

光晶格中双组分玻色-爱因斯坦凝聚系统的调制不稳定性*

藤斐 谢征微[†]

(四川师范大学物理与电子工程学院, 成都 610066)

(2012年8月11日收到; 2012年8月29日收到修改稿)

利用线性稳定分析的方法, 在不满足原子流相等的条件下, 对光晶格中双组分玻色-爱因斯坦凝聚原子 (BEC) 系统的调制不稳定性区域与不同 BEC 组分的波长和不同的调制波长, 以及两组分 BEC 间相互作用大小之间的关系进行了研究. 结果显示, 光晶格中双组分 BEC 系统的调制稳定性的区域在不满足原子流相等的条件下, 随不同的波长, 不同的调制和相互作用之间的大小会出现了较大的变化. 相应结果可为实际应用中如何操控双组分 BEC 提供有用的信息.

关键词: 玻色-爱因斯坦凝聚体, 调制不稳定性, 光晶格, 双分量

PACS: 67.85.De, 03.75.Lm, 67.25.dk, 47.37.+q

DOI: 10.7498/aps.62.026701

1 引言

在非线性系统中, 一个弱干扰调制可使系统的激发谱出现虚频率, 从而导致初始平面波振幅的指数增长, 使它分解为一系列的局域波, 这类调制不稳定性现象广泛存在于流体力学, 等离子物理学和非线性光学等物理系统中^[1,2]. 近年来, 玻色-爱因斯坦凝聚体 (BEC) 系统里的调制不稳定性现象也引起了人们的极大兴趣. 调制不稳定性现象在理解玻色-爱因斯坦凝聚系统中的许多非线性动力学行为, 如局域模或孤子的产生, 畴的形成, 经典超流到绝缘体相变等方面有着重要的作用^[3-12]. 对光晶格中双组分系统的调制不稳定性研究显示, 由于其存在不同组分之间的相互作用, 双组分和单组分相比有着更加丰富的动力学行为^[13-16]. 但在已有的对光晶格双组分系统的调制不稳定性理论研究中, 为了获得解析解, 所得结果一般都是在一定限制条件下 (如原子流相等的条件) 进行的^[17-22]. 为了更全面、更完整地理解光晶格中双组分 BEC 的调制不稳定性, 本文利用数值计算方法,

进一步对光晶格中双组分系统的调制不稳定性进行了研究, 分析了在不同的相互作用的情况下, 不同组分受到不同的调制时, 光晶格中双分量 BEC 的调制不稳定性. 数值计算的优点是可以不受解析解限制条件的影响, 其结果结合解析分析, 可为操控光晶格中的 BEC 提供新的信息和途径, 进一步加深对 BEC 和非线性现象的理解.

2 理论模型

利用紧束缚近似, 光晶格中双组分 BEC 原子在格点 j 的概率幅 $\Psi_{j,\sigma}$ ($\sigma = 1, 2$) 满足如下的离散非线性 Schrödinger 方程^[17,18,20]:

$$i \frac{\partial \Psi_{j,\sigma}}{\partial t} = -J_{\sigma}(\Psi_{j-1,\sigma} + \Psi_{j+1,\sigma}) + (U_{\sigma,\sigma} |\Psi_{j,\sigma}|^2 + U_{\sigma,\sigma'} |\Psi_{j,\sigma'}|^2) \Psi_{j,\sigma}, \quad (1)$$

其中 J_{σ} 是近邻跃迁系数, $U_{\sigma,\sigma}$ 表示同一 σ 组分间原子和原子之间的相互作用, $U_{\sigma,\sigma'}$ ($\sigma' = 1, 2$) 表示两个不同组分间原子和原子之间相互作用. 方程 (1) 具有如下的平面波解 $\Psi_{j,\sigma} = \Psi_{\sigma}^{(0)} e^{ik_{\sigma}j - i\mu_{\sigma}t}$, 其中 μ_{σ} 为化学势, 可由归一化条件 $\sum_{j,\sigma} \Psi_{j,\sigma} = 1$ 确

* 国家自然科学基金 (批准号: 10847006) 和四川省教育厅自然科学基金重点基金 (批准号: 08ZA039) 资助的课题.

[†] 通讯作者. E-mail: zzwxie@yahoo.com.cn

定. 当该平面波受到一个小的微扰调制时可表示为

$$\psi_{j,\sigma} = [\psi_{\sigma}^{(0)} + \delta\psi_{j,\sigma}] e^{ik_{\sigma}j - i\mu_{\sigma}t}, \quad (2)$$

其中

$$\delta\psi_{j,\sigma} = u_{\sigma} e^{iq_{\sigma}j - i\omega t} + v_{\sigma}^* e^{-iq_{\sigma}j + i\omega t}, \quad (3)$$

表示一个小的微扰调制 ($\delta\psi_{j,\sigma} \ll \psi_{\sigma}^{(0)}$), q_{σ} 为调制波矢, u_{σ} 和 v_{σ} 是常数, ω 为微扰调制所导致的激发谱. 将 (2), (3) 式代入方程 (1), 忽略掉高阶项可得

$$M \times \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{pmatrix} = 0, \quad (4)$$

其中

$$M = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & c_1 \\ e_1 & f_1 & 0 & 0 \\ c_2 & c_2 & a_2 & b_2 \\ 0 & 0 & e_2 & f_2 \end{pmatrix}, \quad (5)$$

$$a_1 = [\omega - 2J_1 \cos k_1 + 2J_1 \cos(k_1 + q_1) - 2U_{11}\Psi_1^{(0)2}] \cos(q_1j - \omega t),$$

$$b_1 = [-\omega - 2J_1 \cos k_1 + 2J_1 \cos(k_1 - q_1) - 2U_{11}\Psi_1^{(0)2}] \cos(q_1j - \omega t),$$

$$c_1 = -2U_{12}\Psi_2^{(0)}\Psi_1^{(0)} \cos(q_2j - \omega t),$$

$$e_1 = \omega - 2J_1 \cos k_1 + 2J_1 \cos(k_1 + q_1),$$

$$f_1 = \omega + 2J_1 \cos k_1 - 2J_1 \cos(k_1 + q_1),$$

$$a_2 = [\omega - 2J_2 \cos k_2 + 2J_2 \cos(k_2 + q_2) - 2U_{22}\Psi_2^{(0)2}] \cos(q_2j - \omega t),$$

$$b_2 = [-\omega - 2J_2 \cos k_2 + 2J_2 \cos(k_2 - q_2) - 2U_{22}\Psi_2^{(0)2}] \cos(q_2j - \omega t),$$

$$c_2 = -2U_{12}\Psi_1^{(0)}\Psi_2^{(0)} \cos(q_1j - \omega t),$$

$$e_2 = \omega - 2J_2 \cos k_2 + 2J_2 \cos(k_2 + q_2),$$

$$f_2 = \omega + 2J_2 \cos k_2 - 2J_2 \cos(k_2 + q_2).$$

调制所导致的平面波激发频率 ω 为矩阵 M 的本征值. 当 ω 为虚数时, 则平面波的波函数概率振幅会出现指数的增长, 出现调制不稳定性.

在满足原子流相等, 即 $J_1 \sin(k_1a) = J_2 \sin(k_2a)$ 和调制波矢 $q_1 = q_2$ 的条件下, 由 M 矩阵可得到容

易分析的 ω 解析解形式 [18,20]. 如果上述条件不满足, ω 解析解的形式将变得非常复杂, 此时则可以通过数值计算进行求解分析. 数值计算的优点是可以不受上述解析解要求的条件限制, 因而可拓宽对光晶格中双组分 BEC 的调制不稳定性的认识. 下面基于数值计算的结果, 我们对光晶格两组分系统的调制不稳定性与两组分平面波波矢 k_1, k_2 , 两个调制波波矢 q_1, q_2 , 不同种组分之间的相互作用 U_{12} 和同种组分之间的相互作用 U_{11}, U_{22} 的关系进行讨论.

3 计算结果及讨论

为了讨论方便, 我们根据两组分 BEC 平面波波长的长短, 我们把两组分分为长波和长波, 长波和短波以及短波和短波的情况. 图 1 所示为两组分 BEC 平面波为长波和长波的情况 (即波矢 $k_1, k_2 < \pi/2$). 图 1(a), (b) 是光晶格双组分 BEC 系统在原子流守恒条件下调制不稳定性区域随两组分间相互作用 U_{12} 的变化. 我们的数值计算结果和文献 [18] 由解析解得到的结果一致. 图 1(c), (d) 则为光晶格双组分 BEC 系统在不满足原子流相等条件下 (通过取不同的 k_1 和 k_2 的值实现, 其他条件一致), 调制不稳定性区域随两组分间相互作用 U_{12} 的变化. 比较原子流相等和不相等的情况, 可以看出稳定和不稳定区域的分布相差不大. 但对于长波调制 ($q = 0$), 在原子流相等的情况下, 不稳定性发生的临界条件和双分量系统的相分离条件 ($U_{12}^2 \geq U_1 U_2$) 一致. 但对于原子流不相等的情况, 在还未到相分离条件的情况下, 不稳定性已经开始出现.

当光晶格中双组分 BEC, 一个为长波 ($k_2 < \pi/2$), 一个短波 ($k_1 > \pi/2$) 时, 双组分 BEC 的调制稳定和不稳定区域的分布随 U_{12} 的变化如图 2 所示. 图 2(a) 是双组分 BEC 在满足原子流相等的条件下的数值计算结果, 和文献 [18] 由解析解得到的结果一致, 在 $U_{12} \approx 12$ 附近出现一狭长的稳定区域. 图 2(b), (c), (d) 不满足原子流相等的情况下得到的结果. 在数值计算中, 短波组分的 BEC 平面波的波矢固定为 $k_1 = 0.8\pi$, 改变长波的 BEC 平面波的波矢 k_2 , 其他参数保持不变. 经过比较, 可以看到随着长波组分 BEC 平面波的 k_2 逐渐接近 $\pi/2$, 稳定区域逐渐消失.

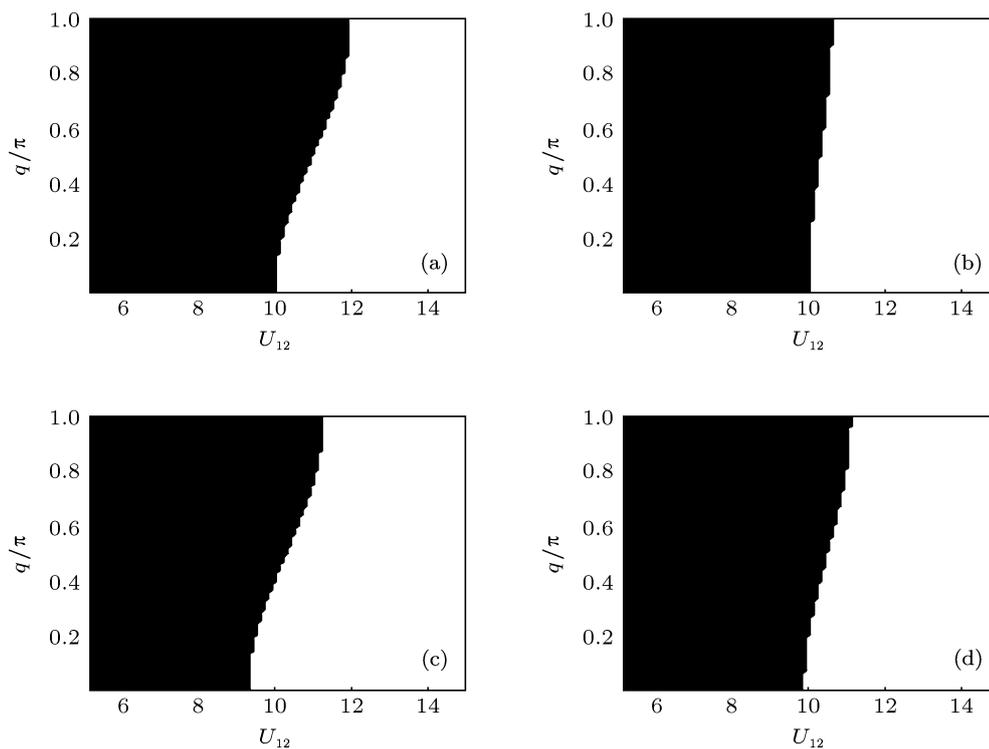


图1 取 $J_1 = J_2 = 1, \Psi_1^{(0)} = \Psi_2^{(0)} = 1, U_{11} = U_{22} = 10$, (a) $k_1 = 0, k_2 = 0$; (b) $k_1 = 0.4\pi, k_2 = 0.4\pi$; (c) $k_1 = 0, k_2 = 0.4\pi$; (d) $k_1 = 0.2\pi, k_2 = 0.4\pi$ (图中黑色表示稳定区域, 白色表示不稳定区域)

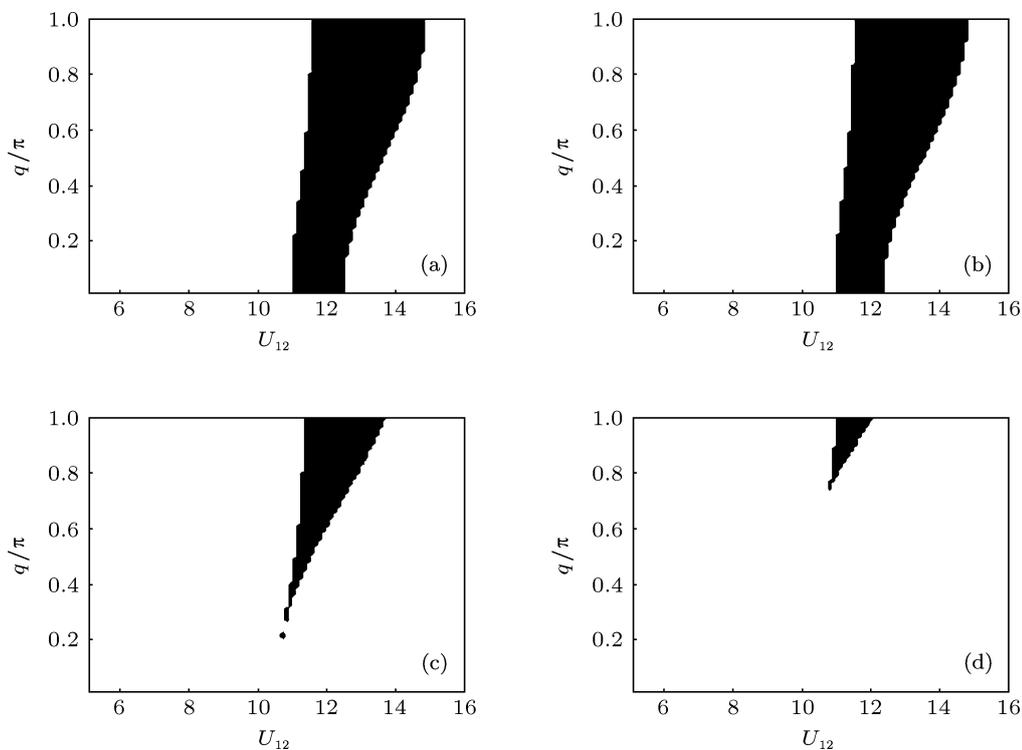


图2 计算中, 各参数取值为 $J_1 = 1, J_2 = 2, \Psi_1^{(0)} = \Psi_2^{(0)} = 1, U_{11} = 10, U_{22} = 12$, (a) $k_1 = 0.8\pi, k_2 = 0.095\pi$; (b) $k_1 = 0.8\pi, k_2 = 0.1\pi$; (c) $k_1 = 0.8\pi, k_2 = 0.2\pi$; (d) $k_1 = 0.8\pi, k_2 = 0.3\pi$ (图中黑色表示稳定区域, 白色表示不稳定区域)

当我们将长波组分的 BEC 平面波的波矢固定为 $k_2 = 0.095\pi$, 改变短波的 BEC 平面波的波矢 k_1 , 使其在 $\pi - \pi/2$ 的范围内变化, 其他参数保持不变, 结果由图 3 所示. 由图 3(a), (b), (c) 看出, 随着短波 BEC 组分平面波的波矢在 $\pi/2 < k_1 < \pi$ 的区域内, 在相分离区域出现带状的稳定区域, 该区域随着

$k_1 \rightarrow \pi/2$ 而逐渐增大, 而易混合区域则是调制不稳定区域.

当两组分 BEC 的平面波的波矢均为短波的时候, 由于短波的 BEC 组分的高速不稳定性, 不论是易混合还是相分离以及调制如何, 没有稳定区域出现.

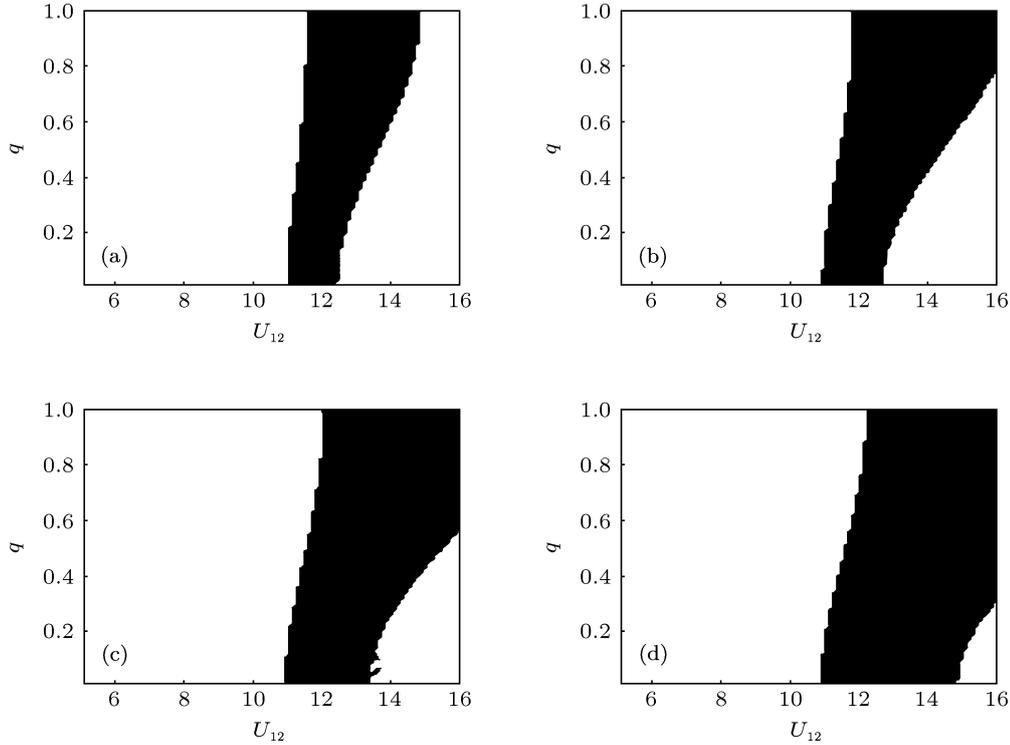


图 3 $J_1 = 1, J_2 = 2, \Psi_1^{(0)} = \Psi_2^{(0)} = 1, U_{11} = 10, U_{22} = 12$, (a) $k_1 = 0.8\pi, k_2 = 0.095\pi$; (b) $k_1 = 0.7\pi, k_2 = 0.095\pi$; (c) $k_1 = 0.65\pi, k_2 = 0.095\pi$; (d) $k_1 = 0.6\pi, k_2 = 0.095\pi$ (图中黑色表示稳定区域, 白色表示不稳定区域)

在光晶格中双组分 BEC 的调制不稳定性研究中, 为了得到解析的结果, 除了原子流相等的条件的限制外, 一般只考虑了两组分受到同样调制, 即 $q_1 = q_2$ 的情况. 但在实际的应用中, 光晶格中不同组分 BEC 受到不同调制时的调整不稳定性性质也具有一定的意义. 下面我们对该性质作一分析. 首先, 当两种组分的平面波均为长波并受到不同调制的情况. 计算结果表明, 在易混合状态下, 长波双组分 BECs 系统对于任何调制都是稳定的; 在相分离状态下, 如果不同种组分之间的相互作用 U_{12} 大于与同种组分的相互作用 $U_{11}U_{22}$ 时, 光晶格中的长波双组分系统对于任何调制都是不稳定的. 但当上述相互作用相差不大时, 长波双组分 BECs 系统存在稳定性区域, 其稳定区域在 (q_1, q_2) 平面上的分布如图 4 所示.

从图 4 中可以看出, 稳定区域主要分布在 $(q_1,$

$q_2)$ 的对角线的上半平面, 该稳定区域随着第二种 BEC 组分平面波波矢的增大, 逐渐减小了. 同时可以看出, 当 U_{12} 和 $U_{11}U_{22}$ 相差不大时, 光晶格中长波双组分 BEC 在不同的短波调制下始终有稳定性区域存在.

当一种 BEC 组分的平面波为长波而第二种为短波时, 如果双组分 BECs 处于易混合状态光晶格双分量系统是不稳定的, 不存在稳定区域. 这种不稳定性是由于短波组分的不稳定性导致的. 在相分离条件下, 系统的调制不稳定性区域在 (q_1, q_2) 平面上的分布如图 5 和图 6 所示.

从图 5 的中可以看出, 当双组分 BECs 均处于相分离条件下, 稳定区域主要分布在 (q_1, q_2) 的下半平面并随着第二种 BEC 平面波的波矢逐渐增大, 稳定区域逐渐减小. 当固定两种组分的平面波, 第一种为长波稳定的波矢 ($k_1 = 0.1\pi$) 而第二种为短

波不稳定的波矢 ($k_2 = 0.7\pi$) 的时候, 不同种组分之间的相互作用 U_{12} 的大小对 (q_1, q_2) 上稳定区域的

分布如图 6 所示. 由图 6 可以看出, 随着不同种组分之间的相互作用 U_{12} 的增大, 稳定区域减小.

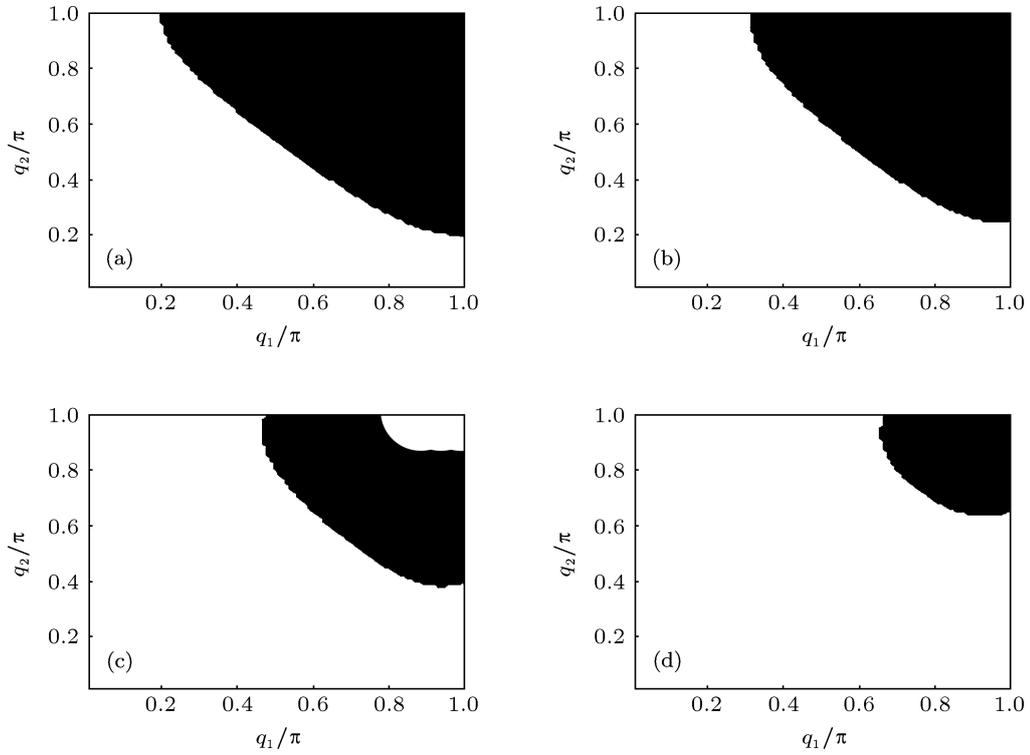


图 4 取 $J_1 = J_2 = 1, \Psi_1^{(0)} = \Psi_2^{(0)} = 1, U_{11} = U_{22} = 10, U_{12} = 11$, (a) $k_1 = 0.1\pi, k_2 = 0.1\pi$; (b) $k_1 = 0.1\pi, k_2 = 0.2\pi$; (c) $k_1 = 0.1\pi, k_2 = 0.3\pi$; (d) $k_1 = 0.1\pi, k_2 = 0.4\pi$ (图中黑色表示稳定区域, 白色表示不稳定区域)

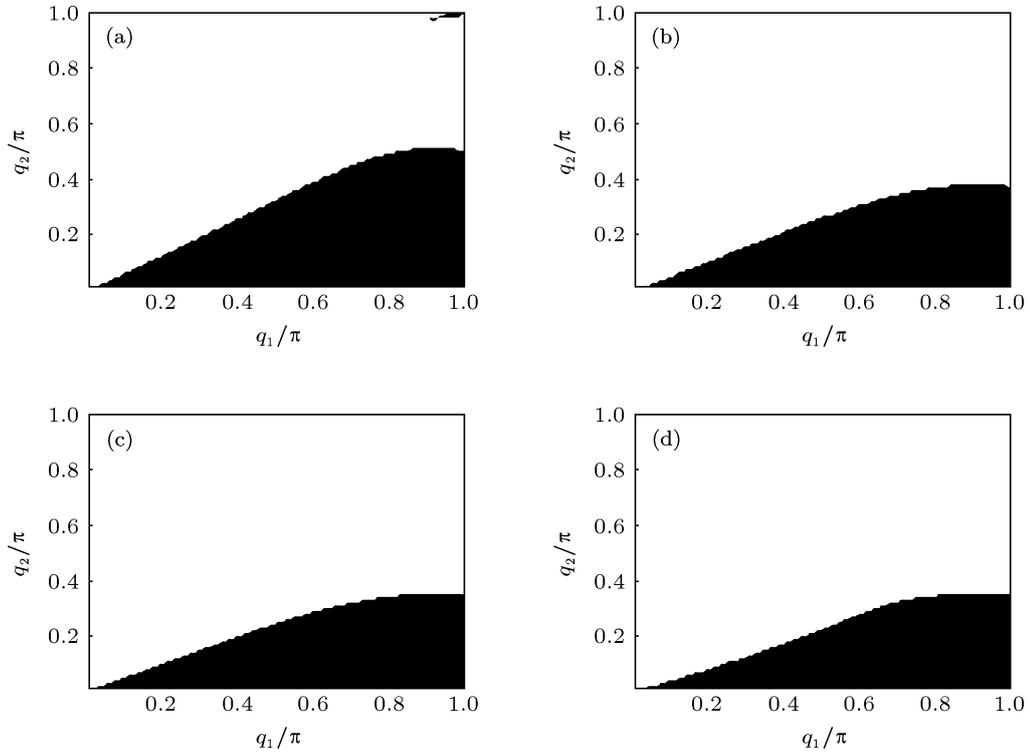


图 5 $J_1 = J_2 = 1, \Psi_1^{(0)} = \Psi_2^{(0)} = 1, U_{11} = U_{22} = 10, U_{12} = 13$, (a) $k_1 = 0.1\pi, k_2 = 0.6\pi$; (b) $k_1 = 0.1\pi, k_2 = 0.7\pi$; (c) $k_1 = 0.1\pi, k_2 = 0.8\pi$; (d) $k_1 = 0.1\pi, k_2 = 0.9\pi$ (图中黑色表示稳定区域, 白色表示不稳定区域)

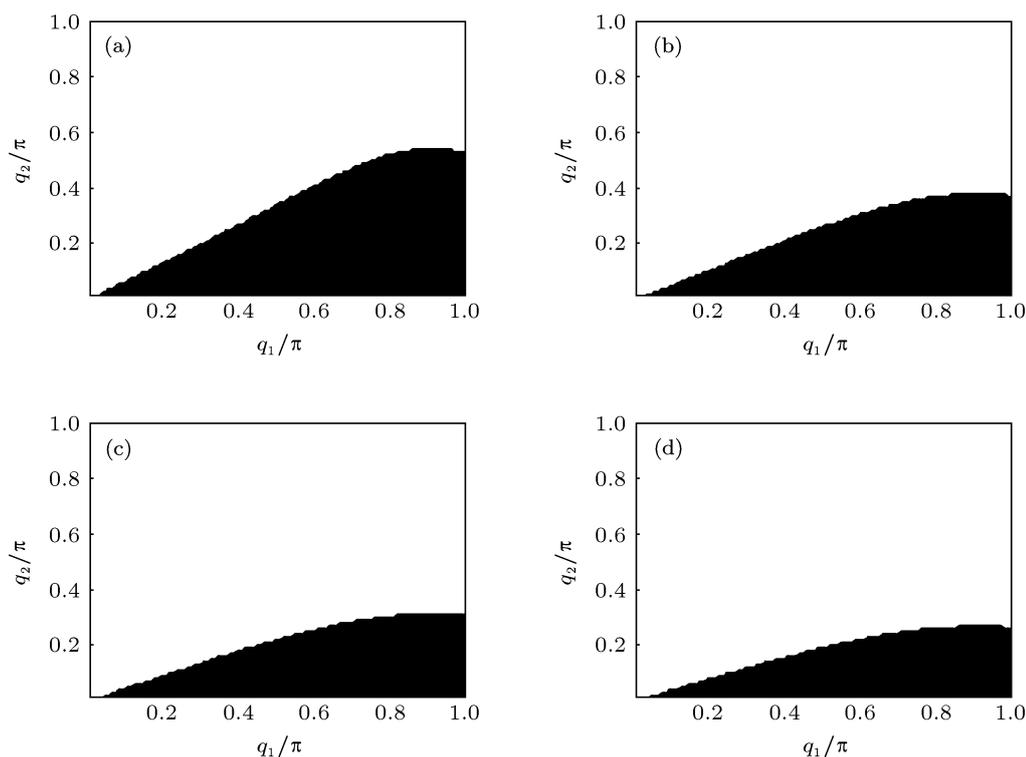


图6 $J_1 = J_2 = 1, \Psi_1^{(0)} = \Psi_2^{(0)} = 1, U_{11} = U_{22} = 10, k_1 = 0.1\pi, k_2 = 0.7\pi$, (a) $U_{12} = 11$; (b) $U_{12} = 13$; (c) $U_{12} = 15$; (d) $U_{12} = 17$ (图中黑色表示稳定区域, 白色表示不稳定区域)

4 结论

我们主要分析不受原子流相等限制和不同组分可受不同调制的情况下, 光晶格双组分 BECs 的调制不稳定性. 对于两组分为长波和长波的情况, 在同样的调制波的作用下, 稳定性区域主要出现在相互作用满足易混合状态的情况下. 但原子流不守恒会导致在易混合区出现长波调制不稳定性. 在不同调制波的作用下, 相分离状态下的稳定区域主要出现在短波调制的情况下. 对于两组分为长波和

短波的情况, 在同样的调制波的作用下, 稳定性区域主要出现在相互作用满足相分离状态的情况下的一狭长的区域, 该稳定区域在不满足原子流守恒的条件下, 随组分波矢的减小而逐渐消失. 在不同调制波的作用下, 稳定区域主要出现在短波调制的情况下. 对于两组分为短波和短波的情况无稳定区域. 上述分析对不同的调整不稳定性分布的分析可为实际应用中如何操控双组分 BEC 提供有用的信息.

- [1] Cross M C, Hohenberg P C 1993 *Rev. Mod. Phys.* **65** 851
- [2] Agrawal G P 1995 *Nonlinear Fiber Optics* 2nd ed. (Academic, San Diego)
- [3] Salasnich L, Parola A, Reatto L 2003 *Phys. Rev. Lett.* **91** 080405
- [4] Liang Z X, Zhang Z D, Liu W M 2005 *Phys. Rev. Lett.* **94** 050402
- [5] Ji A C, Liu W M, Song J L, Zhou F 2008 *Phys. Rev. Lett.* **101** 010402
- [6] Qi R, Yu X L, Li Z B, Liu W M 2009 *Phys. Rev. Lett.* **102** 185301
- [7] Konotop V V, Salerno M 2002 *Phys. Rev. A* **65** 021602(R)
- [8] Smerzi A, Trombettoni A, Kevrekidis P G, Bishop A R 2002 *Phys. Rev. Lett.* **89** 170402
- [9] Modugno M, Tozzo C, Dalfovo F 2004 *Phys. Rev. A* **70** 043625
- [10] Wu B, Niu Q 2003 *New J. Phys.* **5** 104
- [11] Zheng Y, Kostrun M, Javanainen J 2004 *Phys. Rev. Lett.* **93** 230401
- [12] Cataliotti F S, Fallani L, Ferlaino F, Fort C, Maddaloni P, Inguscio M 2003 *New J. Phys.* **5** 71
- [13] Ruostekoski J, Anglin J R 2001 *Phys. Rev. Lett.* **86** 3934
- [14] Vogels J M, Freeland R S, Tsai C C, Verhaar B J, Heinzen D J 2000 *Phys. Rev. A* **61** 043407
- [15] Modugno G, Modugno M, Riboli F, Roati G, Inguscio M 2002 *Phys. Rev. Lett.* **89** 190404
- [16] Hall D S, Matthews M R, Ensher J R, Wieman C E, Cornell E A 1998 *Phys. Rev. Lett.* **81** 1539
- [17] Goldstein E V, Meystre P 1997 *Phys. Rev. A* **55** 2935
- [18] Ruostekoski J, Dutton Z 2007 *Phys. Rev. A* **76** 063607
- [19] Kasamatsu K, Tsubota M 2006 *Phys. Rev. A* **74** 013617
- [20] Jin G R, Kim C K, Nahm K 2005 *Phys. Rev. A* **72** 045601
- [21] Zhang W, Zhou D L, Chang M S, Chapman M S, You L 2005 *Phys. Rev. Lett.* **95** 180403
- [22] Raju T S, Panigrahi P K and Porsezian K 2005 *Phys. Rev. A* **71** 035601

Modulational instabilities of two-component Bose-Einstein condensates in the optical lattices*

Teng Fei Xie Zheng-Wei[†]

(College of Physics and Electronic Engineering, Sichuan Normal University, Chengdu 610066, China)

(Received 11 August 2012; revised manuscript received 29 August 2012)

Abstract

Based on the linear stability analysis, the modulational instabilities (MIs) of two-component Bose-Einstein condensations (BECs) in the optical lattices are studied, especially the relation of MI with the different component and modulational wavevectors, and with the inter- and intra- interaction when the condition of atom current conservation is not satisfied. The results show that when the condition of atom current is not satisfied, the new MI areas of two-component BEC in the optical lattice with the component wavevectors, modulational wavevectors and the interaction between components can arise. The above results can give us some useful information about manipulating two-component BECs in practice.

Keywords: Bose-Einstein condensates, modulational instability, optical lattices, two-components

PACS: 67.85.De, 03.75.Lm, 67.25.dk, 47.37.+q

DOI: 10.7498/aps.62.026701

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 10847006), and the Sichuan Province Education Department key Natural Science Fund (Grant No. 08ZA039).

[†] Corresponding author. E-mail: zzwxie@yahoo.com.cn