

# 基于脉冲宽度调制的滑模变结构控制的一阶 H 桥逆变器的分岔和混沌行为研究\*

郝翔 谢瑞良 杨旭<sup>†</sup> 刘韬 黄浪

(西安交通大学电气工程学院, 电力设备电气绝缘国家重点实验室, 西安 710049)

(2013年6月15日收到; 2013年7月17日收到修改稿)

滑模变结构控制是一种在宽工作范围具有快速响应和高稳定性的鲁棒控制, 因而被广泛地应用于逆变器控制中. 滑模控制的逆变器本质上是一种由非线性控制方式控制的时变非线性系统, 具有复杂的动力学行为. 本文以基于脉冲宽度调制的滑模变结构控制的一阶 H 桥逆变器为例, 首先观察不同滑模变结构控制器参数下系统的输出波形, 发现了一种多种倍数的倍周期同时存在的新型分岔现象; 其次, 使用频闪映射方法建立系统的离散迭代模型, 并利用折叠图法分析输出波形. 通过分析可知系统不能以这种新型分岔为道路通向混沌. 此外, 在工程应用中十分关心系统稳定性, 但是由于滑模变结构控制器的非线性特性, 常规解析方法都已不再适用于对系统进行分析, 而图解法又难以满足精度要求. 因此, 本文提出了一种新的适用于滑模变结构控制的逆变器的快变尺度稳定性的判断依据, 经验证该判据可以准确地判断系统是否处于稳定运行状态, 进而为滑模变结构控制器的参数设计提供可靠依据.

**关键词:** H 桥逆变器, 滑模变结构控制, 新型分岔, 稳定性判据

**PACS:** 05.45.-a, 84.30.Jc, 47.20.Ky

**DOI:** 10.7498/aps.62.200503

## 1 引言

电力电子电路由于使用了可以快速切换的开关器件, 因而具有丰富的动力学行为, 是非线性理论研究的重要对象<sup>[1]</sup>. 其中, 逆变器作为一种基本的电力电子电路, 也具有复杂的动力学行为<sup>[2]</sup>. 但以往对于逆变器的研究大多采用各种线性化的方法, 把逆变器当作线性系统来处理, 这样做虽然可以满足基本要求, 但是经常会出现各种无法预测和难以解释的不规则现象: 电磁噪声、临界运行突然崩溃以及无法按照设计要求进行工作等问题. 因此探索逆变器的非线性行为是十分有价值的, 它可以帮助我们分析和解决逆变器实际工作中各种难以解释的问题<sup>[3]</sup>.

以往对于电力电子电路中复杂现象的研究主要是针对直流斩波 (DC-DC) 电路<sup>[4-7]</sup> 和功率因数

校正 (PFC) 电路<sup>[8-10]</sup>, 很少涉及逆变器电路. 近年来, 这种情况有所改变. Robert 等<sup>[11]</sup> 研究了比例控制的 H 桥逆变器中的分岔和混沌现象, 首次将电力电子中的非线性行为的研究拓展到了逆变器电路中. 王学梅等<sup>[3]</sup> 进一步研究了正弦逆变器中的非线性行为, 指出了在正弦逆变器中存在着快变和慢变两种尺度下的不稳定行为, 并提出了慢变稳定性判据用来判断正弦逆变器中混沌的出现. 雷博等<sup>[12,13]</sup> 研究了数字控制的逆变电路中发生振荡的内在机理, 用特征轨迹的方法证明了系统中存在着 Hopf 分岔. 但是这些文献都只探讨了逆变器电路在线性控制方式下的动力学行为, 而在非线性控制方式下的逆变器电路的复杂动力学行为与其还有明显的不同, 亟待进一步研究.

滑模变结构控制作为一种动态响应速度快、鲁棒性强并且实现简单的非线性控制策略被广泛地应用于逆变器控制中<sup>[14-26]</sup>, 但是滑模控制的逆

\* 国家自然科学基金 (批准号: 51177129) 和国家高技术研究发展计划 (批准号: 2011AA05A305) 资助的课题.

<sup>†</sup> 通讯作者. E-mail: yangxu@mail.stu.xjtu.edu.cn

变器中存在着复杂的动力学行为. 在实际应用中, 随着滑模变结构控制器参数的变化, 逆变器可能会出现分岔现象, 直至进入混沌状态. 此时逆变器的工作性能恶化, 难以维持正常工作. 为此, 研究滑模变结构控制下的逆变器的动力学行为, 进而为滑模变结构控制器的参数设计提供可靠依据, 具有重要的理论意义和工程价值.

本文的研究对象是基于脉冲宽度 (PWM) 调制的滑模变结构控制的一阶 H 桥逆变器. 首先, 观察系统在不同滑模变结构控制器参数下的输出波形, 发现随着参数变化系统具有完全不同的动力学行为, 并发现了一种多种不同倍数倍周期同时存在的新型分岔现象. 其次, 使用频闪映射方法建立系统的离散迭代模型, 通过进一步观察和分析, 发现系统不会以这种新型分岔现象为道路通向混沌. 此外, 分析系统稳定性在工程应用上十分必要, 但是由于滑模变结构控制器的非线性特性, 雅可比矩阵特征值法等常规解析方法都已不再适用于对系统进行分析, 而图解法又难以满足精度要求. 因此本文随后提出了一种新的适用于滑模变结构控制的系统的快变稳定性判断依据, 经验证, 该判据可以准确地判断系统是否处于稳定运行状态, 进而为滑模变结构控制器的参数设计提供可靠依据. 最后, 本文通过电路实验验证了理论分析的正确性.

## 2 滑模变结构控制的一阶 H 桥逆变器的工作原理及输出

滑模变结构控制的一阶 H 桥逆变器如图 1 所示, 主电路由电压源  $E$ , 开关管  $S_1-S_4$  (带反并联二极管) 以及感性  $RL$  负载组成. 负载电流  $i$  与  $i_{ref}$  比较之后送至滑模变结构控制器产生控制量  $u$ , 再通过 PWM 电路来控制开关管的工作.

根据滑模变结构控制的原理, 输出的控制量  $u$  应该写为如下形式 (其中  $e = i - i_{ref}$ ):

$$u = -\text{sgn}(e). \quad (1)$$

由于滑模变结构控制在本质上的不连续特性, 直接使用这个方式来控制逆变器会产生明显的抖动现象, 会造成电磁兼容噪声等问题. 为了消弱抖动, 可以在滑模变结构控制器中加入比例环节, 引入比例环节后控制量  $u$  可以写成如下形式:

$$u = -k \cdot e - \varepsilon \cdot \text{sgn}(e), \quad k > 0, \varepsilon > 0. \quad (2)$$

下面对逆变器的工作状态进行分析, 该逆变器存在着两种工作状态. 状态 1,  $S_1$  和  $S_3$  导通,  $S_2$  和  $S_4$  关断, 负载电流呈指数上升; 状态 2,  $S_1$  和  $S_3$  关断,  $S_2$  和  $S_4$  导通, 负载电流呈指数下降.

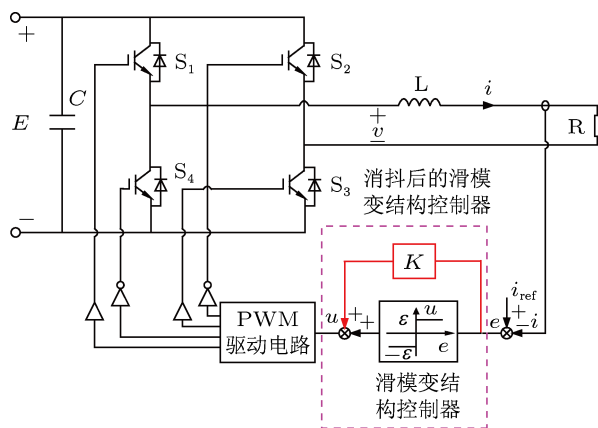


图 1 滑模变结构控制的一阶 H 桥逆变器

状态 1 的状态方程为

$$\frac{di}{dt} = -\frac{R}{L}i + \frac{E}{L}, \quad v = E, \quad (3)$$

状态 2 的状态方程为

$$\frac{di}{dt} = -\frac{R}{L}i - \frac{E}{L}, \quad v = -E, \quad (4)$$

其中  $i$  为负载电流,  $v$  为 H 桥输出电压.

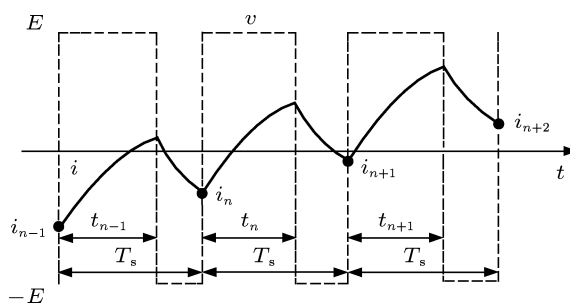


图 2 逆变器负载的电流和电压波形

在控制器的作用下, 系统会在状态 1 和状态 2 之间来回切换, 而且采用 PWM 调制的方式, 一个开关周期  $T_s$  内系统状态只会切换一次. 工作原理如图 2 所示, 第  $n$  个开关周期中状态 1 的工作时间为  $t_n$ , 状态 2 的工作时间为  $T_s - t_n$ , 因此该开关周期的占空比  $d_n$  为  $t_n/T_s$ . 在实际工作中, 参考电流  $i_{ref}$  采用正弦波, 这样系统的占空比就会按照正弦规律变

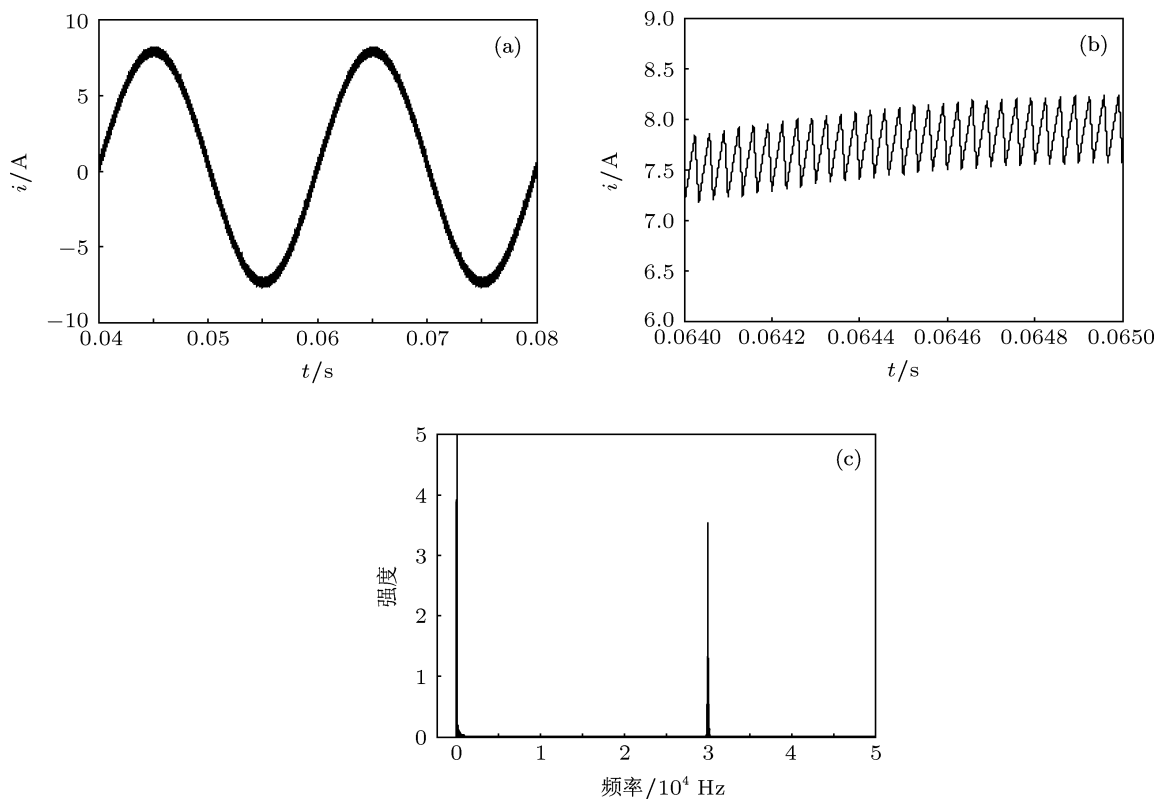


图3  $\epsilon = 0.01, k = 0.2$  时的 (a) 电流波形, (b) 电流波形局部放大图以及 (c) 频谱

化, 进而输出正弦波形. 依据逆变器的工作原理建立精确的计算机仿真, 选择逆变器的参数如下:  $E = 80 \text{ V}, L = 1.5 \text{ mH}, R = 5 \text{ }\Omega, f_s = 30 \text{ kHz}, i_{\text{ref}} = 10 \cdot \sin(100\pi) \text{ A}$ .

消抖后的滑模变结构控制器含有两个控制参数  $k$  和  $\epsilon$ . 首先固定  $\epsilon$  的取值, 观察  $k$  值从小到大变化时系统的仿真波形. 为了令  $k$  起主导作用, 令  $\epsilon$  取一个较小的值. 图 3—8 为  $\epsilon = 0.01, k$  取不同值时系统的输出波形, 输出波形的局部放大图以及频谱分析.

其中图 3 是  $k = 0.2$  时的情况, 可以看出逆变器的工作周期等于时钟周期, 频谱分析图中主要存在基波频率成分和开关频率成分, 系统处于稳定工作状态.

图 4 是  $k = 1.05$  时的情况, 此时逆变器在电流过零点附近出现倍周期现象, 而在上升段和波峰附近均处于稳定工作状态. 在频谱分析图中也可以观察到二分频成分, 此时二分频含量较少.

从图 5 可以看出当  $k = 1.07$  时, 系统在电流过零点和上升阶段都出现了倍周期现象, 而在波峰附近依然处于稳定工作状态. 在频谱分析图中, 二分频的成分有所增加.

图 6 是  $k = 1.08$  时的输出波形, 此时波峰附近也出现了倍周期现象, 频谱分析图中的二分频现象明显. 总结图 3—6, 可知系统的倍周期现象最早出现在输出电流波形的过零点附近, 随着  $k$  值的增大, 出现倍周期现象的区域不断扩大, 直至扩展到整个时域波形.

继续增大  $k$  至 1.1 可以观察到如图 7 所示的波形, 根据逆变器的工作原理可知此时占空比出现了饱和, 根据以往的研究成果可知此时系统的分岔行为转变为由边界碰撞引起的分岔 [27]. 与之前相比, 此时的频谱分析图中的二分频现象更加显著.

最后增大  $k$  至 2, 可以得到如图 8 的杂乱无章的波形, 此时系统处于混沌状态. 图 8(c) 和 (d) 分别是两个不同工频周期的频谱分析图, 可以看出此时图中的尖峰连成一片, 并且不同工频周期所对应的频谱分析图有所不同.

至此可以得出如下结论: 随着  $k$  值的不断增大, 滑模变结构控制的逆变器系统逐渐由稳定工作变为倍周期分岔, 并且出现倍周期的区域逐渐扩大直至整个时域波形, 继续增大  $k$  值, 系统逐渐由边界碰撞的道路通向混沌.

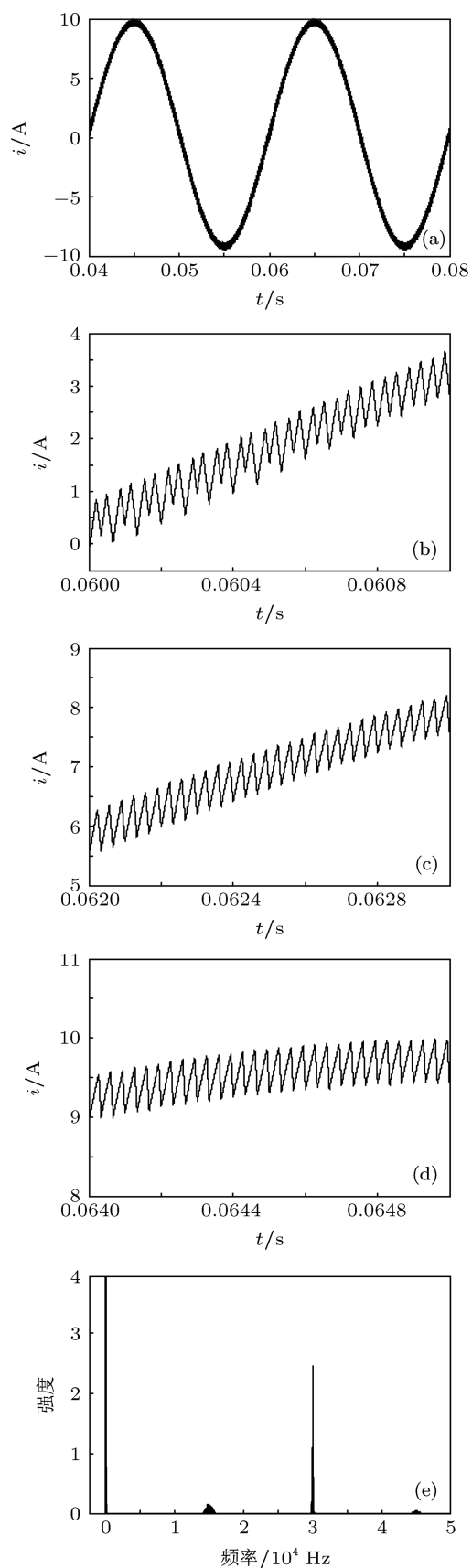


图4  $\varepsilon = 0.01, k = 1.05$  时的电流波形 (a), 电流在过零点 (b), 上升阶段 (c) 和波峰附近 (d) 的局部放大图, 以及频谱 (e)

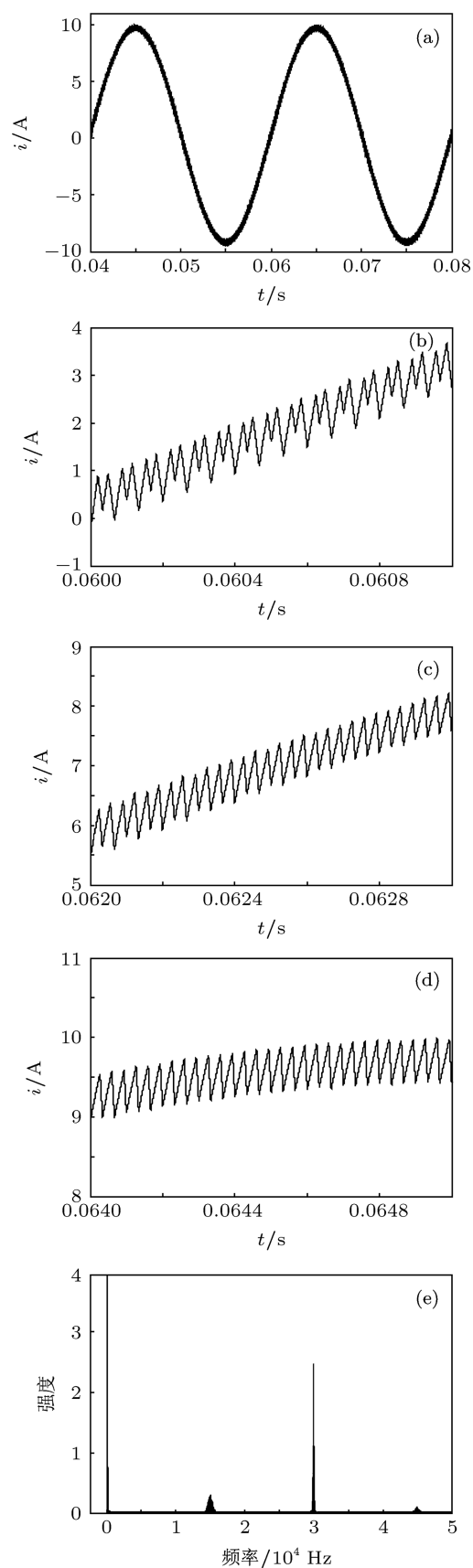


图5  $\varepsilon = 0.01, k = 1.07$  时的电流波形 (a), 电流在过零点 (b), 上升阶段 (c) 和波峰附近 (d) 的局部放大图, 以及频谱 (e)

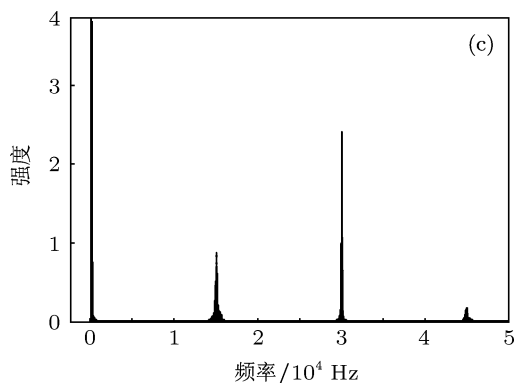
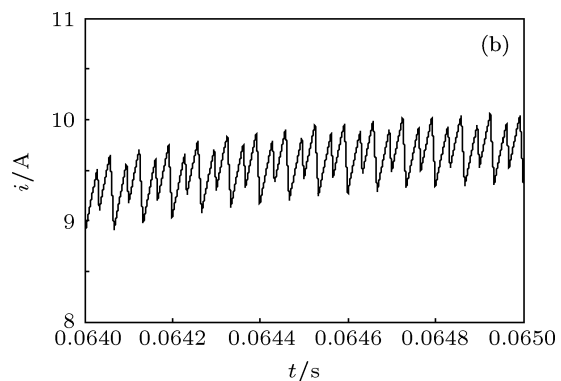
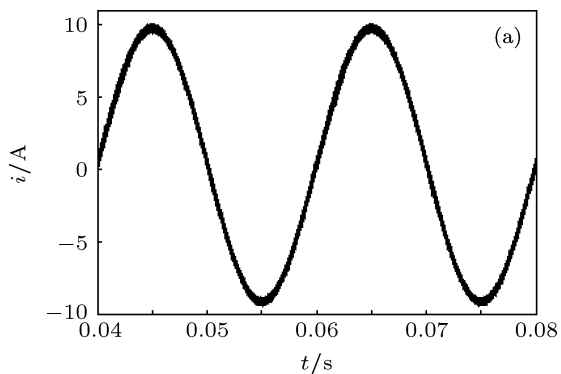


图6  $\epsilon = 0.01, k = 1.08$  时的电流波形 (a), 电流波形局部放大图 (b) 以及频谱 (c)

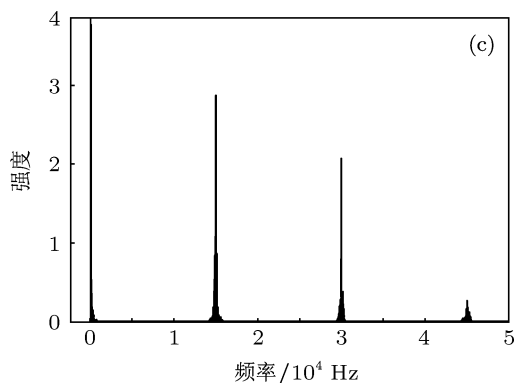
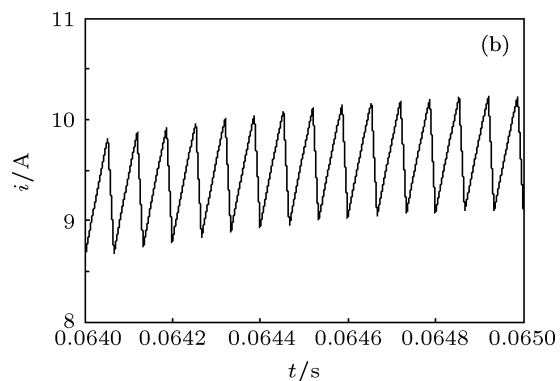
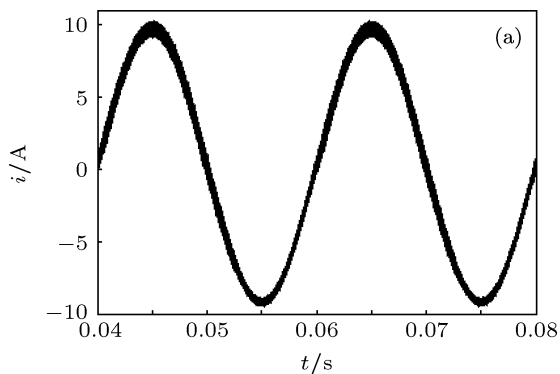


图7  $\epsilon = 0.01, k = 1.1$  时的电流波形 (a), 电流波形局部放大图 (b) 以及频谱 (c)

其次, 固定  $k$  值, 通过改变  $\epsilon$  的取值来观察系统输出波形的变化. 为了避免  $k$  值较大对结果造成干扰, 这里取  $k = 0.1$ . 图 9—12 为  $\epsilon$  取不同值时系统的输出波形及其局部放大图.

图 9 是  $\epsilon = 0.01$  时的时域波形, 可以看出此时逆变器的工作周期为时钟周期, 频谱分析图中主要存在基波频率成分和开关频率成分, 系统处于稳定工作状态.

图 10 为  $\epsilon = 0.15$  时的波形, 可以看出系统在电流波形过零点附近工作周期变为时钟周期的二倍、三倍和四倍, 此时出现了多种倍数的倍周期同时存在的现象, 频谱分析图中同时出现了明显的二

分频、三分频和四分频成分, 各个尖峰之间存在一定的相连, 主要是由于多种倍数的倍周期交替出现使电流波形发生畸变, 并且这些倍周期现象的波形呈锯齿状. 因此, 傅里叶分解之后会在各个倍周期频率附近产生相应的谐波分量, 这些分量相互叠加将会形成尖峰之间的相连部分.

从图 11 可知, 当  $\epsilon = 0.4$  时输出波形产生了一定程度的振荡, 在波峰和波谷之间, 系统的工作周期在时钟周期的七倍、五倍、四倍、三倍和二倍之间变化, 此时系统不仅出现了多种倍数的倍周期同时存在的现象, 而且多倍周期的种类变得更多, 频谱图中也出现了明显的五分频成分和七分频成分.

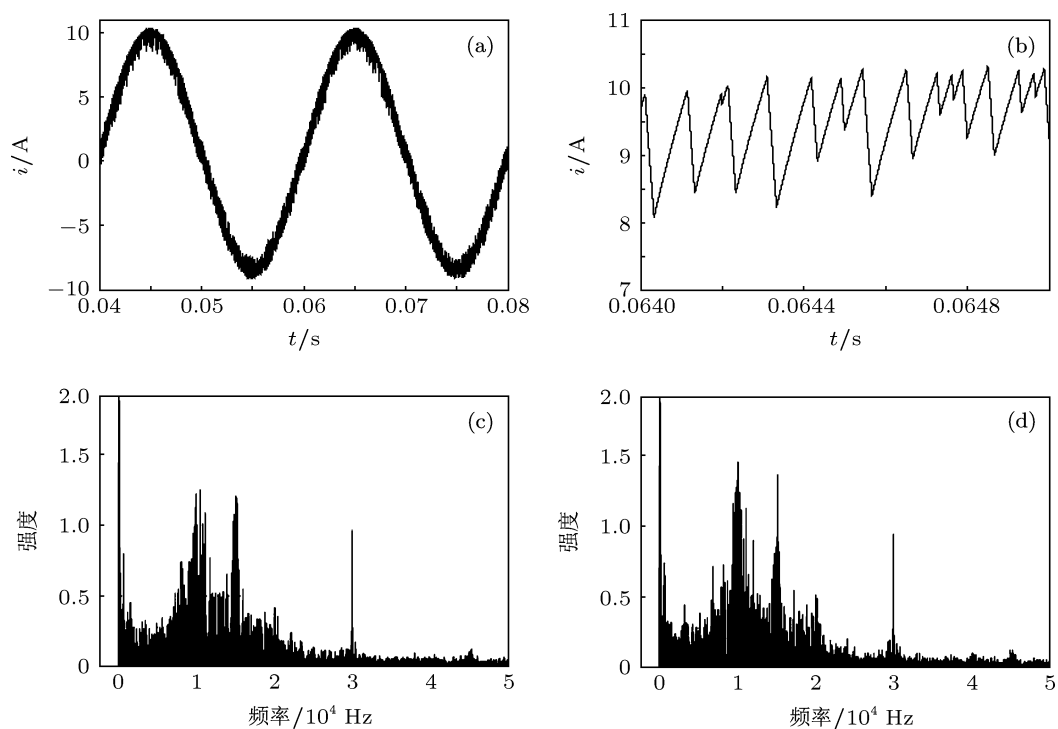


图8  $\varepsilon = 0.01, k = 2$  时的电流波形 (a), 电流波形局部放大图 (b) 以及频谱 (c), (d)

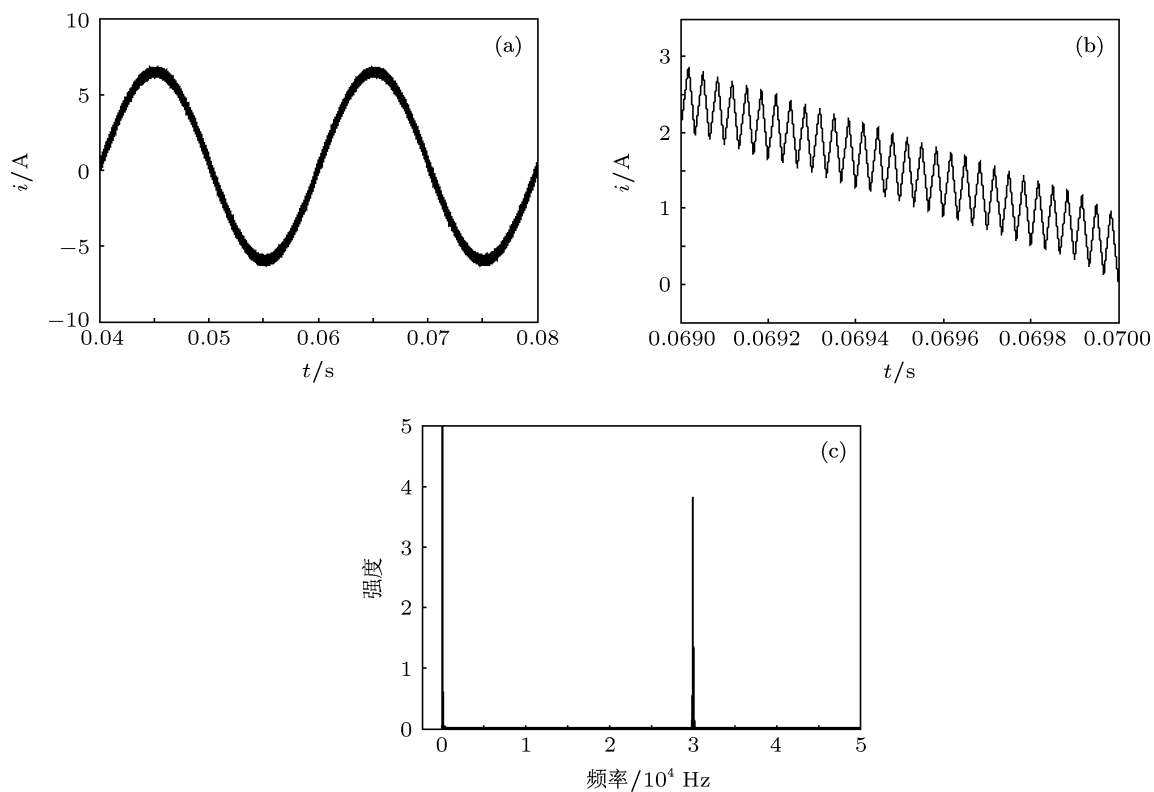


图9  $k = 0.1, \varepsilon = 0.01$  时的电流波形 (a), 电流波形局部放大图 (b) 以及频谱 (c)

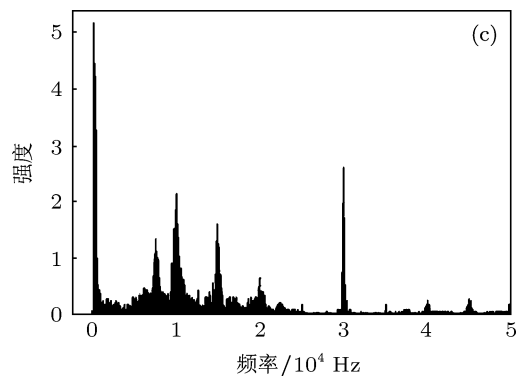
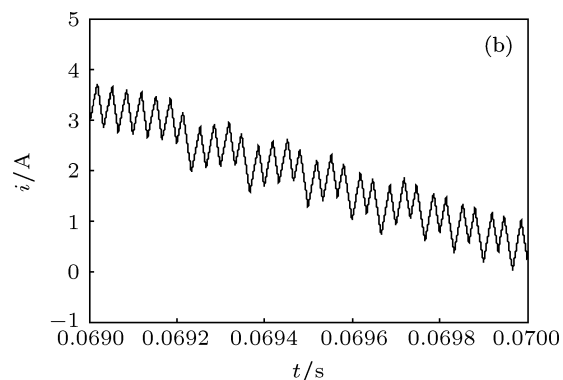
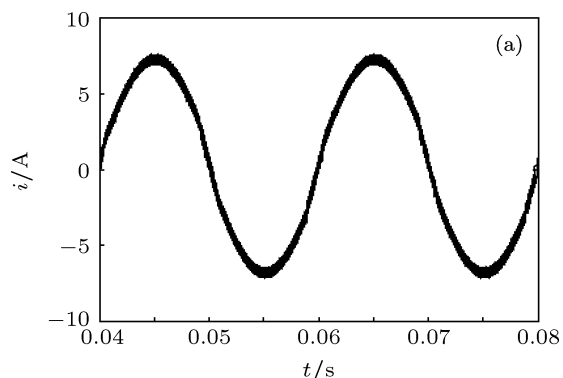


图 10  $k=0.1, \varepsilon=0.15$  时的电流波形 (a), 电流波形局部放大图 (b) 以及频谱 (c)

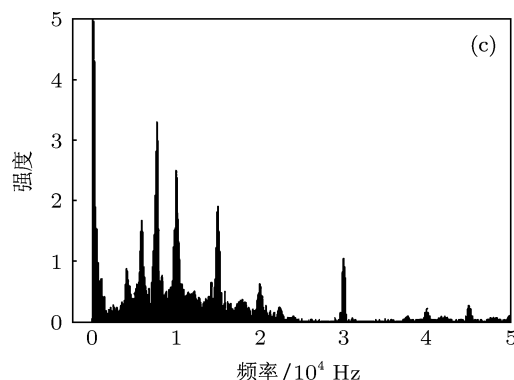
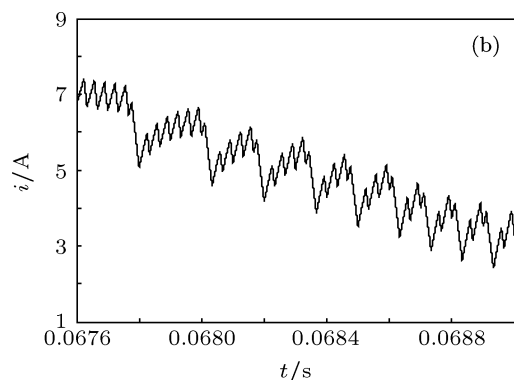
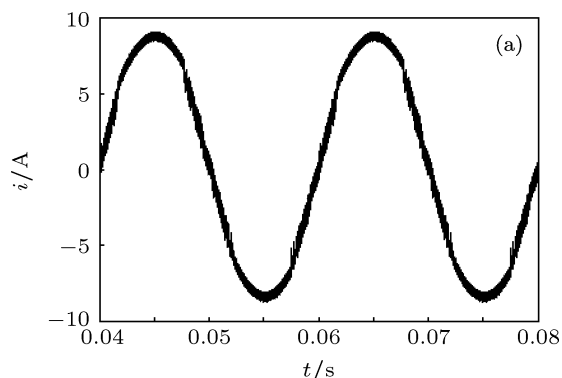


图 11  $k=0.1, \varepsilon=0.4$  时的电流波形 (a), 电流波形局部放大图 (b) 以及频谱 (c)

图 12 表示的是  $\varepsilon=1$  时的输出波形, 整个时域波形都存在多种倍数倍周期同时存在的现象, 并且出现的多倍周期的倍数更多. 此时, 频谱图中的开关频率成分显著降低, 同时出现了多种高倍分频. 图 12(c) 和 (d) 分别为不同的工频周期所对应的频谱分析图, 可以看出两者完全相同, 与由参数  $k$  变大引起的混沌现象有本质的不同.

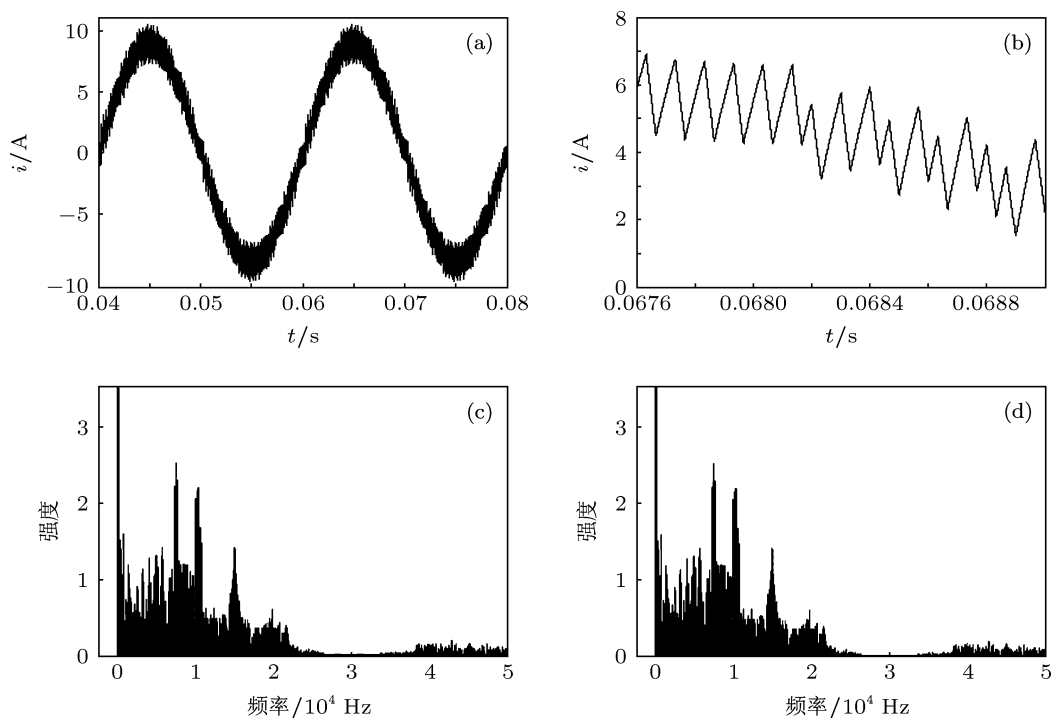
至此, 可以得出如下结论: 滑模变结构控制的逆变器系统中存在一种多种倍数的倍周期同时存在的新型分岔现象, 并且随着  $\varepsilon$  的增大, 不仅新型分岔中的倍周期倍数不断增大而且出现倍周期的

范围也不断扩大.

### 3 基于系统快变尺度离散模型的分岔和混沌现象分析

#### 3.1 系统的快变尺度离散模型

为了分析系统输出波形中的不稳定现象, 首先应准确建立系统的模型. 所谓快变尺度离散模型指的是以开关频率的尺度来建立的离散模型<sup>[3,9]</sup>. 具体的建模方法采用 DC-DC 变换器和 Boost-PFC 变


 图 12  $k = 0.1, \varepsilon = 1$  时的电流波形 (a), 电流波形局部放大图 (b) 以及频谱 (c), (d)

换器的研究中经常使用的频闪映射法<sup>[8,9]</sup>, 其主要思想是以开关周期  $T_s$  作为频闪采样间隔, 将第  $n+1$  时刻的采样值用第  $n$  时刻的采样值来表示, 从而得到系统的状态变量的迭代关系. 对本文研究的逆变器系统, 在第  $n$  个开关周期中从  $nT_s$  到  $nT_s + d_n \cdot T_s$  区间内系统工作于状态 1, 从  $nT_s + d_n \cdot T_s$  到  $(n+1)T_s$  区间内系统工作于状态 2. 将相应的系统状态方程 (3) 和 (4) 对其在一个开关周期内相应的工作时间段进行积分, 可以推出滑模变结构控制的一阶 H 桥逆变器的快变尺度离散模型如下:

$$i(n+1) = \beta \left[ e^{\alpha T_s} - 2e^{\alpha(1-d_n)T_s} + 1 \right] + i(n) \cdot e^{\alpha T_s}, \quad (5)$$

式中  $\alpha = -R/L$ ,  $\beta = -E/R$ ,  $d_n$  为第  $n$  个开关周期的占空比. 对滑模变结构控制器, 占空比可以按照下式确定:

$$d_n = \frac{-k\sigma - \varepsilon \cdot \text{sgn}(\sigma) + 1}{2}, \quad (6)$$

其中  $\sigma$  是第  $n$  个开关周期起始时刻的电流采样值和该时刻的电流给定值之间的误差, 可以写成如下形式:

$$\sigma = i(n) - i_{\text{ref}}(n), \quad (7)$$

$$i_{\text{ref}}(n) = A \sin(2\pi f \cdot nT_s). \quad (8)$$

在此离散模型的基础上, 我们可以对系统的分岔和混沌行为进行分析.

### 3.2 系统的分岔和混沌现象分析

如图 3—12 所示, 随着滑模变结构控制器的参数的变化, 系统的输出波形中出现了分岔甚至混沌的现象. 参考以往对 DC-DC 电路, Boost-PFC 电路以及其他控制方式下的逆变器电路的非线性行为的研究, 可以发现几乎所有的研究都使用了雅可比矩阵特征值法和李雅普诺夫指数法等解析法, 或者折叠图法和分岔图法等图解法. 由于两种解析法都需要对系统的迭代方程进行求导, 而滑模变结构控制器中存在着不可导的非线性成分, 因此这两种解析方法在这种非线性系统中都不适用. 本文将使用折叠图和分岔图法来进行研究.

折叠图法指的是选取一个系统的初值代入 (5) 式进行迭代, 并将迭代稳定后的若干个工频周期的输出波形按照采样时刻对齐后折叠到一起. 下面使用折叠图法对不同参数下系统的输出波形进行分析: 当  $\varepsilon = 0.01$ ,  $k$  分别取 0.2, 1.1 和 2 时, 分别给出系统的折叠图如图 13(a)—(c) 所示.

可以看到当  $k = 0.2$  时, 折叠图呈现一条完整的正弦曲线, 说明此时系统稳定工作;  $k = 1.1$  时, 折



叠图中的采样点虽然完全重合,但总体呈现出两条正弦曲线,说明系统出现了倍周期分岔;而  $k = 2$  时,折叠图大部分区域都形成了采样点的密集填充,说明此时系统出现了混沌现象.

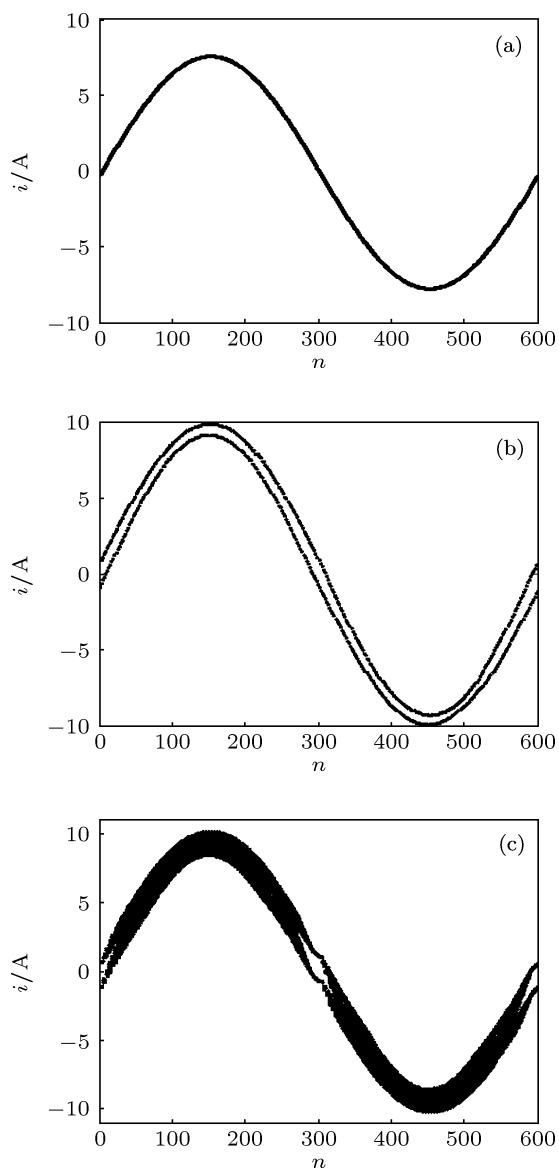


图 13 固定  $\varepsilon = 0.01$  改变  $k$  值得到的折叠图 (a)—(c) 分别为  $k = 0.2, 1.1$  和  $2$  所对应的折叠图

当  $k = 0.1, \varepsilon$  分别取  $0.01, 0.4$  和  $1$  时,分别给出系统的折叠图如图 14 所示. 可以看到当  $\varepsilon = 0.01$  时,折叠图中的采样点完全重合,并且呈现一条完整的正弦曲线,说明此时系统稳定工作;当  $\varepsilon = 0.4$  时,折叠图中的采样点虽然完全重合,但从波峰到波谷的过程中却出现了七倍、五倍、四倍等多种倍数的倍周期同时存在的现象,这时系统中没有混沌产生而是出现了本文所发现的新型分岔行为;当  $\varepsilon = 1$  时,折叠图中的采样点依然完全重合,并且在

整个时域波形内同时存在着九倍、七倍、四倍等多种倍数的倍周期,这时系统出现本文所发现的新型分岔现象,而没有混沌出现. 由于  $\varepsilon = 1$  时系统的占空比已经达到饱和,因此当  $\varepsilon$  取值更大时,系统的电流波形和折叠图都将保持不变,因此本文所发现的新型分岔不是一条能通向混沌的道路.

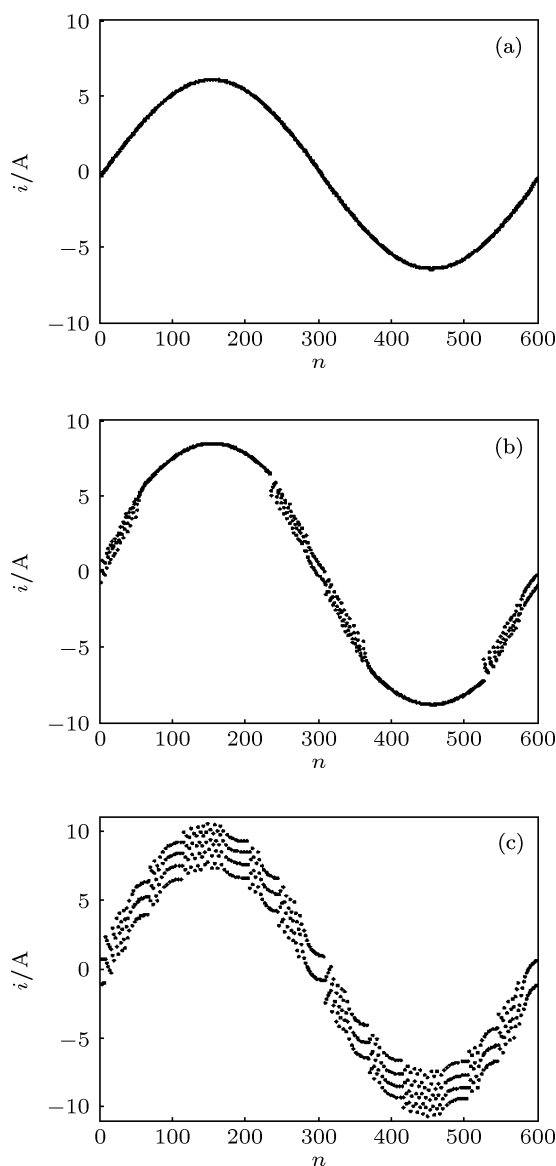


图 14 固定  $k = 0.1$  改变  $\varepsilon$  值得到的折叠图 (a)—(c) 分别为  $\varepsilon = 0.01, 0.4$  和  $1$  所对应的折叠图

图解法中的分岔图法指的是将输出波形中稳定后的连续若干个正弦周期的某一个固定位置(如正弦波  $180^\circ$ )进行采样,并把不同参数对应的采样值全部描绘在同一幅图上<sup>[3]</sup>. 下面使用分岔图法对不同参数下系统的输出波形进行分析(选取正弦波  $180^\circ$  为固定采样位置):图 15(a) 为固定  $\varepsilon = 0.01$  改变  $k$  时的分岔图,可以看出当  $k$  较小时采样结果重

合成一条曲线, 此时系统稳定工作; 随着  $k$  值增大, 分岔图呈现两条曲线, 此时系统出现了倍周期分岔现象; 继续增大  $k$  值, 采样点在一定区域内密集填充并且具有自相似的层次结构, 这时系统中出现了混沌现象<sup>[28]</sup>. 图 15(b) 为固定  $k = 0.1$  改变  $\varepsilon$  所得到的分岔图, 可以看出当  $\varepsilon$  较小时采样结果重合成一条曲线, 这时系统稳定工作; 随着  $\varepsilon$  的增大, 分岔图呈现出多条曲线, 说明在所选取的采样位置附近发生了多倍周期的分岔现象; 继续增大  $\varepsilon$ , 分岔图中依然没有出现一定区域内密集填充的现象, 因此可以证明改变  $\varepsilon$  系统不会发生混沌.

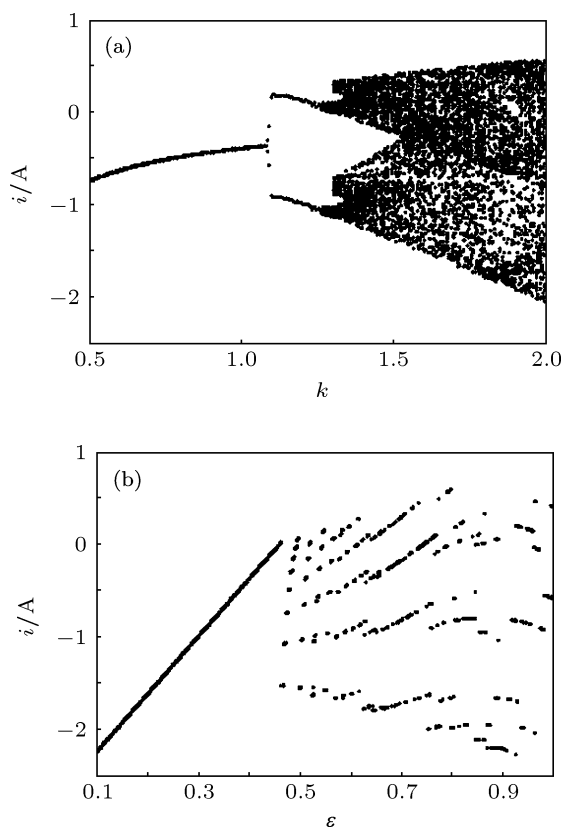


图 15 系统的分岔图 (a) 固定  $\varepsilon = 0.01$  改变  $k$  得到的分岔图; (b) 固定  $k = 0.1$  改变  $\varepsilon$  得到的分岔图

在以上研究基础上, 我们可以总结如下: 当固定  $k$  增大  $\varepsilon$  时, 系统输出波形中出现一种多种倍数的倍周期同时存在的新型分岔, 并且不论  $\varepsilon$  如何变化系统都不会出现混沌, 因此这种新型分岔不是一个能够通向混沌的道路. 系统只能通过参数  $k$  的变化, 最终经由边界碰撞的道路进入混沌.

#### 4 系统的快变稳定性判据

参考其他类型电路的动力学行为的研究, 可以

知道对系统的稳定性分析能够提供可靠的参数设计依据. 对于本文所研究的系统来说, 当系统出现了倍周期分岔现象时, 可认为此时系统处于快变不稳定状态, 通过快变不稳定临界参数值就可以得出系统的稳定工作范围, 进而可以为控制器参数设计提供依据.

折叠图法和分岔图法是分析系统分岔和混沌行为的有效途径, 也是判定系统是否产生混沌现象的重要依据. 但在判断系统是否稳定工作时, 折叠图法和分岔图法仍然存在着一些问题. 对折叠图法来说: 首先, 一幅折叠图只针对系统的一组特定参数, 需要多次反复绘图才能够确定系统的临界稳定参数, 工作量繁重, 工程应用困难; 其次, 当系统从稳定工作状态进入倍周期分岔时, 只有小部分区域会首先出现两条相距非常近的正弦曲线, 现象十分不明显, 因此使用折叠图法来判断系统何时出现分岔现象容易引入人为误差, 判定不够准确. 对分岔图法来说, 相比直流阶跃系统, 交流跟踪系统存在正弦稳态误差, 导致难以预测哪一个采样位置会最先出现分岔现象, 因此分岔图法也是一种不够精确的方法.

综上所述, 现有的各种方法都已不适用于或不能准确地分析滑模变结构控制逆变器系统的稳定性. 因此, 为了工程应用的需要, 我们有必要探索一种新的能够准确判断滑模变结构控制系统是否快变稳定的判断依据.

图 16 所示为系统发生倍周期分岔时输出电流波形的上升段中连续四个开关周期的状态以及相应的 PWM 信号. 由 PWM 调制的原理可知, 当逆变器系统处于稳定工作状态时, 各个开关周期的占空比将严格按照正弦曲线的单调性进行变化. 而当系统出现倍周期分岔时, 如图 16 中所示, 相应开关周期的占空比将不再按照正弦曲线的单调性进行变化. 由该系统的仿真结果可知, 系统的倍周期分岔最早出现于电流过零点附近, 因此我们可以通过对电流波形过零点附近的若干个开关周期的占空比的单调性进行检测, 来判断该系统是否发生了倍周期现象. 如果系统的占空比在电流过零点附近若干个开关周期内一直保持单调变化, 这时系统就处于稳定工作状态; 反之, 则系统发生了倍周期分岔, 系统处于快变不稳定状态.

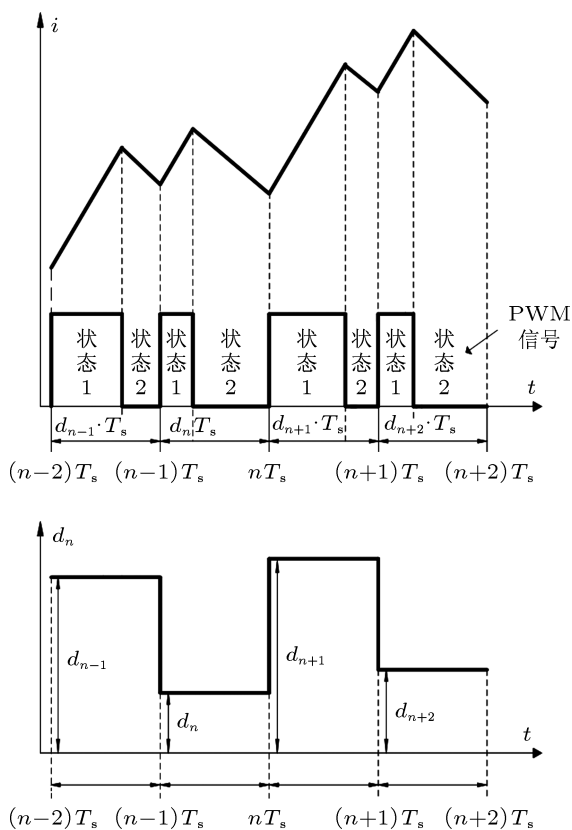


图 16 系统发生倍周期分岔时的输出电流波形和对应的 PWM 信号

**快变稳定性定理** 取电流波形下降段过零点附近的  $M$  个开关周期, 分别用每一个开关周期的占空比和下一个开关周期的占空比作差再除以两者差的绝对值, 把计算出的  $M$  个数相加即得到  $P$ .  $P$  可用公式表示如下 (其中  $\sigma(n) = i(n) - i_{\text{ref}}(n)$ ):

$$P = \sum_{n=N_0}^{N_0+M} \frac{k \cdot (\sigma_{n+1} - \sigma_n) + \varepsilon \cdot (\text{sgn}(\sigma_{n+1}) - \text{sgn}(\sigma_n))}{|k \cdot (\sigma_{n+1} - \sigma_n) + \varepsilon \cdot (\text{sgn}(\sigma_{n+1}) - \text{sgn}(\sigma_n))|} \quad (9)$$

当  $P = M$  时, 系统处于稳定工作状态; 当  $P < M$  时, 系统出现了倍周期分岔现象, 这时的系统处于快变不稳定状态.

**证明** 设第  $n$  个开关周期的占空比为  $d(x_n, \mu_n)$ , 第  $n+1$  个开关周期的占空比为  $d(x_{n+1}, \mu_{n+1})$ , 根据  $P$  的定义可以将  $P$  写成如下形式:

$$P = \sum_{n=N_0}^{N_0+M} \frac{d(x_n, \mu_n) - d(x_{n+1}, \mu_{n+1})}{|d(x_n, \mu_n) - d(x_{n+1}, \mu_{n+1})|} \quad (10)$$

由 (6) 和 (10) 式可以将  $P$  进行如下整理并最终得到:

$$P = \sum_{n=N_0}^{N_0+M} \frac{(-k \cdot \sigma_n - \varepsilon \cdot \text{sgn}(\sigma_n) + 1)/2 - (-k \cdot \sigma_{n+1} - \varepsilon \cdot \text{sgn}(\sigma_{n+1}) + 1)/2}{|(-k \cdot \sigma_n - \varepsilon \cdot \text{sgn}(\sigma_n) + 1)/2 - (-k \cdot \sigma_{n+1} - \varepsilon \cdot \text{sgn}(\sigma_{n+1}) + 1)/2|} = \sum_{n=N_0}^{N_0+M} \frac{k \cdot (\sigma_{n+1} - \sigma_n) + \varepsilon \cdot (\text{sgn}(\sigma_{n+1}) - \text{sgn}(\sigma_n))}{|k \cdot (\sigma_{n+1} - \sigma_n) + \varepsilon \cdot (\text{sgn}(\sigma_{n+1}) - \text{sgn}(\sigma_n))|} \quad (11)$$

设快变稳定性定理中所选取的  $M$  个开关周期中有  $Y$  个开关周期的占空比大于它前一个开关周期的占空比. 根据 (9) 式可以计算出此时的  $P$  为

$$P = M - 2Y. \quad (12)$$

当  $P = M$  时, 由 (11) 式可以推出此时有  $Y = 0$  成立, 由  $Y$  的定义可知系统的占空比在电流过零点附近单调变化, 因此系统处于稳定工作状态, 反之亦然.

当  $P < M$  时, 由 (11) 式可以推出此时有  $Y > 0$  成立, 由  $Y$  的定义可知系统的占空比在电流过零点附近不单调变化, 因此系统中产生了倍周期分岔现象, 处于快变不稳定状态, 反之亦然.

为了验证快变稳定性判据的准确性, 下面选取两组不同的参数, 分别观察系统的工作状态是否与快变稳定性判据的判断结果一致. 首先选取参数

$k = 0.1, \varepsilon = 0.01$ , 由快变稳定性判据得到  $P = M$ , 系统处于稳定工作状态. 观察如图 17(a) 所示的占空比波形, 可以看出此时占空比在过零点附近单调变化, 系统确实处于稳定工作状态. 其次, 取参数  $k = 0.4, \varepsilon = 0.02$ , 通过快变稳定性判据可得  $P < M$ , 系统出现了倍周期分岔, 处于快变不稳定状态. 观察图 17(b) 所示的系统占空比, 可知此时占空比在电流过零点附近不单调变化, 系统出现了快变不稳定现象. 经验证本文所提出的快变稳定性判据可以准确判断系统是否稳定工作.

取  $M = 100$ , 使用快变稳定性判据对系统的稳定性进行分析, 可以得出如图 18 所示的结果. 图 18(a) 为固定  $\varepsilon = 0.01$  时,  $P$  关于  $k$  的曲线, 可以看出只有当  $k \leq 0.133$  时系统才能稳定工作, 否则系统将出现倍周期分岔, 处于快变不稳定状态; 图 18(b)

为固定  $k = 0.1$  时,  $P$  关于  $\varepsilon$  的曲线, 从图中可知  $\varepsilon = 0.012$  为系统的快变稳定临界值; 图 18(c) 为  $P$  关于  $k$  和  $\varepsilon$  变化的三维图像, 为了更清晰地表示系统稳定工作的参数范围, 我们只给出  $P = 100$  的区

域. 至此, 我们可以根据快变稳定性判据所得的稳定工作区域来对系统中的滑模变结构控制器的参数进行设计, 为滑模变结构控制逆变器的实际应用提供可靠的指导.

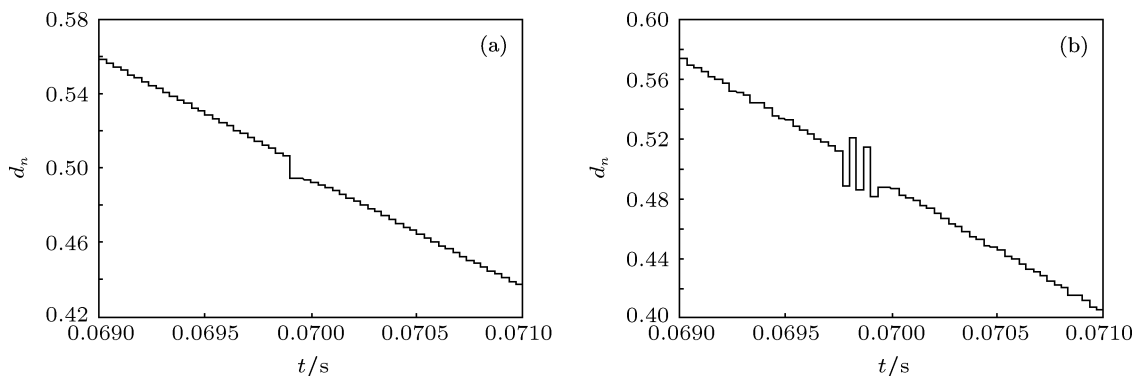


图 17 系统占空比在电流过零点附近的波形 (a)  $k = 0.1, \varepsilon = 0.01$  时的波形; (b)  $k = 0.4, \varepsilon = 0.02$  时的波形

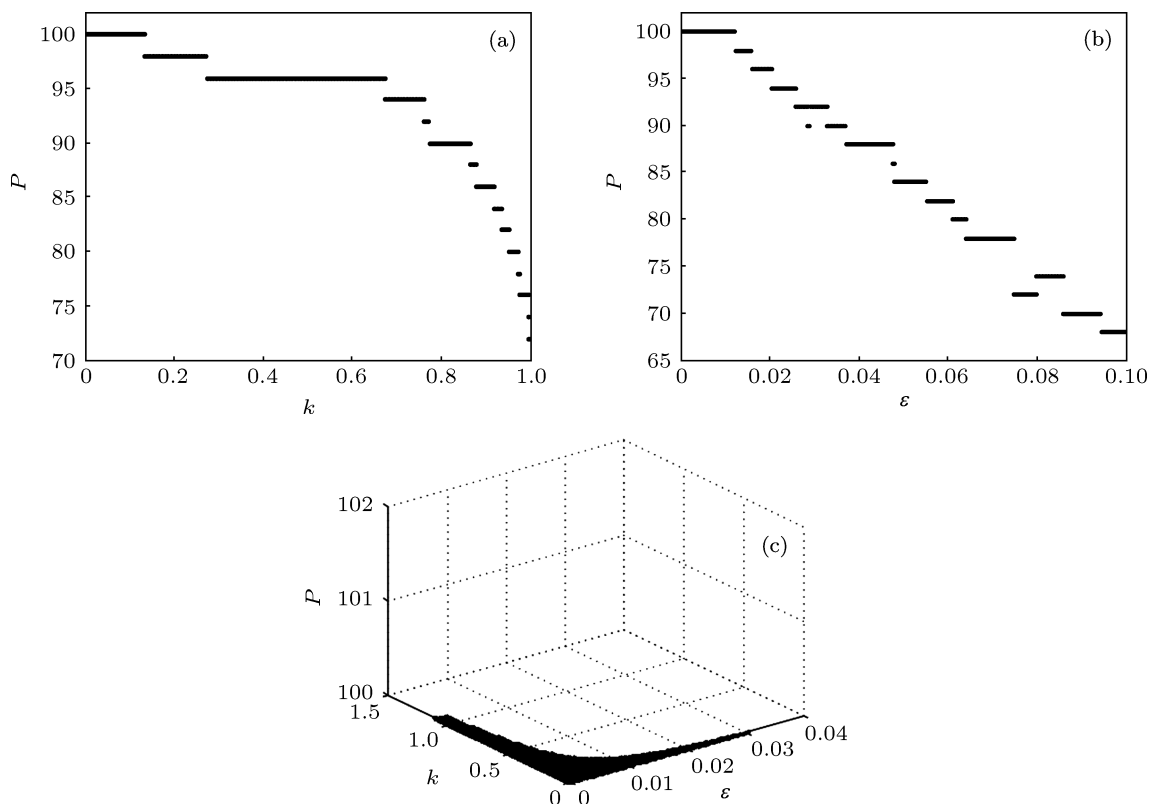


图 18 快变稳定性判据的判断结果 (a)  $\varepsilon = 0.01$  时  $P$  关于  $k$  的图像; (b)  $k = 0.1$  时  $P$  关于  $\varepsilon$  的图像; (c)  $P$  关于  $k$  和  $\varepsilon$  的三维图像中  $P = 100$  的部分

### 5 实验验证

选取  $E = 80 \text{ V}$ ,  $L = 1.5 \text{ mH}$ ,  $R = 5 \text{ } \Omega$ ,  $f_s = 30 \text{ kHz}$ ,  $i_{\text{ref}} = 10 \cdot \sin(100\pi) \text{ A}$ , 分别得到不同滑模变结构控制参数下系统的输出波形: 图 19(a) 为  $\varepsilon = 0.01, k = 0.1$  时的实验波形, 这时系统稳定工作; 图 19(b) 为  $\varepsilon = 0.01, k = 2$  时的实验波形, 此时

波形杂乱无章, 出现了混沌现象; 图 19(c) 和 (d) 为  $\varepsilon = 0.4, k = 0.1$  时的实验波形及其局部放大图, 可以发现此时系统出现了多种倍数的倍周期同时存在的新型分岔现象; 图 19(e) 为  $\varepsilon = 1, k = 0.1$  时的实验波形, 可以看出当  $\varepsilon$  取值很大时, 系统没有混沌出现.

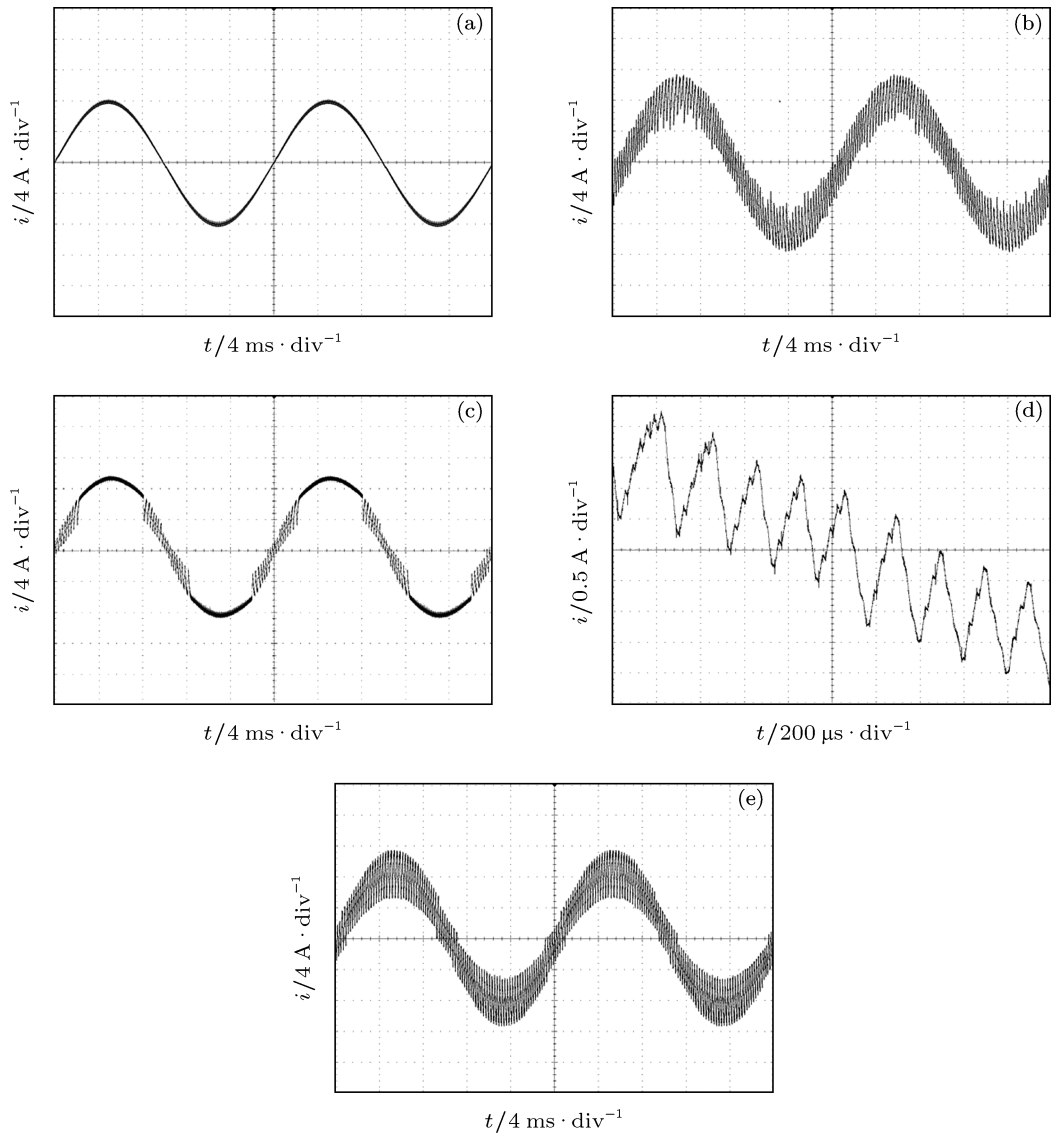


图 19 系统的实验波形 (a)  $\varepsilon = 0.01, k = 0.1$  时的实验波形; (b)  $\varepsilon = 0.01, k = 2$  时的实验波形, 图 (c) 和 (d) 为  $\varepsilon = 0.4, k = 0.1$  时的实验波形及其局部放大图; (e)  $\varepsilon = 1, k = 0.1$  时的实验波形

## 6 结论

滑模变结构控制的逆变器是一种由非线性控制方式控制的时变非线性系统, 其中存在着复杂的动力学行为, 但对这类系统的探索至今仍然非常有限. 本文研究了基于 PWM 调制的滑模变结构控制下的一阶 H 桥逆变器的非线性动力学行为, 发现该系统的混沌行为完全是由参数  $k$  引起的边界碰撞

所导致的, 并且通过改变  $\varepsilon$  的取值发现了一种多种倍数的倍周期现象共同存在的新型分岔, 该新型分岔的一个重要特性是系统不能以该分岔为道路通向混沌. 为了更好地为工程应用提供设计依据, 本文从稳定性分析的角度进行研究, 提出了一种能够准确判断系统是否出现倍周期分岔的快变稳定性判据. 通过该判据所求得系统稳定工作区域可以用来对滑模变结构控制器的参数进行设计, 填补了这方面的空白.

- [1] Ma X K, Li M, Dai D, Zhang H, Zou J L 2006 *Trans. CES* **21** 1 (in Chinese) [马西奎, 李明, 戴栋, 张浩, 邹建龙 2006 电工技术学报 **21** 1]
- [2] Iu H H C, Zhou Y, Tse C K 2003 *Int. J. Circ. Theor. Appl.* **31** 611
- [3] Wang X M, Zhang B, Qiu D Y 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 2248 (in Chinese) [王学梅, 张波, 丘东元 2009 物理学报 **58** 2248]
- [4] Zhang B, Qu Y 2003 *Proc. CSEE* **23** 99 (in Chinese) [张波, 曲颖 2003 电工技术学报 **23** 99]
- [5] Luo X S, Wang B H, Chen G R, Quan H J, Fang J Q, Zou Y L, Jiang P Q 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 12 (in Chinese) [罗晓曙, 汪秉宏, 陈关荣, 全宏俊, 方锦清, 邹艳丽, 蒋品群 2003 物理学报 **52** 12]
- [6] Aroudi A, Debbat M, Giral R, Oliver G, Benadero L, Toribio E 2005 *Int. J. Bifurcation and Chaos* **15** 1549
- [7] Yang R, Zhang B 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 3789 (in Chinese) [杨汝, 张波 2007 物理学报 **56** 3789]
- [8] Liu W Z, Zhang H, Ma X K 2005 *Proc. CSEE* **25** 43 (in Chinese) [刘伟增, 张浩, 马西奎 2005 电机工程学报 **25** 43]
- [9] Ma X K, Liu W Z, Zhang H 2005 *Proc. CSEE* **25** 61 (in Chinese) [马西奎, 刘伟增, 张浩 2005 电机工程学报 **25** 61]
- [10] Dai D, Zhang B, Li S N, Ma X K 2008 *Trans. CES* **23** 65 (in Chinese) [戴栋, 张波, 李胜男, 马西奎 2008 电工技术学报 **23** 65]
- [11] Robert B, Feki M, Iu H H C 2006 *Int. J. Bifurcation and Chaos* **16** 113
- [12] Lei B, Xiao G C, Wu X L, Qi Y R 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 122 (in Chinese) [雷博, 肖国春, 吴旋律, 齐元瑞 2011 物理学报 **60** 122]
- [13] Lei B, Xiao G C, Wu X L 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 153 (in Chinese) [雷博, 肖国春, 吴旋律 2012 物理学报 **61** 153]
- [14] Liu T, Hao X, Yang X, Liu J, Zhang B, Huang L 2012 *Proc. IEEE IPEMC Harbin, China, June, 2012*, **1** p626
- [15] Liu T, Hao X, Yang X, Zhao M, Huang Q, Huang L 2012 *Proc. IEEE IPEMC Harbin, China, June, 2012*, **1** p335
- [16] Liu T, Hao X, Yang X, Zhao M, Xiong L 2012 *Proc. IEEE ISIE Hangzhou, China, May, 2012*, p86
- [17] Hao X, Liu T, Yang X, Huang L 2012 *Proc. IEEE IPEMC Harbin, China, June, 2012*, **2** p831
- [18] Hao X, Yang X, Liu T, Huang L, Chen W 2013 *IEEE Trans. Power Electron.* **28** 793
- [19] Hu J, Shang L, He Y, Zhu Z Q 2011 *IEEE Trans. Power Electron.* **26** 210
- [20] Wai R J, Wang W H 2008 *IEEE Trans. Circuits Syst.* **55** 240
- [21] Kukrer O, Komurcugil H, Doganalp.A 2009 *IEEE Trans. Ind. Electron.* **56** 3477
- [22] Abrishamifar A, Ahmad A A, Mohamadian M 2012 *IEEE Trans. Power Electron.* **27** 2507
- [23] Chen Y, Kang Y 2011 *IEEE Trans. Power Electron.* **26** 2727
- [24] Yu D C, Wu A G, Yang C P 2005 *Chin. Phys.* **14** 914
- [25] Chen D Y, Liu Y X, Ma X Y, Zhang R F 2011 *Chin. Phys. B* **20** 120506
- [26] Mohammad P A, Hassan F 2012 *Chin. Phys. B* **21** 060506
- [27] Wang X M, Zhang B 2009 *Proc. CSEE* **29** 22 (in Chinese) [王学梅, 张波 2009 电机工程学报 **29** 22]
- [28] Wang X M, Zhang B 2009 *Trans. CES* **24** 101 (in Chinese) [王学梅, 张波 2009 电工技术学报 **24** 101]

# Bifurcation and chaos in sliding mode controlled first-order h-bridge inverter based on pulse width modulation\*

Hao Xiang Xie Rui-Liang Yang Xu<sup>†</sup> Liu Tao Huang Lang

(State Key Laboratory of Electrical Insulation and Power Equipment, School of Electrical Engineering, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China)

(Received 15 June 2013; revised manuscript received 17 July 2013)

## Abstract

Sliding mode control (SMC) is recognized as a robust controller with fast dynamic response and high stability in a wide range of operating conditions, and therefore it is widely used in the control of inverter. The sliding mode controlled inverter is in nature a nonlinear controlled time-varying nonlinear system, and it has complicated nonlinear behaviors in practice. In this paper the sliding mode controlled first-order H-bridge inverter based on pulse width modulation is taken for example. First, through observation of the waveforms under different SMC parameters, a new type of bifurcation is discovered for the first time, in which diverse multi-period bifurcations exist at the same time. Second, the discrete time iterative model is established for the system and the folded diagram is employed to observe the waveforms. These analyses of current waveforms prove that the new type of bifurcation proposed in this paper is not a route to chaos. Moreover, the stability of the system is much concerned in engineering applications. However, because of the nonlinear characteristics of sliding mode controller, the method using eigenvalues of Jacobian matrix and other analytical methods are unsuitable for the system, and the graphic methods are not accurate enough. Finally, a criterion of fast-scale stability which can accurately distinguish the stability of the system is proposed, and it can be used to provide reliable reference for the parameter design of sliding mode controller.

**Keywords:** H-bridge inverter, sliding mode control, new bifurcation, stability criterion

**PACS:** 05.45.-a, 84.30.Jc, 47.20.Ky

**DOI:** 10.7498/aps.62.200503

---

\* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 51177129) and the National High Technology Research and Development Program of China (Grant No. 2011AA05A305).

<sup>†</sup> Corresponding author. E-mail: yangxu@mail.stu.xjtu.edu.cn