

复杂网络时空混沌同步的 Backstepping 设计*

李雨珊 吕翎[†] 刘焯 刘硕 闫兵兵 常欢 周佳楠

(辽宁师范大学物理与电子技术学院, 大连 116029)

(2012年7月3日收到; 2012年8月5日收到修改稿)

利用 Backstepping 设计进行了复杂网络时空混沌的同步研究. 首先将实现两个混沌系统同步的 Backstepping 设计推广到由 m 个时空混沌系统构成任意结构的复杂网络的同步研究中. 进一步依据稳定性理论确定了网络同步时配置系数和控制增益满足的关系. 整个网络实现同步仅需要在网络中的一个节点施加控制输入即可. 进一步通过仿真实验验证了同步机理的有效性.

关键词: 同步, 复杂网络, Backstepping 设计, 时空混沌

PACS: 05.45.Xt, 05.45.Pq

DOI: 10.7498/aps.62.020513

1 引言

自 Winfree 开创性地研究了有限个具有相互作用的振子构成耦合系统的同步特性以来^[1], 有关耦合系统的网络同步化现象逐步激发了人们的研究兴趣. 1998年, Watts 和 Barabási 等建立了小世界网络以及无标度网络模型并研究了其网络特性, 使复杂网络模型更加地贴近实际系统^[2,3]. 同年, Pecora 以及 Carroll 利用主稳定函数法进行了连续时间耦合网络的混沌同步研究^[4], 引起了人们对复杂网络混沌同步问题的进一步关注. 在进行复杂网络同步的理论研究的同时, 人们发现网络同步在信息通信、物理学、计算机以及互联网等诸多应用领域具有广泛的实用性, 因此, 近年来复杂网络的同步研究已逐步成为网络理论的一个重要分支. 迄今, 国内外学者提出了许多有效的网络同步方法, 完成了随机网络、小世界网络、无标度网络、规则网络以及大量的实际网络的完全同步^[5-11]、时滞同步^[12,13]、相同步^[14-17]以及广义同步^[18,19].

复杂网络的混沌同步研究与两个混沌系统之间的同步问题相比较要复杂得多. 除了网络自适应同步以外, 一般情况下, 需要在复杂网络的每一个节点都加入相应的控制输入或控制器. 而复杂网络本身包含大量的节点, 这就导致了网络的同步代

价较大. 因此, 尽可能地减少网络同步控制输入或控制器的数目是应用领域期望的目标.

Backstepping 设计是同步两个混沌系统时减少控制输入或控制器数目的有效手段, 其同步技术已相对成熟. 但是利用 Backstepping 设计实现复杂网络同步的报道还比较少见. 本文利用 Backstepping 设计进行了复杂网络时空混沌的同步研究. 首先将实现两个混沌系统同步的 Backstepping 设计推广到由 m 个时空混沌系统构成任意结构的复杂网络的同步研究中. 进一步依据稳定性理论确定了网络同步时配置系数和控制增益满足的关系. 整个网络实现同步仅需要在网络中的一个节点施加控制输入即可. 进一步通过仿真实验验证了同步机理的有效性.

2 网络同步的 Backstepping 设计

考虑时空混沌系统的一般形式

$$\frac{\partial x(r,t)}{\partial t} = f(x(r,t)), \quad (1)$$

其中 $x(r,t) \in R^n$ 为系统的状态变量, $f: R^n \rightarrow R^n$.

取 m 个时空混沌系统 (1) 作为节点构成一个任意结构的复杂网络. 网络中第 i 个节点所满足的状

* 辽宁省自然科学基金 (批准号: 20082147) 和辽宁省教育厅创新团队计划 (批准号: 2008T108) 资助的课题.

[†] 通讯作者. E-mail: luling1960@yahoo.com.cn

态方程为

$$\frac{\partial x_i(r,t)}{\partial t} = f(x_i(r,t)) + \xi \sum_{j=1}^m c_{ij} G(x_j(r,t)), \quad (2)$$

其中 $G(x_j(r,t))$ 是网络节点之间的耦合函数, ξ 为耦合强度因子. c_{ij} 表示网络耦合矩阵的矩阵元, 它的具体表示因网络的拓扑结构而异. 这里以单变量单向链式网络为例说明网络的同步机理. 此时, 耦合函数 $G(x_j(r,t)) = x_j(r,t)$, 耦合矩阵具有下列表示:

$$C = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}. \quad (3)$$

仅对网络中的一个节点施加控制输入 $u(r,t)$, 并假设此控制输入施加在网络的第 m 个节点上, 即网络的终端. 定义网络节点之间状态变量的误差

$$e_i(r,t) = x_{i+1}(r,t) - x_i(r,t), \quad (i = 1, 2, \cdots, m-1). \quad (4)$$

构建此网络的第一个部分 Lyapunov 函数

$$V_1 = \frac{1}{2} z_1^2, \quad (5)$$

这里定义 $z_1 = e_1(r,t)$.

通过 (5) 式, 可以得到下列关系:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_1}{\partial t} &= z_1 \frac{\partial z_1}{\partial t} \\ &= -\sigma z_1^2 + z_1 \left(\sigma z_1 + \frac{\partial z_1}{\partial t} \right), \end{aligned} \quad (6)$$

这里 σ 为大于零的常量.

定义 $z_2 = \sigma z_1 + \frac{\partial z_1}{\partial t}$, 并构建网络的第二个部分 Lyapunov 函数

$$V_2 = V_1 + \frac{1}{2} z_2^2. \quad (7)$$

利用 (7) 式可以求得 V_2 的导数关系式

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_2}{\partial t} &= \frac{\partial V_1}{\partial t} + z_2 \frac{\partial z_2}{\partial t} \\ &= -\sigma z_1^2 - \sigma z_2^2 + z_2 \left(z_1 + \sigma z_2 + \frac{\partial z_2}{\partial t} \right). \end{aligned} \quad (8)$$

同理, 构建的网络第 i 个部分 Lyapunov 函数具有下列形式:

$$V_i = V_{i-1} + \frac{1}{2} z_i^2. \quad (9)$$

并且利用 (9) 式得到

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_i}{\partial t} &= \frac{\partial V_{i-1}}{\partial t} + z_i \frac{\partial z_i}{\partial t} \\ &= -\sigma \sum_{j=1}^i z_j^2 + z_i \left(z_{i-1} + \sigma z_i + \frac{\partial z_i}{\partial t} \right). \end{aligned} \quad (10)$$

依此类推, 最终定义 $z_{m-1} = z_{m-3} + \sigma z_{m-2} + \frac{\partial z_{m-2}}{\partial t}$, 构造整个网络的 Lyapunov 函数

$$V_{m-1} = V_{m-2} + \frac{1}{2} (\eta z_{m-2} + z_{m-1})^2, \quad (11)$$

式中 η 为配置系数. 这样, 由 (11) 式可以得到

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_{m-1}}{\partial t} &= \frac{\partial V_{m-2}}{\partial t} + (\eta z_{m-2} + z_{m-1}) \\ &\quad \times \left(\eta \frac{\partial z_{m-2}}{\partial t} + \frac{\partial z_{m-1}}{\partial t} \right) \\ &= -\sigma \sum_{j=1}^{m-2} z_j^2 + z_{m-2} z_{m-1} \\ &\quad + (\eta z_{m-2} + z_{m-1}) \left(\eta \frac{\partial z_{m-2}}{\partial t} + \frac{\partial z_{m-1}}{\partial t} \right) \\ &= -\sigma \sum_{j=1}^{m-2} z_j^2 + z_{m-2} z_{m-1} \\ &\quad + (\eta z_{m-2} + z_{m-1}) (H(x_1, x_2, \cdots, x_m) \\ &\quad + \xi^{m-2} u(r,t)), \end{aligned} \quad (12)$$

其中的表达式 $\eta \frac{\partial z_{m-2}}{\partial t} + \frac{\partial z_{m-1}}{\partial t}$ 在考虑到 z_i 的定义后, 可以展开为含有 $\xi^{m-2} u(r,t)$ 的一项和其余的一个关于 $x_i(r,t)$ 的函数, 将此函数记作 $H(x_1, x_2, \cdots, x_m)$.

当网络控制输入的形式满足

$$u(r,t) = -\xi^{-(m-2)} [H(x_1, x_2, \cdots, x_m) + \rho (\eta z_{m-2} + z_{m-1})], \quad (13)$$

其中 ρ 为控制增益.

(12) 式可以简化为

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_{m-1}}{\partial t} &= -\sigma \sum_{j=1}^{m-2} z_j^2 + z_{m-2} z_{m-1} - \rho (\eta z_{m-2} + z_{m-1})^2 \\ &= -\sigma \sum_{j=1}^{m-3} z_j^2 - [\sigma + \rho \eta^2 - (2\rho \eta - 1)^2] z_{m-2}^2 \\ &\quad - \left(\rho - \frac{1}{4} \right) z_{m-1}^2 \\ &\quad - \left[(2\rho \eta - 1) z_{m-2} + \frac{1}{2} z_{m-1} \right]^2. \end{aligned} \quad (14)$$

当配置系数 η 和控制增益 ρ 满足下列关系:

$$\sigma + \rho \eta^2 - (2\rho \eta - 1)^2 > 0, \quad (15)$$

$$\rho - \frac{1}{4} > 0. \quad (16)$$

存在 $\frac{\partial V_{m-1}}{\partial t} < 0$. 基于 Lyapunov 定理, 整个网络节点与节点之间实现了混沌同步.

3 仿真实验

以描述湍流、流体流动与传热等诸多实际物理过程的 Burgers 方程为例进行上述同步原理的仿真实验. Burgers 方程是对流扩散方程, 其本身能够呈现丰富的时空动力学行为. 一维 Burgers 方程的线性化模型可以用下列状态方程表示^[20]

$$\frac{\partial x(r,t)}{\partial t} = -k \frac{\partial x(r,t)}{\partial r} + \nabla^2 x(r,t), \quad (17)$$

其中 k 为系统参量, $x(r,t)$ 为系统的状态变量, $\nabla^2 = \partial^2 / \partial r^2$.

通过计算 Burgers 方程的最大 Lyapunov 指数可以量度系统运动轨迹发散和收敛的程度, 以此判定系统所呈现的动力学行为. 这里, 任选系统的空间线度为 $L = 100$, 边界限定为周期性边界条件 $x(r,t) = x(r+L,t)$, 计算 Burgers 方程的最大 Lyapunov 指数随系统参量 k 的演化关系如图 1 所示. 图 1 显示 Burgers 方程的最大 Lyapunov 指数存在大于零的区域, 表明在该区域内取参量 k 值, 系统将呈现时空混沌行为. 参量 $k = 4$ 时系统状态变量随时空演化的混沌规律如图 2 所示.

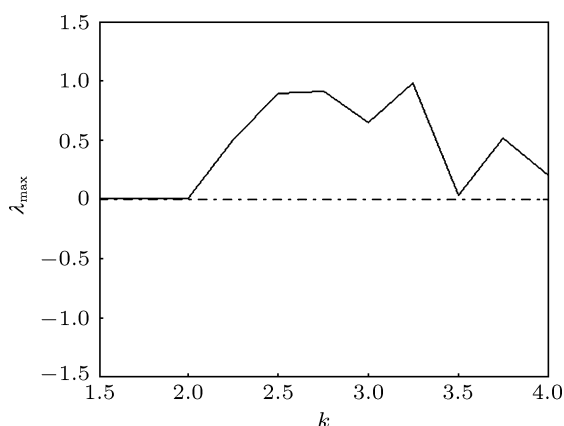


图 1 Lyapunov 指数随参量 k 的演化

以 m 个 Burgers 方程 (17) 作为网络节点, 按 (2) 式的连接构成单向链式网络, 耦合矩阵 C 由 (3) 给出. 仿真实验节点数 $m = 3$ 时, 网络节点之间耦合矩

阵 C 的具体表示是

$$C = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (18)$$

网络终端第三个节点所施加的控制输入的形式由 (13) 式确定, 三个节点 Burgers 方程状态变量分别取 $x_1(r,t)$, $x_2(r,t)$, $x_3(r,t)$. 定义网络节点之间状态变量的误差 $e_1 = x_2(r,t) - x_1(r,t)$, $e_2 = x_3(r,t) - x_2(r,t)$, 选取网络参量 $\sigma = 1$, $\xi = 1$, 控制增益取 $\rho = 1$, 配置系数 η 的数值选取满足 (15) 式的约束. 任选时间序列为 5 时进行网络的耦合连接, 仿真模拟网络误差随时空的演化结果如图 3 和图 4 所示. 图 3 和图 4 显示, 由于网络三个节点状态方程耦合前状态变量所取的初始值不同, 因此, 其误差随时空的演化差异明显. 但在网络耦合连接后, 网络所有误差变量经过一个暂态过程后均趋于零, 整个网络表现出稳定的同步性能.

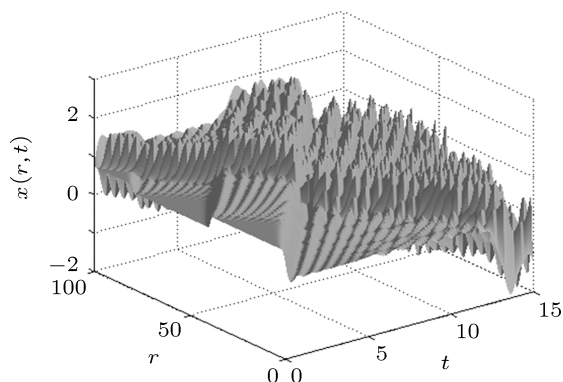


图 2 状态变量 $x(r,t)$ 的时空演化

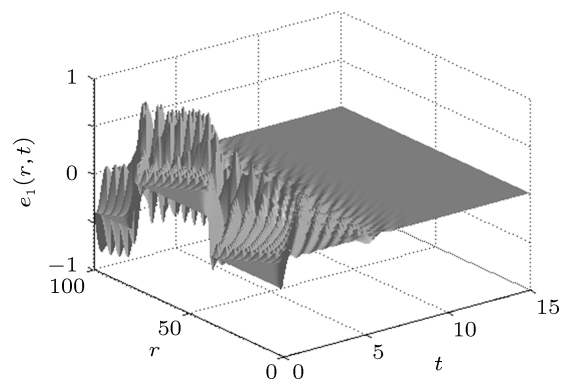


图 3 节点 1 和 2 之间误差变量的时空演化

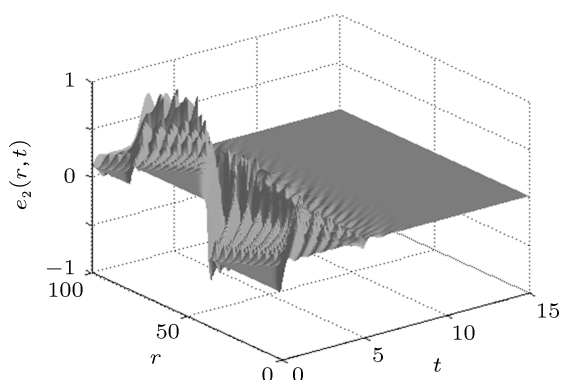
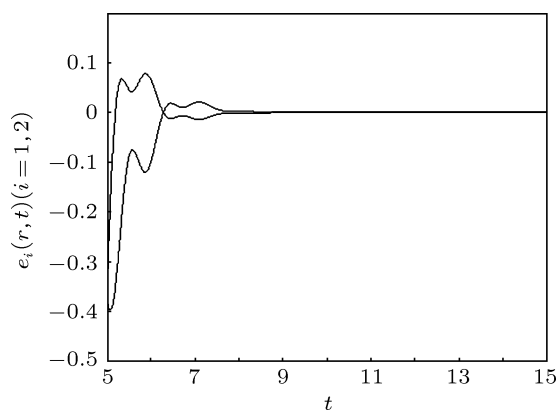
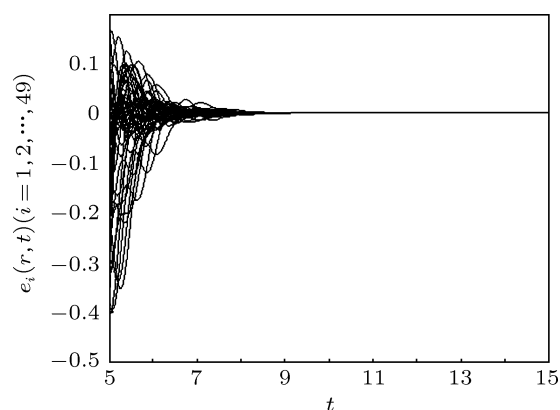


图4 节点2和3之间误差变量的时空演化

仿真分析还发现,网络规模的大小对网络同步的稳定性没有明显影响.我们对网络节点数 $m=3$ 以及网络节点数 $m=50$ 时的同步仿真结果进行了比较.图5是三个 Burgers 方程作为网络节点在空间任一格点的误差变量 $e_i(r, t)$ ($i=1, 2$) 随时间的演

图5 节点误差变量的时间演化 ($m=3$)图6 节点误差变量的时间演化 ($m=50$)

化规律.图6是50个 Burgers 方程作为网络节点在空间任一格点的误差变量 $e_i(r, t)$ ($i=1, 2, \dots, 49$) 随时间的演化规律.仿真结果显示,在网络其它参量取值保持不变的情况下,两者的同步速率以及误差曲线的稳定性等网络同步性能指标无明显差别.

4 结论

利用 Backstepping 设计进行了复杂网络时空混沌的同步研究.首先将实现两个混沌系统同步的 Backstepping 设计推广到由 m 个时空混沌系统构成任意结构的复杂网络的同步研究中.进一步依据稳定性理论确定了网络同步时配置系数和控制增益满足的关系.以描述诸多实际物理过程的 Burgers 方程作为网络节点进行同步原理的仿真实验.研究结果表明,仅在网络的一个节点施加控制输入,就可以实现整个网络的时空混沌同步.并且,网络规模的大小不影响网络同步的稳定性.

- [1] Winfree A T 1967 *J. Theo. Biol.* **16** 15
- [2] Watts D J 1998 *Nature* **393** 440
- [3] Barabási A L, Albert R 1999 *Science* **286** 509
- [4] Pecora L M, Carroll T L 1998 *Phys. Rev. Lett.* **80** 2109
- [5] Bergner A, Frasca M, Sciuto G, Buscarino A, Nganga E J, Fortuna L, Kurths J 2012 *Phys. Rev. E* **85** 026208
- [6] Kouvaris N, Provata A, Kugiumtzis D 2010 *Phys. Lett. A* **374** 507
- [7] Song Q, Cao J D, Liu F 2010 *Phys. Lett. A* **374** 544
- [8] Li D, Leyva I, Almendral J A, Sendiña-Nadal I, Buldú J M, Havlin S, Boccaletti S 2008 *Phys. Rev. Lett.* **101** 168701
- [9] Donetti L, Hurtado P I, Muñoz M A 2005 *Phys. Rev. Lett.* **95** 188701
- [10] Yu W W, Chen G R, Lü J H 2009 *Automatica* **45** 429
- [11] La Rocca C E, Braunstein L A, Macri P A 2009 *Phys. Rev. E* **80** 26111
- [12] Selivanov A A, Lehnert J, Dahms T, Hövel P, Fradkov A L, Schöll E 2012 *Phys. Rev. E* **85** 016201
- [13] Sun W, Hu T S, Chen Z, Chen S H, Xiao L 2011 *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.* **16** 4501
- [14] Jalan S, Amritkar R E 2003 *Phys. Rev. Lett.* **90** 014101
- [15] Acebrón J A, Bonilla L L, Vicente C J P, Ritort F, Spigler R 2005 *Rev. Mod. Phys.* **77** 137
- [16] Moreno Y, Pacheco A F 2004 *Europhys. Lett.* **68** 603
- [17] Cui B T, Lou X Y 2009 *Chaos, Solitons and Fractals* **39** 288
- [18] Shang Y, Chen M Y, Kurths J 2009 *Phys. Rev. E* **80** 027201
- [19] Lü L, Li G, Guo L, Meng L, Zou J R, Yang M 2010 *Chin. Phys. B* **19** 080507
- [20] Zhu Q Y, Ma Y W 2000 *Comput. Mech.* **17** 379 (in Chinese) [朱庆勇, 马延文 2000 计算力学学报 **17** 379]

Spatiotemporal chaos synchronization of complex networks by Backstepping design*

Li Yu-Shan Lü Ling[†] Liu Ye Liu Shuo Yan Bing-Bing
Chang Huan Zhou Jia-Nan

(College of Physics and Electronic Technology, Liaoning Normal University, Dalian 116029, China)

(Received 3 July 2012; revised manuscript received 5 August 2012)

Abstract

Spatiotemporal chaos synchronization of complex networks by Backstepping design is investigated. Backstepping design is extended from synchronization between two chaotic systems to the synchronization of complex network constituted spatiotemporal chaotic systems. The relation between the configuration coefficient and the control gain is identified according to the stability theory. When the control input is added to any node of the network, the network synchronization is realized. Furthermore, simulation is made to verify the effectiveness of the synchronization mechanism.

Keywords: synchronization, complex network, Backstepping design, spatiotemporal chaos

PACS: 05.45.Xt, 05.45.Pq

DOI: 10.7498/aps.62.020513

* Project Supported by the Natural Science Foundation of Liaoning Province, China (Grant No. 20082147), and the Innovative Team Program of Liaoning Educational Committee, China (Grant No. 2008T108).

[†] Corresponding author. E-mail: luling1960@yahoo.com.cn