

三维超混沌映射拓扑马蹄寻找算法及应用*

李清都^{1)2)†} 唐宋²⁾

1) (重庆邮电大学工业物联网与网络化控制教育部重点实验室, 重庆 400065)

2) (重庆邮电大学非线性系统研究所, 重庆 400065)

(2012年7月15日收到; 2012年8月21日收到修改稿)

拓扑马蹄理论是严格研究混沌的重要理论, 然而却很少用在超混沌的研究中. 主要原因是超混沌系统不仅相空间维数比普通混沌高, 而且存在的拉伸方向数也较多, 导致拓扑马蹄的寻找难度很大. 为此, 本文针对三维超混沌映射, 提出一种实用的拓扑马蹄寻找算法. 超混沌系统通常有较大的负 Lyapunov 指数, 其吸引子会靠向某一曲面. 基于这种特性, 本文首先沿着系统收缩方向进行降维, 得出二维平面投影系统; 接着在新系统中搜索二维拉伸的投影马蹄; 最后利用投影马蹄升维构造出原三维系统拓扑马蹄. 为了验证算法的有效性, 本文以经典 Lorenz 超混沌系统和著名 Saito 超混沌电路为例, 利用数值计算, 在它们的 Poincare 映射中找出了具有二维拉伸的三维拓扑马蹄.

关键词: 超混沌, 拓扑马蹄, Saito 超混沌系统, Lorenz 超混沌系统

PACS: 05.45.Jn, 05.45.Pq

DOI: 10.7498/aps.62.020510

1 引言

超混沌是指具有多个正 Lyapunov 指数 (Lyapunov exponents, LE) 的混沌现象^[1]. 与只有一个正 Lyapunov 指数的普通混沌相比, 因为它在相空间中存在多个方向上的拉伸, 从而表现出更加复杂的动力学行为. 因此, 超混沌信号有着更强的随机性, 在众多混沌应用上被认为更有优势. 超混沌系统的研究得到了学术界和工程界越来越多的关注. 近年来, 人们不仅发现了大量的超混沌系统, 实现了超混沌的控制^[2,3]与同步^[4,5], 而且还成功应用在随机数产生^[6]、混沌通信^[7]、信息安全^[8]等许多重要领域. 而在这些研究和应用之前, 人们必须确保系统确实是超混沌. 因此, 超混沌行为的准确判定, 进而对其产生机理的揭示, 有着重要的基础研究价值.

目前, 超混沌判定的主要方法就是计算 Lyapunov 指数. 但难以避免的数值误差使其不够严格. 误差来源主要有三种: 1) 数值仿真误差使所求轨道与理论轨道不一致, 从而产生偏离误差, 在处理

非一致双曲动力系统时, 这种误差尤其明显; 2) Lyapunov 指数算法本身的误差; 3) 以有限时间代替无穷时间做平均值, 产生轨道截断误差. 对于时间连续的超混沌系统, 与 0 相邻的那个正 Lyapunov 指数往往非常接近 0; 这时就很难做出准确判定.

基于拓扑马蹄研究方法, 被认为严格有效^[9-11]. 它通过数值和理论相结合, 利用符号动力学从不变集上研究刻画混沌, 不仅能够给出严格数学证明, 而且还能揭示其动力学机理^[12-14]. 自 Li 和 Yang^[15] 将拓扑马蹄引入超混沌系统的判定以来, 其在超混沌研究中的重要作用正逐步显现, 利用二维拉伸马蹄, 一些重要系统的超混沌行为的产生机理得到严格分析, 其混沌存在性得到了数学上的严格判定, 例如 MCK 超混沌电路^[16], 超混沌 Henon 映射^[17], Rossler 超混沌系统^[18]、双耦合文桥振子系统^[19]、以及宇航器电源系统^[20]等. 然而, 这些成果只是案例性研究, 并没有提出通用算法. 其原因是, 相对于普通混沌系统, 超混沌系统正 Lyapunov 指数的个数 ≥ 2 , 系统拉伸的维数更多, 系统结构更加复杂, 因此在相空间中寻找拓扑马蹄

* 国家自然科学基金 (批准号: 10972082, 61104150)、重庆市科委基金 (批准号: cstcjjA40044) 和重庆邮电大学博士启动金 (批准号: A2009-12) 资助的课题.

† 通讯作者. E-mail: liqd@cqupt.edu.cn

更为困难.

为此, 本文针对三维超混沌映射 (含四维时间连续系统的 Poincare 映射), 提出一种基于相空间“降维—升维”的拓扑马蹄寻找算法, 然后分别对经典 Lorenz 超混沌系统和著名 Saito 超混沌发生器进行数值研究.

2 拓扑马蹄理论介绍

下面我们先简要回顾一个非常适用于多维拉伸的拓扑马蹄定理与判定条件. 首先, 我们介绍一些基本条件和定义, 并“截隔”的概念, 这个概念在综述论文 [21] 中被称作“余维穿过”.

令 X 是度量空间, B 是 X 的紧子集, B 中存在 m 个完全不相交的连通子集 B_1, B_2, \dots, B_m , 这里 $1 \leq i \leq m$. 对于任意集合 B_i , 令 B_i^1 和 B_i^2 为边界 ∂B_i 上两个互不相交的非空紧子集, 映射 $f: B \rightarrow X$ 在 B_i 上连续.

定义 1 [22] 设 Γ 为 B_i 的紧子集, 对于任意连通子集 $l \subset B_i$ 且 $B_i^1 \xrightarrow{l} B_i^2$, 若 $l \cap \Gamma \neq \emptyset$, 则称 Γ 完全截隔 B_i^1 和 B_i^2 , 表示为 $\Gamma \downarrow (B_i^1, B_i^2)$.

定义 2 [18] 设 Γ 为 B_i 的紧子集, 若 Γ 存在一个紧子集 Γ' , 使 $f(\Gamma') \downarrow (B_j^1, B_j^2)$, 我们称 $f(\Gamma)$ 截隔 B_j , 记为 $f(\Gamma) \mapsto B_j$. 若对于满足 $\Gamma \downarrow (B_i^1, B_i^2)$ 的任意紧子集 $\Gamma \subset B_i$ 都有 $f(\Gamma) \mapsto B_j$, 那么对于两对集合 $(B_i^1, B_i^2), (B_j^1, B_j^2)$ 而言, 我们称 $f(B_i)$ 截隔 B_j (如图 1), 记为 $f(B_i) \mapsto B_j$.

定理 1 假设 i, j, k 为 1 到 m 之间的整数, 如果映射 $f: B \rightarrow X$ 和 $g: B \rightarrow X$ 满足 $f|B_i, g|B_i$

是同胚映射, 并且 $f(B_i) \mapsto B_j$ 和 $g(B_j) \mapsto B_k$, 那么 $g \circ f(B_i) \mapsto B_k$.

根据上述定理, 不难看出, 这里的“截隔”具有传递性, 该性质不仅有助于拓扑马蹄的寻找, 还能得出下面定理和推论, 证明见文献 [19].

定理 2 [18,21] 如果 $f: B \rightarrow X$ 映射满足对于任意 $1 \leq i, j \leq m, f(B_i) \mapsto B_j$ 恒成立, 那么必然存在一个紧不变集 $K \subset B$, 使 $f|K$ 半共轭于 m 移位映射, 且有 $\text{ent}(f) \geq \log m$.

推论 1 [21] 如果 B 存在两个完全不相交的紧子集 B_1 和 $B_2, f^m|B_1$ 和 $f^n|B_2$ 是微分同胚, 这里 m 和 n 是正整数, 并且 $f^m(B_1) \mapsto B_1, f^m(B_1) \mapsto B_2$ 且 $f^n(B_2) \mapsto B_1$ (如图 2). 那么存在一个紧不变子集 $K \subset B$ 使 $f^{2m+n}|K$ 半共轭于 2 位移动映射, 并且拓扑熵为 $\text{ent}(f) \geq \frac{1}{2m+n} \log 2$.

在使用拓扑马蹄理论时, 定理 2 条件较强, 估计出的拓扑熵较接近真实值, 而推论 1 的判定条件较弱, 易于拓扑马蹄的寻找, 可用在混沌判定上.

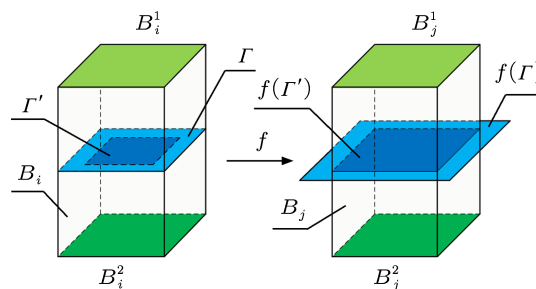


图 1 “截隔”在三维空间中的示意图

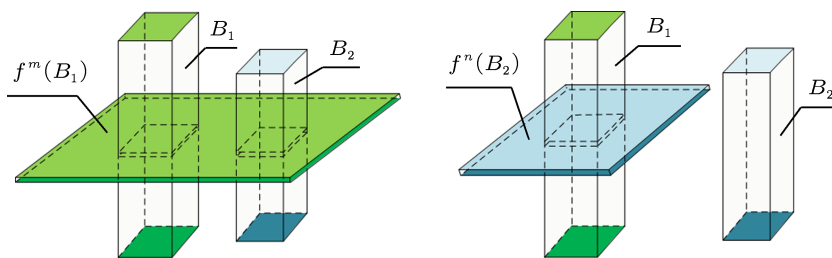


图 2 推论 1 所述判定条件示意图

3 三维超混沌映射拓扑马蹄寻找

目前人们研究的大多超混沌系统具有两正一负的 Lyapunov 指数, 主要是三维映射 (对于四维超混沌系统, 其 Poincare 映射也是三维). 不失一般性,

下面我们讨论下面离散系统:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \psi(\mathbf{x}_k), \quad (1)$$

其中, $\mathbf{x}_k \in R^3, k$ 为整数.

直接在三维空间中搜索拓扑马蹄, 难度很大,

所以下文将采用降维的思想. 我们知道, 为确保相空间体积收缩, 超混沌系统为负的 Lyapunov 指数的模通常远大于另外两个正 Lyapunov 指数之和. 因此, 系统 (1) 沿负 Lyapunov 指数方向收缩极快, 其吸引子看起来非常接近某一个曲面 (ψ 不连续时可能出现多个曲面). 拓扑马蹄是基于几何的理论, 对误差并不敏感. 因此, 我们可以在该收缩方向上进行降维, 将三维系统降维到该曲面系统, 然后进行二维超混沌马蹄搜索, 最后再升维到三维空间. 下文将逐步论述并解决这三个关键步骤.

为了将三维系统降维到曲面系统, 我们不仅需要确定一个合适的曲面和二维曲面系统, 而且要确保新系统能保持原系统的动力学性质. 在曲面选取时, 由于一般不存在显式的曲面方程表达式, 因此我们采用数值方式拟合出该曲面. 为此, 我们首先以 \mathbf{x}_0 为初始值, 对 (1) 式进行迭代, 得到一个长离散时间序列 $\mathbf{X} \triangleq \{\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_k, \dots\}$, $\mathbf{x}_i = [x_1, x_2, x_3]^T$, 然后进行数值拟合. 为方便讨论, 不妨对坐标进行旋转, 即 $\mathbf{y} = [y_1, y_2, y_3]^T = \mathbf{Q}\mathbf{x}$, \mathbf{Q} 为正交单位阵. 假设旋转后的曲面方程为 $y_3 = s(y_1, y_2)$, 即 y_3 的值仅由 y_1 和 y_2 确定. 那么, 二维系统可表示为

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}_{n+1} &= \varphi \left(\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}_n \right) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{Q} \psi \left(\mathbf{Q}^T \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ s(y_1, y_2) \end{pmatrix}_n \right). \end{aligned} \quad (2)$$

显然, (2) 式是一个平面系统, 它实际上是曲面系统在新坐标 y_1oy_2 上的投影.

由于映射 $\varphi(\mathbf{y})$ 消除了超混沌映射 $\psi(\mathbf{x})$ 收缩行为, 保留了原映射所存在两个方向的拉伸的动力学行为. 因此, 对于我们所寻找的二维拓扑马蹄, 应满足的条件就是图 2 在水平面上的投影的情形. 对于这种“投影穿过”关系, 为了与原“余维穿过”(截隔) 进行区分, 我们用符号 “ \mapsto ” 表示. 于是, 推论 1 的条件在这里将转变为: $f^m(\underline{B}_1) \mapsto \underline{B}_1$, $f^m(\underline{B}_1) \mapsto \underline{B}_2$ 且 $f^n(\underline{B}_2) \mapsto \underline{B}_1$, 这里 \underline{B}_1 和 \underline{B}_2 分别为 B_1 和 B_2 的投影. 对于这种投影拓扑马蹄的寻找问题, 我们将参考文献 [23] 中所提出的简单方法, 通过采用新的“投影穿过”关系, 将其推广到具有二维拉伸的超混

沌映射 $\varphi(\mathbf{y})$ 中. 其寻找过程需要以下两个主要步骤, 详细过程请见流程图 3.

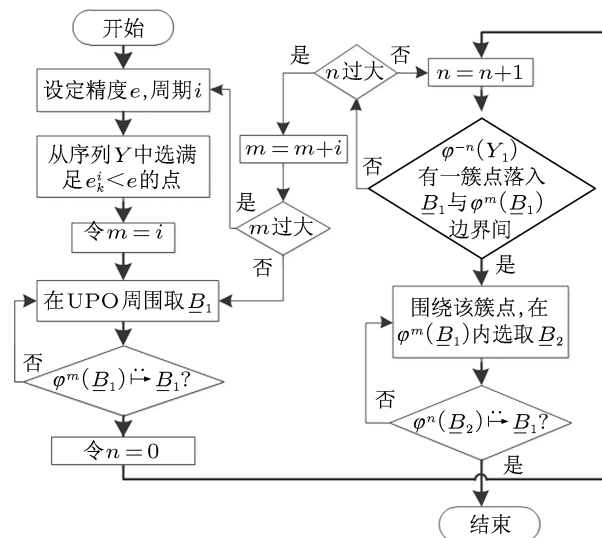


图 3 寻找二维拉伸的超混沌拓扑马蹄流程

1) 根据序列 \mathbf{X} 在 y_1oy_2 上的投影 $\mathbf{Y} = \{\mathbf{y}_0, \mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_k, \dots\}$, 利用间隔为 i 的两点间距 $e_k^i = \|\mathbf{y}_{k+i} - \mathbf{y}_k\|$, 找出短不稳定周期轨的大致位置. 然后, 以围绕该周期轨, 选取多边形 B_1 , 使满足 $\varphi^i(\underline{B}_1) \mapsto \underline{B}_1$, 即 $\varphi^i(\underline{B}_1)$ 的边界位于 \underline{B}_1 边界之外. 由定理 1 的传递性可知, 如果 m 取 i 的整数倍时, $\varphi^m(\underline{B}_1) \mapsto \underline{B}_1$ 仍然成立.

2) 选取多边形 B_2 使满足 $\varphi^m(\underline{B}_1) \mapsto \underline{B}_2$, $\varphi^n(\underline{B}_2) \mapsto \underline{B}_1$. 为了满足第一个条件, 我们只需要在 $\varphi^m(\underline{B}_1)$ 的边界以内, 选取 B_2 . 其难点是如何同时满足第二个条件. 为此, 对于序列 \mathbf{Y} 位于 \underline{B}_1 内的点集 Y_1 , 反向迭代 n 次. 根据混沌的遍历性, 总能找到合适的迭代次数 m 和 n , 使原像 $\varphi^{-n}(Y_1)$ 的一簇点落入 \underline{B}_1 与 $\varphi^m(\underline{B}_1)$ 边界之间. 最后, 我们围绕这一簇点选取多边形 B_2 , 使满足 $\varphi^n(\underline{B}_2) \mapsto \underline{B}_1$.

这里需要说明的是, 由于 (2) 式已经将三维超混沌映射降到二维, 因此上述寻找过程可以借助于 MATLAB 工具箱 HsTool 来实现*.

在找出 y_1oy_2 面上投影的拓扑马蹄之后, 我们需要将其升维到原系统的三维空间. 为此, 我们先将 y_1oy_2 上的多边形区域 \underline{B}_1 和 \underline{B}_2 , 利用公式 $y_3 = s(y_1, y_2)$, 分别还原为曲面 s 上的 \tilde{B}_1 和 \tilde{B}_2 . 为了构建三维空间中的拓扑马蹄, 我们需要沿着压缩方向, 上下平移 \tilde{B}_1 和 \tilde{B}_2 一个微小距离 d , 得两对曲面 $(\tilde{B}_1^a, \tilde{B}_1^b)$ 和 $(\tilde{B}_2^a, \tilde{B}_2^b)$. 平移时 \tilde{B}_1 和 \tilde{B}_2 扫过区域

*http://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/14075

即为三维马蹄的两个子集 B_1 和 B_2 . 由于系统沿平移 d 的方向收缩, 因此在映射 ψ 的作用下, B_1 和 B_2 会被压薄至曲面 s 附近. 最终, 它们的像会在 \tilde{B}_1^a 和 \tilde{B}_1^b 、 \tilde{B}_2^a 和 \tilde{B}_2^b 之间截隔 B_1 和 B_2 . 对于实际大多情况, 由于拓扑马蹄可容许一定的误差, 在三维空间生成 B_1 和 B_2 时, 平移方向与压缩方向大致同向即可. 为简单起见, 我们可以选择 \tilde{B}_1 或 \tilde{B}_2 近似垂直方向做为平移方向.

4 拓扑马蹄寻找的应用实例

为了验证上述算法的可行性, 下面我们分别对著名的 Lorenz 超混沌系统和 Saito 超混沌电路进行研究.

4.1 Lorenz 超混沌系统中拓扑马蹄

Lorenz 系统是被提出以后一直是广大研究人员关注的热点, 国内学者王兴元等 [24] 通过添加非线性控制器的方法, 构造出四维超混沌 Lorenz 系统, 并从 Lyapunov 指数谱、分岔图和相图三个角度对其动力学行为进行了分析, 他们提出的四维超混沌 Lorenz 系统方程如下:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= a(y-x) + w, \\ \dot{y} &= cx - y - xz, \\ \dot{z} &= xy - bz, \\ \dot{w} &= -yz + rw. \end{aligned} \tag{3}$$

其中, x, y, z, w 为状态变量, a, b, c, r 为系统参数, 当 $a = 10, b = 8/3, c = 28, -1.52 < r \leq 0.06$ 时, 系统 (3) 处于混沌状态. 特别地, 取 $r = -0.79$, 这时系统 (3) 两个正 Lyapunov 指数 $\lambda_1 = 0.4201, \lambda_2 = 0.2088$, 下面利用上一节的算法, 针对上述参数取值的超混沌 Lorenz 系统做进一步研究.

首先选取超平面 $P \triangleq \{(x, y, z, w) | x = 0, \dot{x} > 0\}$ 作为截面, 然后定义其对应的 Poincaré 映射 $q: P \rightarrow P$ 如下: 对于 P 内任意一点 $\mathbf{x} \triangleq (0, y, z, w)$, $q(\mathbf{x})$ 表示以 \mathbf{x} 初始值在系统 (3) 的作用下第一次回到 P 时的交点.

根据上一节的算法, 我们先迭代映射 q , 得出吸引子的相图如图 4(a) 所示, 通过观察发现吸引子上的点靠近某个曲面 $w = s(y, z)$, 即 w 是 y 和 z 的单值函数. 因此 Q 直接取单位阵, $\mathbf{y} = [y_1, y_2, y_3]^T = [y, z, w]^T$. 在 MATLAB 中利用内建函数 “TriScatteredInterp” 和吸引子上的点, 得出

拟合曲面 s 的系数. 接着, 按照流程图 3 中描述的过程, 我们在坐标投影面 yoz 上选择两个四边形 \underline{B}_1 和 \underline{B}_2 , 其中 \underline{B}_1 的四个顶点次为

$$\begin{aligned} &[4.776951673, 30.335099751]^T, \\ &[5.003485130, 30.545511222]^T, \\ &[5.131273234, 29.072630923]^T, \\ &[4.957016729, 28.960411471]^T; \end{aligned}$$

\underline{B}_2 的四个顶点为

$$\begin{aligned} &[4.289033457, 29.900249377]^T, \\ &[4.387778810, 29.381234414]^T, \\ &[4.201905204, 28.932356608]^T, \\ &[4.132202602, 29.226932668]^T. \end{aligned}$$

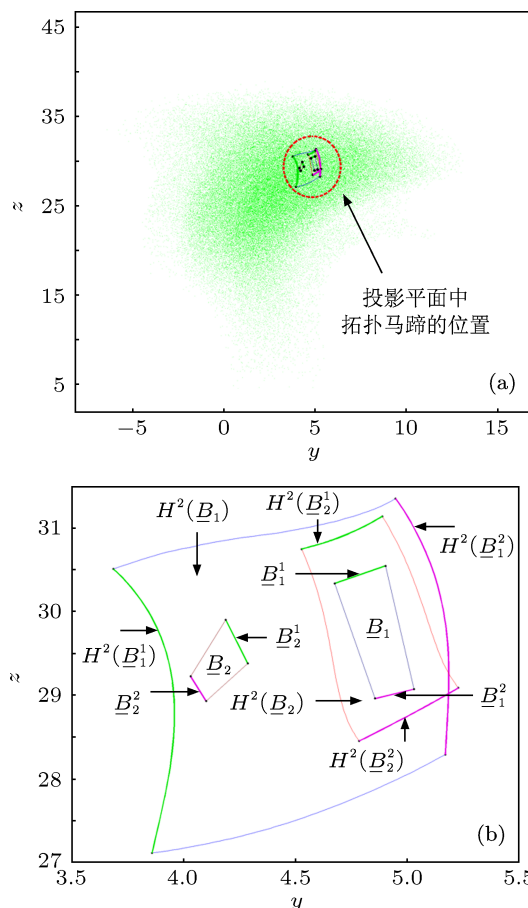


图 4 投影平面拓扑马蹄 (a) 投影平面 yoz 中拓扑马蹄位置; (b) 投影平面 yoz 中拓扑马蹄细节

最后, 为了利用图 4(b) 中的平面马蹄生成三维马蹄. 根据曲面上四边形 \tilde{B}_1 的四个顶点 A_1, A_2, A_3 和 A_4 , 我们采用以下公式估算平移方向

$$\mathbf{v} = \frac{(\mathbf{A}_1 - \mathbf{A}_3) \times (\mathbf{A}_2 - \mathbf{A}_4)}{\|\mathbf{A}_1 - \mathbf{A}_3\| \|\mathbf{A}_2 - \mathbf{A}_4\|}$$

$$= [0.8946, 0.4377, 0.0889]^T.$$

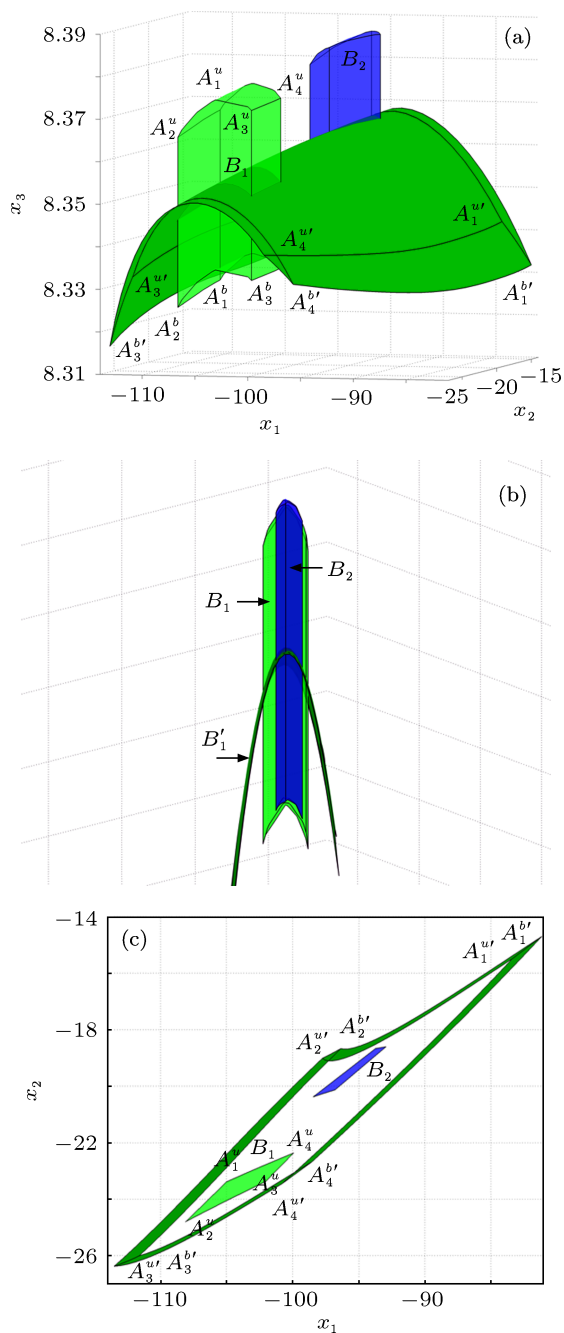


图5 $q^2(B_1)$ 截隔 B_1, B_2 (a) 三维视图; (b) 侧视图; (c) 顶视图

数值计算可以验证, 该方向与 q 在 \tilde{B}_1 和 \tilde{B}_2 附近的压缩方向大致一致. 接着, 利用曲面 s 的拟合系数, 选取平移距离 $d = 0.02$, 我们构建出 B_1 和 B_2 , 及其

所对应的两对曲面 (B_1^u, B_1^b) 和 (B_2^u, B_2^b) . 为了便于观察, 我们引入 Householder 变换:

$$\boldsymbol{x} = [x_1, x_2, x_3]^T = \boldsymbol{H}[y, z, w]^T,$$

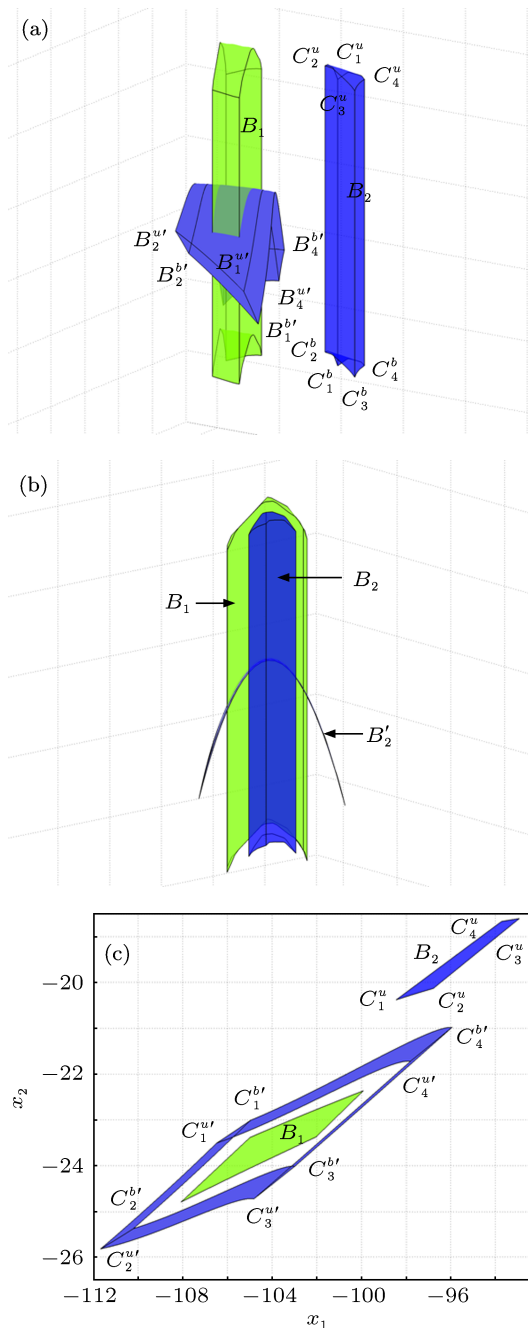


图6 $q^2(B_2)$ 截隔 B_1 (a) 三维视图; (b) 侧视图; (c) 顶视图

其中

$$H = \begin{bmatrix} 0.122612566823418 & -0.432106453909141 & 0.893448471344061 \\ -0.432106453909141 & 0.787190948434345 & 0.440016389686911 \\ 0.893448471344061 & 0.440016389686911 & 0.0901964847422373 \end{bmatrix},$$

将压缩方向 v 旋转 1.480477094647816 弧度, 到 x_3 坐标轴. 最终所得具有二维拉伸的三维超混沌拓扑马蹄如图 5 和图 6 所示. 显然, 其满足

$$q^2(B_1) \mapsto B_1, q^2(B_1) \mapsto B_2 \text{ 且 } q^2(B_2) \mapsto B_1.$$

因此, 根据推论 1, 系统 q 的拓扑熵不低于 $\frac{1}{6} \log 2$.

4.2 超混沌系统中拓扑马蹄

1990 年 Saito^[25] 提出了著名的滞回超混沌发生器 (Saito hysteresis chaos generator, SHCG), 作为很多混沌电路的核心结构, 其被广泛应用于超混沌理论研究, 密码学, 保密通信等方面. 其无量纲动力学方程如下:

$$\begin{aligned} x &= -z - w, \\ y &= \gamma(2\delta y + z), \\ z &= \rho(x - y), \\ \varepsilon w &= x - h(w), \end{aligned} \tag{4}$$

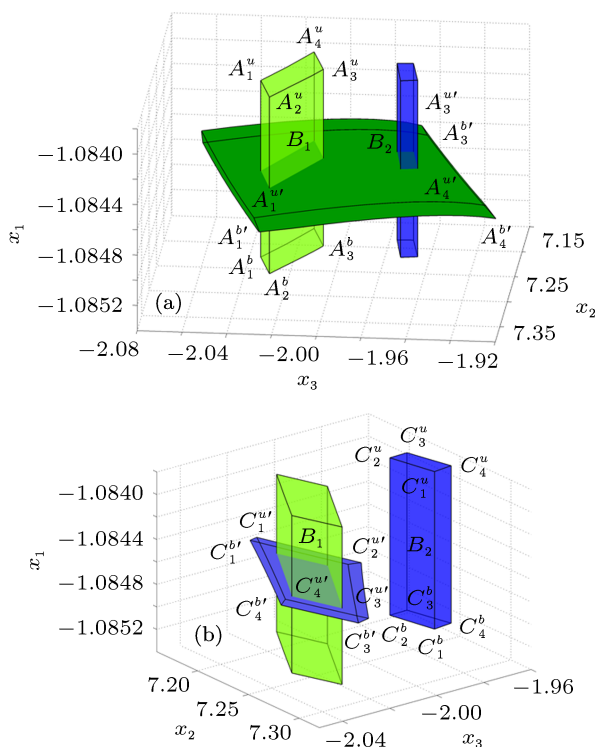


图 7 SHCG 超混沌拓扑马蹄 (a) $p^3(B_1)$ 截隔 B_1, B_2 ; (b) $p^3(B_2)$ 截隔 B_1

其中, 非线性函数 $h(w) = \omega - (|w + 1| - |w - 1|)$, x, y, z, w 为状态变量, $\gamma, \delta, \rho, \varepsilon$ 为系统参数; 当 $\gamma = 1, \delta = 1, \rho = 14, \varepsilon = 0.01$ 时, SHCG 处于超混沌状态. 对于该系统超混沌拓扑马蹄寻找问题, 作者在文献 [15] 中进行了初步的研究, 验证了二维拉伸超混沌拓扑马蹄的存在. 为了说明本算法的有效性, 我们选取新的超平面 $P \triangleq \{w = 0 \text{ 且 } \dot{w} > 0\}$ 为 Poincaré 截面进行尝试. 定义其对应的 Poincaré 映射 $p: P \rightarrow P$ 如下: 对于 P 内任意一点 $x \triangleq (x, y, z, 0)$, $p(x)$ 表示以 x 初始值在系统 (4) 下首次回到 P 的交点. 通过应用本文算法, 我们在新的位置找到一个具有二维拉伸的新拓扑马蹄, 具体结果如图 7 所示. 根据推论 1, Poincaré 映射 p 的拓扑熵不低于 $\frac{1}{9} \log 2$.

5 结论

本文提出了一种寻找具有二维拉伸的拓扑马蹄的算法. 借助降维的思想, 将原本在三维相空间中寻找拓扑马蹄的难题, 转化到二维投影平面中, 简化了寻找的难度和算法的复杂度. 在找到具有二维拉伸的投影马蹄以后, 本算法能自动将其向三维扩展, 并生成实际三维拓扑马蹄. 之后的仿真实验, 不仅从拓扑马蹄的角度对 Lorenz 超混沌系统进行了研究, 而且在 Saito 超混沌发生器中找到了新的三维超混沌拓扑马蹄, 从而验证了本算法的有效性. 本文算法适用于吸引子位于某一个曲面附近的三维超混沌映射, 对目前已知的大多三维离散超混沌系统, 或四维连续时间超混沌系统 (选取合适的 Poincare 映射) 而言, 由于负 Lyapunov 指数绝对值相对较大, 所以该条件比较容易满足. 此外, 通过 (3) 式的降维, 本文算法可以与 MATLAB 工具箱 HsTool 兼容. 因此, 本文算法的有较强的适用性, 能够解决目前超混沌系统拓扑马蹄搜寻仅有理论而缺少有效搜索算法的问题. 所以, 本算法的提出有助于研究者利用拓扑马蹄理论进行超混沌系统的严格研究, 进而解决目前超混沌的计算机判定不准确的问题.

- [1] Rossler O 1979 *Physics Letters A* **71** 155
- [2] Zheng J 2011 *Computers & Mathematics with Applications* **61** 2000
- [3] Yu H, Cai G, Li Y 2012 *Nonlinear Dynamics* **67** 2171
- [4] Sheikhan M, Shahnazi R, Garoucy S 2011 *Neural Computing & Applications* **20** 1
- [5] Vaidyanathan S, Sampath S 2012 *Advances in Computer Science and Information Technology. Computer Science and Engineering* **85** 257
- [6] Uchida A, Amano K, Inoue M 2008 *Nature Photonics* **2** 728
- [7] Sun L, Jiang D P 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 3288 (in Chinese) [孙琳, 姜德平 2006 物理学报 **55** 3283]
- [8] Wang J, Jiang G P 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 60503 (in Chinese) [王晶, 蒋国平 2011 物理学报 **60** 60503]
- [9] Kennedy J, Kocak S, Yorke J A 2001 *The American Mathematical Monthly* **108** 411
- [10] Kennedy J, Yorke J A 2001 *Transactions of the American Mathematical Society* **353** 2513
- [11] Yang X S 2004 *Chaos, Solitons & Fractals* **20** 1149
- [12] Szymczak A 1996 *Topology* **35** 287
- [13] Plumecoq J, Lefranc M 2000 *Physica D: Nonlinear Phenomena* **144** 231
- [14] Zgliczyński P, Gidea M 2004 *Journal of Differential Equations* **202** 32
- [15] Li Q, Yang X S 2006 *Journal of Physics a-Mathematical and General* **39** 9139
- [16] Yang F, Li Q, Zhou P 2007 *International Journal of Bifurcation and Chaos* **17** 4205
- [17] Li Q, Yang X S 2007 *Discrete Dynamics in Nature and Society* **2007** 16239
- [18] Li Q 2008 *Physics Letters A* **372** 2989
- [19] Li Q, Yang X S 2008 *International Journal of Circuit Theory and Applications* **36** 19
- [20] Li Q, Yang X S, Chen S 2011 *International Journal of Bifurcation and Chaos* **21** 1719
- [21] Yang X S 2009 *International Journal of Bifurcation and Chaos* **19** 1127
- [22] Yang X S, Li H, Huang Y 2005 *Journal of Physics A: Mathematical and General* **38** 4175
- [23] Li Q, Yang X S 2010 *International Journal of Bifurcation and Chaos* **20** 467
- [24] Wang X Y, Wang M J 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 5136 (in Chinese) [王兴元, 王明军 2007 物理学报 **56** 5136]
- [25] Saito T 1990 *Circuits and Systems, IEEE Transactions on* **37** 399

Algorithm for finding horseshoes in three-dimensional hyperchaotic maps and its application*

Li Qing-Du^{1)2)†} Tang Song²⁾

1) (*Key Laboratory of Industrial Internet of Things & Networked Control of Ministry of Education, Chongqing University of Posts and Telecommunications, Chongqing 400065, China*)

2) (*Institute for Nonlinear Circuits and Systems, Chongqing University Posts and Telecommunications, Chongqing 400065, China*)

(Received 15 July 2012; revised manuscript received 21 August 2012)

Abstract

Topological horseshoe theory is fundamental for studying chaos rigorously, which, however, has rarely applied to hyperchaos. The reason is that it is too hard to find a topological horseshoe in a hyperchaotic system, due to the high dimension of the system and the multiple expansion directions in the state space. Therefore, in this paper a practical algorithm for three-dimensional (3D) hyperchaotic maps is proposed. Usually, a hyperchaotic system has a large negative Lyapunov exponent, its attractor is often contracted closely to a certain surface. Based on this feature, the algorithm first deducts the dimension along the direction of contraction to obtain a 2D projective system; then it detects a projective horseshoe with 2D expansion; finally, it constructs a 3D horseshoe for the original system. In order to verify the validity of the algorithm, it is applied to the classic hyperchaotic Lorenz system and the famous Saito hyperchaotic circuit, and their horseshoes with 2D expansion are successfully found from the Poincaré mapping.

Keywords: hyperchaos, topological horseshoes, Saito hyperchaotic system, Lorenz hyperchaotic system

PACS: 05.45.Jn, 05.45.Pq

DOI: 10.7498/aps.62.020510

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 10972082, 61104150), the Natural Science Foundation Project of Chongqing (Grant No. cstcjjA40044), and the Doctoral Fund of CQUPT (Grant No. A2009-12).

† Corresponding author. E-mail: liqd@cqupt.edu.cn