

## T 混沌系统的动力学分析与同步及其电路仿真\*

王震<sup>1)†</sup> 孙卫<sup>1)2)</sup>

1) (西京学院基础部, 西安 710123)

2) (西安交通大学电子与信息工程学院, 西安 710049)

(2012年5月18日收到; 2012年8月16日收到修改稿)

针对一类 T 混沌系统, 对系统平衡点的稳定性进行了分析, 并对系统的分岔, Lyapunov 指数, Poincare 截面进行了数值分析. 同时, 针对参数已知和未知两种情形, 研究其同步控制问题, 利用 Lyapunov 函数设计并证明了系统的反馈控制器. 最后运用 Multisim 软件设计实现了 T 混沌系统同步的混沌电路, 验证了所提出同步方法的有效性和可实现性.

关键词: 混沌系统, 同步, 电路仿真

PACS: 05.45.Pq

DOI: 10.7498/aps.62.020511

## 1 引言

半个世纪以来, 经过无数科学工作者的艰苦研究和探索, 人们对混沌运动的特点、规律及其在各个学科领域的表现已经有了深刻的理解. 1963年, Lorenz<sup>[1]</sup> 在一个三维自治系统首次发现了混沌吸引子. 1999年, Chen 和 Ueta<sup>[2]</sup> 也发现了一种和 Lorenz 系统族相似但不同的混沌吸引子. 根据 Vanecek 和 Celikovsky<sup>[3]</sup> 所给出的广义 Lorenz 系统形式, Lorenz 系统和 Chen 系统的线性矩阵分别满足  $a_{12}a_{21} > 0$  和  $a_{12}a_{21} < 0$  的条件, 一个自然的问题是是否有混沌系统满足  $a_{12}a_{21} = 0$ . 2002年 Lü和 Chen<sup>[4]</sup> 发现了 Lorenz 和 Chen 混沌系统间的过渡系统 Lü混沌系统. 随后大量的混沌系统被构造, 但他们大多为广义 Lorenz 系统<sup>[5]</sup>. 2008年 Yang 和 Chen<sup>[6]</sup> 重新给出了混沌系统的分类条件, 发现 Lorenz 系统满足  $a_{11}a_{22} > 0$ , Chen 系统, Lü系统满足  $a_{11}a_{22} < 0$ , 同样, 一个自然的问题是是否有过渡混沌系统满足  $a_{11}a_{22} = 0$ .

近年来的大量研究工作表明, 混沌与工程技术联系越来越密切, 它在生物, 化学, 力学, 电子, 信息,

计算机工程, 以及应用数学和实验物理等领域都具有广泛的前景, 如混沌的遍历性可用于图像处理; 混沌的随机性可用于液体的充分混合, 保密通信等. 又由于混沌运动具有初值敏感性和长时间发展趋势的不可预见性, 混沌控制就成了混沌应用的关键环节. 到目前为止, 国内外的科学工作者基于不同的策略提出了大量的混沌控制方法<sup>[7-12]</sup>, 并在大量实验和应用中得到验证. 同时, 在一些混沌显得非常重要而且有用的领域, 有目的的构造简单混沌系统来产生或强化混沌现象已经成为一个关键性的课题. 1994年, Sprott<sup>[13]</sup> 考虑了少于七项 (Lorenz, Chen 系统等右端微分方程组含有的项数) 且只不含有或者含有一个到两个非线性项的常微分方程组混沌系统, 并通过计算机仿真给出了 19 个混沌系统. 文献 [14, 15] 对含有两个非线性项却没有平衡点和具有两个稳定平衡点的六项混沌系统进行了动力学分析. 2010年, 文献 [16] 构造了一个新的混沌系统满足  $a_{11}a_{22} = 0$  且具有一个不稳鞍结点和两个不稳焦结点, 同时对系统的轨道进行了分析. 本文在文献 [10] 的基础上继续对此类 T 混沌系统<sup>[17]</sup> (文献 [17] 的发表时间早于文献 [16], 故以 T 混沌系统

\* 国家自然科学基金 (批准号: 10971164)、陕西省自然科学基金 (批准号: 2011EJ001)、陕西省教育厅科研计划项目 (批准号: 12JK1077, 12JK1073) 和西京学院科研基金 (批准号: XJ120107, XJ120108) 资助的课题.

† 通讯作者. E-mail: williamwangz@126.com

命名),

$$\begin{aligned} \dot{x} &= a(y-x), \\ \dot{y} &= cx-axz, \\ \dot{z} &= -bz+xy, \end{aligned} \quad (1)$$

( $a, b, c$  为实数,  $a \neq 0$ ) 进行了动力学数值分析, 包括分岔分析, LE 指数, Poincare 截面等. 并对系统的同步控制问题, 利用 Lyapunov 函数设计并证明了系统的反馈控制器. 同时为了在实际中更好地应用, 运用 Multisim 软件设计实现了同步的混沌电路.

## 2 计算分析

### 2.1 平衡点稳定性分析

令  $\dot{x} = \dot{y} = \dot{z} = 0$ , 如果  $abc > 0$ , 可得系统 (1) 的三个平衡点  $O(0,0,0)$ ,  $E_+(\sqrt{bc/a}, \sqrt{bc/a}, \frac{c}{a})$ ,  $E_-( -\sqrt{bc/a}, -\sqrt{bc/a}, \frac{c}{a})$ ; 如果  $ab \neq 0, c = 0$  或者  $abc < 0$ , 则系统 (1) 只有一个平衡点.

**定理 1** 如果  $b > 0, a > 0, c < 0, a+4c \geq 0$ , 则  $O$  是渐进稳定的; 如果  $b < 0$  或  $a > 0, c > 0$  或  $a < 0, a+4c \leq 0$ , 则  $O$  是不稳定的.

**证明** 系统在  $O$  点的 Jacobian 矩阵

$$J_0 = \begin{pmatrix} -a & a & 0 \\ c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{pmatrix},$$

其特征方程为

$$\lambda^3 + (a+b)\lambda^2 + a(b-c)\lambda - abc = 0,$$

特征值为

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -b, \\ \lambda_2 &= \frac{\sqrt{a(a+4c)} - a}{2}, \\ \lambda_3 &= \frac{-\sqrt{a(a+4c)} - a}{2}. \end{aligned}$$

显然, 如果  $b > 0$ , 则  $\lambda_1 < 0$ , 如果  $a > 0, c < 0$ , 且  $a+4c \geq 0$ , 则  $\lambda_{2,3} < 0$ . 因此平衡点  $O$  是渐进稳定的. 类似的, 如果  $b < 0$  或  $a > 0, c > 0$  或  $a < 0, a+4c \leq 0$ , 则  $\lambda_1 > 0$  或  $\lambda_2 > 0$  或  $\lambda_3 > 0$ , 根据微分线性系统理论, 易知平衡点  $O$  是不稳定的.

同理可得系统 (1) 在  $E_+, E_-$  下的稳定性.

**定理 2** 平衡点  $E_+, E_-$  是渐进稳定的当且仅当  $a+b > 0, abc > 0, a^2b + ab^2 + b^2c - abc > 0$ .

### 2.2 分岔图及 Lyapunov 指数谱

在参数  $a = 2, b = 1$  下, 从图 1 可以看出,

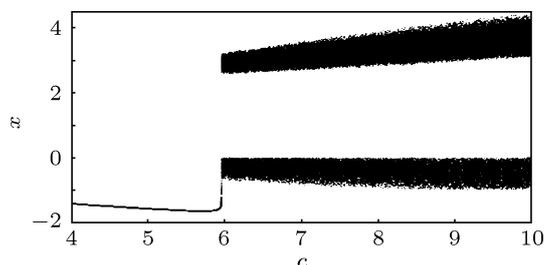


图 1 系统 (1) 在参数  $a = 2, b = 1$  下关于  $c$  的分岔图

当  $c \in [4, 5.8]$  时, 系统 (1) 处于稳定周期状态; 当  $c \in (5.8, 6]$  时, 系统 (1) 处于拟周期状态, 选取参数  $c = 5.9$ , 可以很快计算出系统的三个 Lyapunov 指数 (见图 2(a))  $LE_1 = 0, LE_2 = 0, LE_3 = -2.994 < 0$ ; 当  $c \in (6, 10]$  时, 系统 (1) 处于混沌状态. 选取参数  $c = 9$ , 可以很快计算出系统的三个 Lyapunov 指数 (见图 2(b))  $LE_1 = 0.25631 > 0, LE_2 = 0, LE_3 = -3.255 < 0$ , 因为  $\sum_{i=1}^3 LE_i < 0$ , 故系统为非发散系统, 又由于有一个正的 Lyapunov 指数, 且 Lyapunov 维数  $D_L = 2.0787$ , 所以系统在上述参数下是混沌的.

### 2.3 Poincare 映射及相图

根据分岔图 1, 选取参数  $c = 9$  和  $c = 5$ , 可分别得到相应的 Poincare 映射图及相图 (见图 3—6). 可以看到, 系统分别处于混沌, 稳定周期状态, 同时可知系统通向混沌的道路为准周期环面破裂进入混沌.

## 3 混沌系统的自适应同步

### 3.1 参数已知新的混沌系统的同步

令驱动系统为系统 (1), 且取响应系统为

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}} &= a(\hat{y} - \hat{x}) + \mu_1, \\ \dot{\hat{y}} &= c\hat{x} - a\hat{x}\hat{z} + \mu_2, \\ \dot{\hat{z}} &= -b\hat{z} + \hat{x}\hat{y} + \mu_3 \end{aligned} \quad (2)$$

其中  $\mu_1, \mu_2, \mu_3$  为自适应反馈控制器. 令  $e_1 = \hat{x} - x, e_2 = \hat{y} - y, e_3 = \hat{z} - z$ , 则由 (2) 减去 (1) 得误差系统为

$$\begin{aligned} \dot{e}_1 &= a(e_2 - e_1) + \mu_1, \\ \dot{e}_2 &= ce_1 - axe_3 - a\hat{z}e_1 + \mu_2, \end{aligned}$$

$$\dot{e}_3 = -be_3 + xe_2 + \hat{y}e_1 + \mu_3. \quad (3)$$

因为混沌系统的变量都是有界的, 则我们可以假设  $M_y = \max(|y|, |\hat{y}|)$ ,  $M_z = \max(|z|, |\hat{z}|)$ .

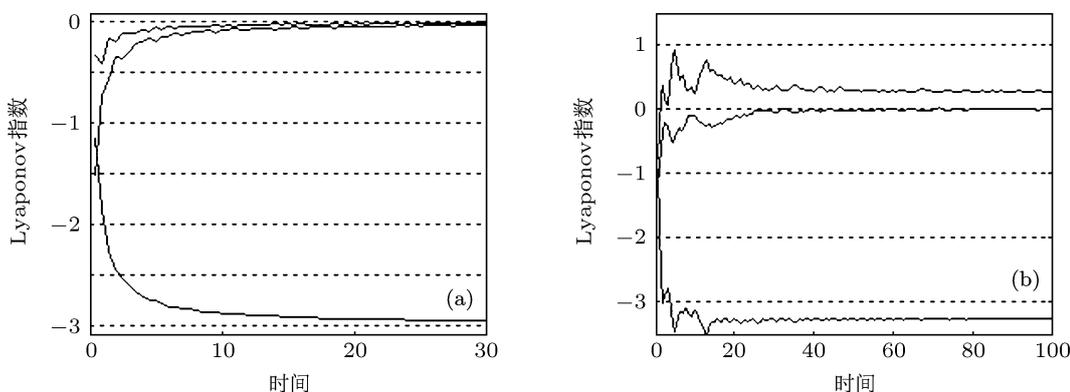


图2 系统(1)在参数  $(a,b,c) = (2,1,5.9)$ ,  $(a,b,c) = (2,1,9)$  下的 Lyapunov 指数

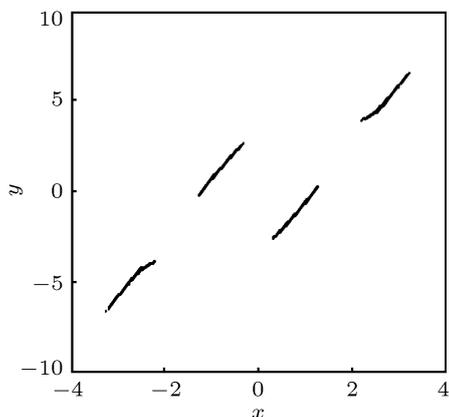


图3 系统(1)在参数  $a=2, b=1, c=9$  下的 Poincaré 映射图 ( $z=4$  截面)

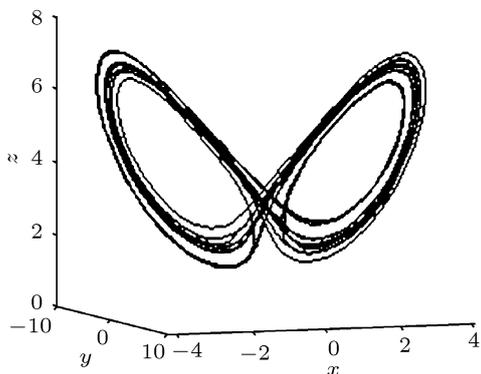


图4 系统(1)在参数  $a=2, b=1, c=9$  下的吸引子

**定理3** 当  $\mu_1 = -(a+c)e_2$ ,  $\mu_2 = -k_1e_2$ ,  $\mu_3 = 0$ ,  $\hat{k}_1 = \beta e_2^2$  时 ( $\beta$  为正的反馈增益), 驱动系统(1)和响应系统(2)是同步的.

**证明** 取 Lyapunov 函数为  $V = 0.5e_1^2 + 0.5e_2^2 + 0.5e_3^2 + 0.5\beta^{-1}(k_1 - k)^2$ , 则

$$\begin{aligned} \dot{V} &= -ae_1^2 - ke_2^2 - be_3^2 + (x - ax)e_2e_3 \\ &\quad - a\hat{z}e_1e_2 + \hat{y}e_1e_3 \\ &\leq -ae_1^2 - ke_2^2 - be_3^2 + aM_z|e_1||e_2| \\ &\quad + M_y|e_1||e_3| + |x - ax||e_2||e_3| \\ &= -e^T P e, \end{aligned}$$

其中

$$P = \begin{pmatrix} a & -0.5aM_z & -0.5M_y \\ -0.5aM_z & k - c & -0.5|x - ax| \\ -0.5M_y & -0.5|x - ax| & b \end{pmatrix}.$$

显然要使误差系统(3)是一致渐进稳定的, 矩阵  $P$  必须是正定的, 即

$$\begin{aligned} a &> 0, a(k - c) - \frac{1}{4}a^2M_z^2 > 0, \\ (k - c)(4ab - M_y^2) - a(x - ax)^2 \\ &\quad - a^2bM_z^2 - aM_yM_z|x - ax| > 0. \end{aligned}$$

所以, 当  $k > \max\{(1/4)aM_z^2 + c, a(x - ax)^2 + a^2bM_z^2 + aM_yM_z|x - ax| / (4ab - M_y^2) + c\}$  时, 矩阵  $P$  是正定的, 因此  $\dot{V}$  是负定的, 又  $\int_0^t \lambda_{\min}(P) \|e\|^2 dt \leq \int_0^t e^T P e dt \leq \int_0^t -\dot{V} dt = V(0) - V(t) \leq V(0)$ , 其中  $\lambda_{\min}(P)$  是正定有界矩阵  $P$  的最小特征值, 根据 Barablat 定理有  $e_i(t) \rightarrow 0$  ( $i = 1, 2, 3$ ), 当  $t \rightarrow 0$  时, 即  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|e(t)\| = 0$ , 因此驱动系统(1)和响应系统(2)是

同步的.

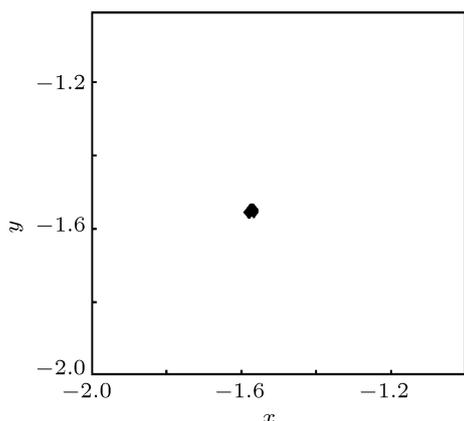


图5 系统(1)在参数  $a=2, b=1, c=5$  下的 Poincaré 映射图 ( $z=2.5$  截面)

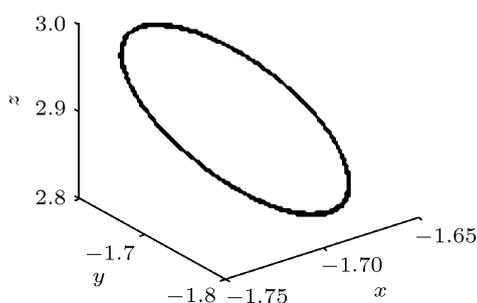


图6 系统(1)在参数  $a=2, b=1, c=5$  下的稳定周期

### 3.2 参数未知新的混沌系统的同步

如果我们令驱动系统为系统(1),且取响应系统为

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}} &= \hat{a}(\hat{y} - \hat{x}) + \mu_1, \\ \dot{\hat{y}} &= \hat{c}\hat{x} - \hat{a}\hat{x}\hat{z} + \mu_2, \\ \dot{\hat{z}} &= -\hat{b}\hat{z} + \hat{x}\hat{y} + \mu_3, \end{aligned} \quad (4)$$

其中  $\hat{a}, \hat{b}, \hat{c}$  为响应系统的参数,  $\mu_1, \mu_2, \mu_3$  为自适应反馈控制器. 令  $e_1 = \hat{x} - x, e_2 = \hat{y} - y, e_3 = \hat{z} - z$ , 则由(4)式减去(1)式得误差系统为

$$\begin{aligned} \dot{e}_1 &= \hat{a}(e_2 - e_1) + e_a(y - x) + \mu_1, \\ \dot{e}_2 &= \hat{c}e_1 + e_c x - e_a x z - \hat{a}x e_3 - \hat{a}z e_1 + \mu_2, \\ \dot{e}_3 &= -\hat{b}e_3 - e_b z + x e_2 + \hat{y} e_1 + \mu_3, \end{aligned} \quad (5)$$

其中  $e_a = \hat{a} - a, e_b = \hat{b} - b, e_c = \hat{c} - c$ .

**定理4** 当  $\mu_1 = -\hat{a}e_2 + \hat{a}e_1 + k_1 e_1, \mu_2 = -\hat{c}e_1 + \hat{a}x e_3 + \hat{a}z e_1 + k_2 e_2, \mu_3 = \hat{b}e_3 - e_2 x - e_1 \hat{y} + k_3 e_3, k_1,$

$k_2, k_3$  为负实数反馈增益, 且  $\hat{a} = -e_1(y - x) + e_2 x z, \hat{b} = e_3 z, \hat{c} = -e_2 x$  时, 驱动系统(1)和响应系统(4)是同步的.

**证明** 取 Lyapunov 函数为  $V = 0.5e_1^2 + 0.5e_2^2 + 0.5e_3^2 + 0.5e_a^2 + 0.5e_b^2 + 0.5e_c^2$ , 则

$$\begin{aligned} \dot{V} &= e_1(\hat{a}(e_2 - e_1) + e_a(y - x) + \mu_1) \\ &\quad + e_3(-\hat{b}e_3 - e_b z + x e_2 + \hat{y} e_1 + \mu_3) \\ &\quad + e_a \dot{\hat{a}} + e_b \dot{\hat{b}} + e_c \dot{\hat{c}} \\ &\quad + e_2(\hat{c}e_1 + e_c x - e_a x z - \hat{a}x e_3 - \hat{a}z e_1 + \mu_2) \\ &= e^T P e, \end{aligned}$$

其中,  $e = (e_1, e_2, e_3)^T, P = \text{diag}(k_1, k_2, k_3)$ , 则  $P$  是负定的, 因此  $\dot{V}$  是负定的, 又  $\int_0^t \lambda_{\min}(P) \|e\|^2 dt \leq \int_0^t e^T P e dt \leq \int_0^t -\dot{V} dt = V(0) - V(t) \leq V(0)$ , 其中  $\lambda_{\min}(P)$  是正定有界矩阵  $P$  的最小特征值, 根据 Barablat 定理有  $e_i(t) \rightarrow 0 (i=1, 2, 3)$ , 当  $t \rightarrow 0$  时, 即  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|e(t)\| = 0$ , 因此驱动系统(1)和响应系统(4)是同步的.

### 4 电路仿真

由于直接根据系统微分方程设计的电路很难正常运行, 为此有必要对驱动响应系统(1), (2), (4)作一些适当地变换, 这样做的目的有两方面: 一是通过线性缩放, 使得状态变量的变化范围在集成电路允许的工作的电压范围内; 二是简化电路设计, 尽量减少元件和集成电路. 我们采用线性电阻、线性电容、运算放大器、模拟乘法器来实现 T 混沌系统的同步<sup>[18-20]</sup>. 图7为 T 混沌系统(1)的电路实现原理图(系统(2), (4)的电路原理图和图7设计相仿, 此处因篇幅原因略).

其相应电路方程为

$$\begin{aligned} \frac{dU_x}{dt} &= \frac{R_9}{R_{11}C_1R_{25}}U_y - \frac{R_9R_{12}}{R_{11}C_1R_{10}R_{19}}U_x, \\ \frac{dU_y}{dt} &= \frac{R_{23}}{R_{13}C_2R_1}U_x - \frac{R_{23}}{R_{13}C_2R_{22}}U_xU_z, \\ \frac{dU_z}{dt} &= \frac{R_{20}}{R_{17}C_3R_6}U_xU_y - \frac{R_{20}}{R_{17}C_3R_7R_2}U_z, \\ U_x &= x, \quad U_y = y, \quad U_z = z, \end{aligned}$$

其中电阻值, 电容值的取值见图7, 仿真结果见图8, 图9.

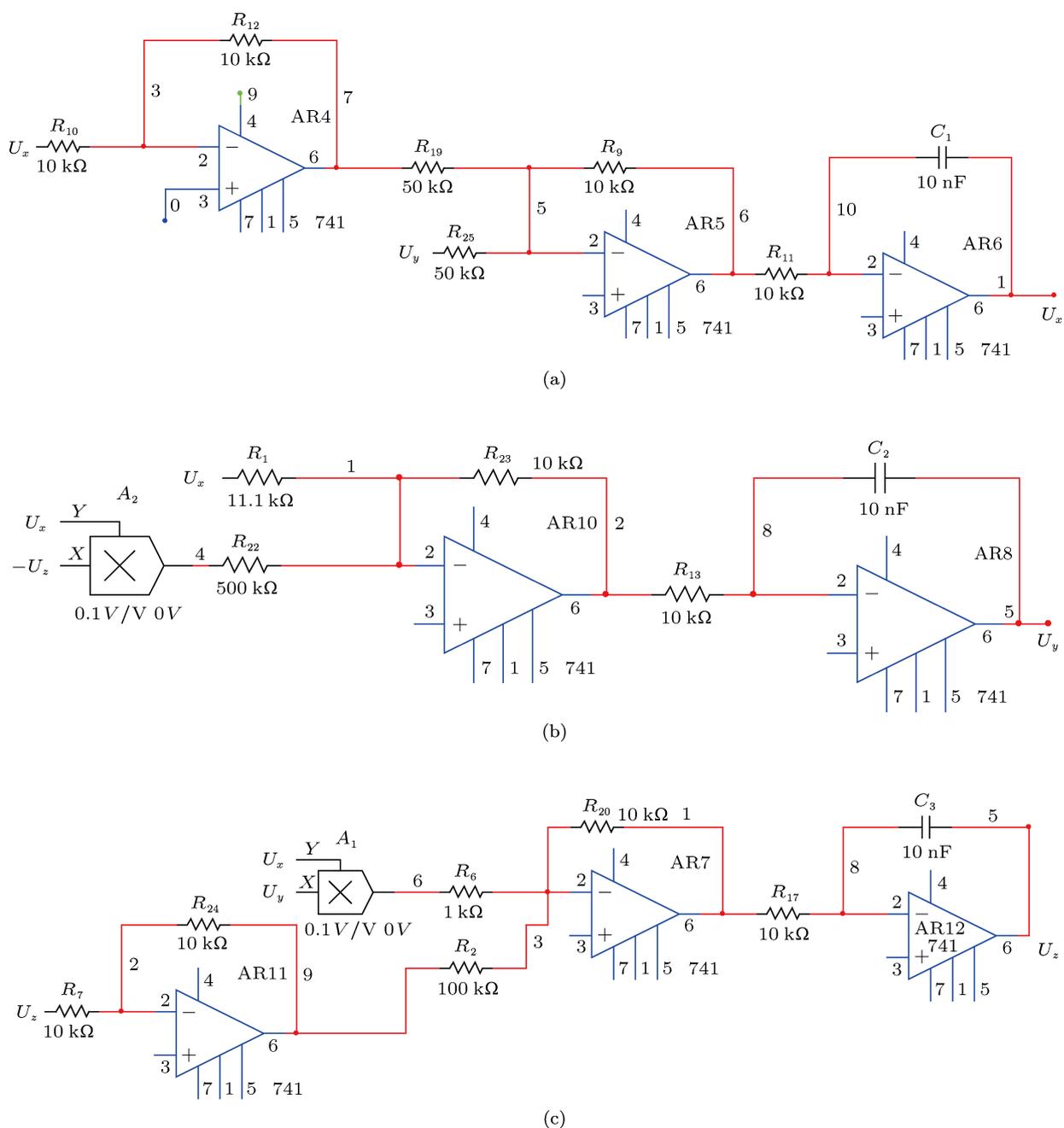


图7 T混沌系统电路原理图 (a) 状态x的电路实现原理图; (b) 状态y的电路实现原理图; (c) 状态z的电路实现原理图

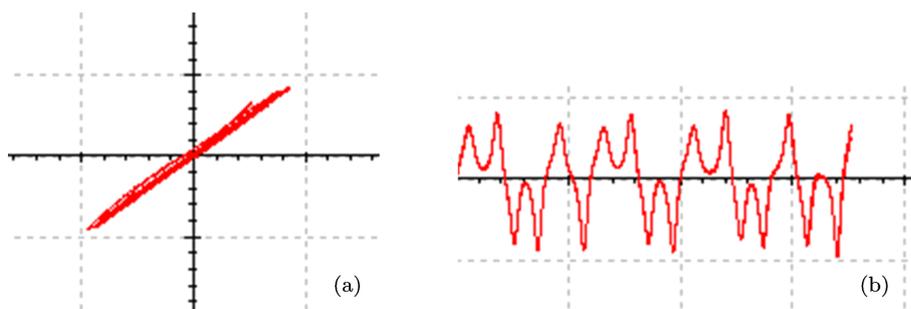
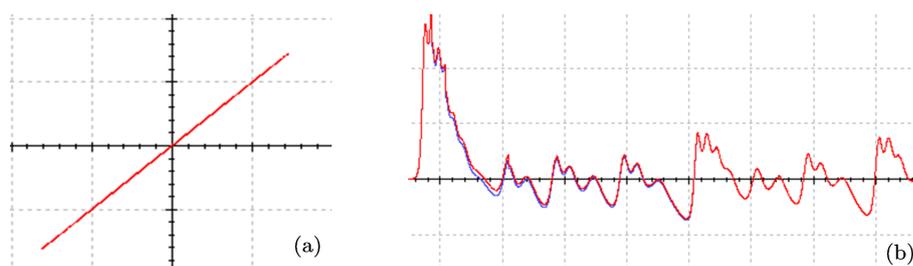


图8 驱动系统与参数已知的响应系统同步 (a)  $x-\hat{x}$  平面; (b)  $t-x, \hat{x}$  平面

图9 驱动系统与参数未知的响应系统同步 (a)  $z-\hat{z}$  平面; (b)  $t-z, \hat{z}$  平面

由图 8 可以看出, 经过图 7 所示的 T 混沌系统的电路仿真, 对于驱动系统 (1), 当响应系统分为 (2), (4) 时, 驱动系统状态变量  $x, z$  与响应系统变量  $\hat{x}, \hat{z}$  达到同步, 其  $x(z)-\hat{x}(\hat{z})$  曲线为过原点的直线  $x(z) = \hat{x}(\hat{z})$ , 相应地也可以从时间状态图中看到两变量曲线的同步, 这也表明电路仿真结果与理论分析结果符合.

## 5 结论

本文通过符号与数值运算, 分析和计算了 T 混

沌系统的平衡点稳定性, 分岔图, LE 谱, Poincare 截面等. 同时针对参数已知和参数未知的混沌系统, 结合反馈控制法设计了两个非线性反馈控制器, 实现了 T 混沌系统的同步. 并运用 Multisim 对该混沌系统同步进行电路设计与实验, 给出了实验结果. 电路实验与理论分析完全相符, 从而证实了该方法的可行性及可实现性.

感谢重庆大学计算机学院李华青博士的讨论.

- [1] Lorenz E N 1963 *Journal of the Atmospheric Sciences* **20** 130
- [2] Chen G, Ueta T 1999 *International Journal of Bifurcation and Chaos* **9** 1465
- [3] Vanecek A, Celikovsky S 1996 *Control systems: From linear analysis to synthesis of chaos*, London, Prentice-Hall
- [4] Lü J, Chen G 2002 *International Journal of Bifurcation and Chaos* **12** 659
- [5] Celikovsky S, Chen G 2002 *International Journal of Bifurcation and Chaos* **12** 1789
- [6] Yang Q G, Chen G R 2008 *International Journal of Bifurcation and Chaos* **18** 1393
- [7] Li W D, Wang X Y 2009 *Techniques of Automation and Applications* **28** 1 (in Chinese) [李卫东, 王秀岩 2009 自动化技术与应用 **28** 1]
- [8] Han J H, Wu Y J 2006 *Computer Simulation* **23** 6 (in Chinese) [韩军海, 吴云洁 2006 计算机仿真 **23** 6]
- [9] Wang Z, Wu Y T, Li Y X, Zou Y J 2009 *Proceedings of the 4th ICCSE* 441
- [10] Wang Z 2011 *Control Theory & Applications* **28** 1036 (in Chinese) [王震 2011 控制理论与应用 **28** 1036]
- [11] Wang Z 2007 *Analysis in Theory and Applications* **23** 343
- [12] Wang Z, Li Y X, Xi X J 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 010513 (in Chinese) [王震, 李永新, 惠小健 2011 物理学报 **60** 010513]
- [13] Sprott J C 1994 *Phys. Rev.E* **50** 647
- [14] Wei Z C 2011 *Physics Letters A* **376** 102
- [15] Wei Z C, Yang Q G 2012 *Nonlinear Dynamics* **68** 543
- [16] Wang Z 2010 *Nonlinear Dynamics* **60** 369
- [17] Gh. Tigan 2005 *Scientific Bulletin of the politehnica University of Timisoara* **50** 61
- [18] Li C G, Chen G R 2004 *Chaos, Solitons & Fractals* **22** 549
- [19] Lu J J, Liu C X 2007 *Chin. Phys.* **16** 1586
- [20] Xu Z, Liu C X 2008 *Chin. Phys. B* **17** 4033

# Dynamics analysis and synchronization of T chaotic system with its circuit simulation\*

Wang Zhen<sup>1)†</sup> Sun Wei<sup>1)2)</sup>

1) (*Department of Foundation, Xijing University, Xi'an 710123, China*)

2) (*School of Electronic and Information Engineering, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China*)

(Received 18 May 2012; revised manuscript received 6 August 2012)

## Abstract

The stability of equilibrium of a T chaotic system is analyzed, and the system bifurcation, Lyapunov exponent, Poincare section with numerical analysis are studied. Also, the synchronization problem with T chaotic systems with known or unknown parameters is studied in this paper. According to the Lyapunov function, feedback controller of the system is designed and has been proved. An electronic circuit is designed to realize the controller using Multisim. The simulation results demonstrate the effectiveness and realizableness of the proposed method.

**Keywords:** chaotic system, synchronization, circuit simulation

**PACS:** 05.45.Pq

**DOI:** 10.7498/aps.62.020511

---

\* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 10971164), the Natural Science Foundation of Shaanxi Province (Grant No. 2011EJ001), the Scientific Research Program Funded by Shaanxi Provincial Education Department (Grant Nos. 12JK1077, 12JK1073), and the Scientific Research Foundation of Xijing University (Grant Nos. XJ120107, XJ120108).

† Corresponding author. E-mail: williamwangz@126.com