I 2006 *Physica* D **223** 121

[8] Guo S Q, Yang S P, Guo J B 2005 *Journal of Vibration Engineering* **18** 276 (in Chinese) [郭树起, 杨绍普, 郭京波 2005 振动工程学报 **18** 276]

[9] Li S L, Zhang Z D, Wu T Y, Bi Q S 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 060504 (in Chinese) [李绍龙, 张正娣, 吴天一, 毕勤胜 2012 物理学报 **61** 060504]

[10] Xu X P, Antsaklis P J 2000 *International Journal of Control* **73** 1261

[11] Hu B, Xu X, Antsaklis P J 1999 *Systems & Control Letters* **38** 197

[12] Zhang L G, Chen Y Z, Cui P Y 2005 *Nonlinear Analysis* **62** 1527

[13] Cheng D Z 2003 *Systems & Control Letters* **51** 79

[14] Wu T Y, Zhang Z D, Bi Q S 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 070502 (in Chinese) [吴天一, 张正娣, 毕勤胜 2012 物理学报 **61** 070502]

[15] Lu T X 2002 *Overview of Nonlinear Physics* (Hefei: China University of Science and Technology Press) p173 (in Chinese) [陆同兴 2002 非线性物理概论 (合肥: 中国科技大学出版社) 第 173 页]

[16] Contou-Carrere M N, Daoutidis P 2005 *IEEE Transactions on Automatic Control* **50** 1831

[17] Sprott J C 2000 *Physics Letters* A **266** 19

[18] Galvenetto U 2001 *Journal of Sound and Vibration* **248** 653

[19] Zhang X G, Ma Y D, Li S L 2011 *Nonlinear Circuit: Basic Analysis and Design* (Beijing: Higher Education Press) p18 (in Chinese) [张新国, 马义德, 李守亮 2011 非线性电路: 基础分析与设计 (北京: 高等教育出版社) 第 18 页]

[20] Gao W H, Guo X, Jiang J 2011 *Journal of Dynamics and Control* **9** 363 (in Chinese) [高文辉, 郭旭, 江俊 2011 动力学与控制学报 **9** 363]

[21] Qin Z Y, Lu Q S 2009 *Journal of Vibration and Shock* **28** 80 (in Chinese) [秦志英, 陆启韶 2009 振动与冲击 **28** 80]

The oscillation and bifurcation of a switching system composed of jump circuits*

Gao Chao Bi Qin-Sheng Zhang Zheng-Di†

(*Faculty of Science, Jiangsu University, Zhenjiang* 212013, *China*)

(Received 5 July 2012; revised manuscript received 1 August 2012)

Abstract

The complex dynamical evolution of a circuit system composed of two nonlinear circuit subsystems, which is switched by a periodic switching, is investigated. According to the fact that the magnification of an open-loop operational amplifier is maximum magnification, namely, the operational amplifier is always in a positive or negative saturated state, when an input voltage becomes positive from negative through zero, the output voltage jumps from the positive saturation into negative saturation. In this paper the jump function is selected as a nonlinear part in subsystems. Firstly through the stability analysis of the subsystems, their oscillation behaviors in the parameter space are given correspondingly. Secondly the complex oscillation behavior and mechanism of the switched system are discussed in the parameter space of one subsystem. The periodic orbit of the switched system is divided into four parts, influenced by non-smooth characteristics of the subsystems and switching. With the variation of the parameters, grazing bifurcation appears, and then the whole periodic orbit is separated into two symmetrical periodic oscillations. Finally the convesion of switching points into the periodic oscillation is given,and the mechanism at switching point is discussed.

Keywords: jump circuit, switch, non-smooth, periodic oscillation

PACS: 05.45.–a **DOI:** 10.7498/aps.62.020504

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 10972091, 20976075), and the Senior Qualified Personal Foundation of Jiangsu University, China (Grant No. 09JDG011).

† Corresponding author. E-mail: dyzhang@ujs.edu.cn