

一类非线性 T-S 模糊时滞系统的鲁棒 观测器型 H_∞ 控制器设计*

宋晓娜[†] 刘磊坡

(河南科技大学, 电子信息工程学院, 洛阳 471023)

(2013 年 6 月 13 日收到; 2013 年 8 月 3 日收到修改稿)

针对同时具有分布时滞和非线性项的 T-S 模糊时滞系统, 提出观测器型 H_∞ 输出反馈控制器设计方法. 首先, 以非线性矩阵不等式形式给出时滞相关的满足 H_∞ 性能指标的稳定性分析充分条件; 其次, 给出与所给稳定性条件等价的线性矩阵不等式条件. 在此基础上, 讨论带有非线性项的观测器型 H_∞ 输出反馈控制的可行性. 最后, 通过仿真算例说明控制器设计方法的可行性.

关键词: T-S 模糊系统, 分布时滞, 观测器型输出反馈控制, H_∞ 控制

PACS: 87.19.1r, 02.30.Yy, 07.05.Mh, 05.45.-a

DOI: 10.7498/aps.62.218703

1 引言

人们对模糊时滞系统的关注起始于 2000 年前后, 具有时滞的 T-S 模糊系统的研究首先可见文献 [1], 该文献结合 Lyapunov-Krasovskii 泛函方法及线性矩阵不等式 (LMI) 技术, 采用模糊控制方法研究了连续时间和离散时间的非线性时滞系统, 给出了系统稳定的时滞无关条件及状态反馈模糊控制器、模糊观测器的存在条件与设计方法. 另一方面, 当为实际系统建模时, 由于系统操作点的变化、设备老化或辨识误差等原因不可避免地会出现参数的不确定性. 这种不确定性会对由状态空间模型描述的系统的参数有一定的干扰, 是系统稳定和性能下降的又一个重要原因. 因此, 过去的几十年中, 带有不确定参数的线性或非线性系统的稳定性分析及综合等各种问题受到了深入的研究, 并获得了丰富的研究成果 [2-8]. 其中文献 [9] 和 [10] 分别把不确定性引入连续时间 T-S 模糊时滞系统的鲁棒 H_∞ 控制及鲁棒镇定问题的研究中, 相应的离散时间情况可见文献 [11-13]. 自此以后, 模糊时滞系统的分

析与综合问题受到了人们的广泛关注, 人们针对带有不同滞的不同结构模糊模型, 提出了多种有效的分析和控制器设计方法, 获得了一系列有价值的研究成果 [14-23].

H_∞ 控制作为研究非线性系统的重要工具之一, 在系统的分析与研究中受到广泛关注, 有很多文献对模糊系统的 H_∞ 控制器设计进行了讨论 [24]. 例如, 文献 [25] 对带有状态时滞的 T-S 模糊系统设计了基于观测器的 H_∞ 控制器, 给出了非线性矩阵不等式形式的控制器存在条件; 而模糊时滞系统的时滞依赖观测器型 H_∞ 输出反馈控制器存在的线性矩阵不等式条件在文献 [26] 中给出. 但是, 对于同时具有状态时滞、分布时滞和非线性项的不确定 T-S 模糊时变时滞系统, H_∞ 控制研究的学术成果还较少见. 而且在实际情况中, 往往系统的状态是不可测的, 这时研究观测器型 H_∞ 输出反馈控制问题就很有意义.

本文针对同时具有分布时滞和非线性项的不确定 T-S 模糊时滞系统, 进行了鲁棒观测器型 H_∞ 输出反馈控制器设计. 利用线性矩阵不等式方法给出了输出反馈控制问题可解的充分条件, 使对所有

* 国家自然科学基金 (批准号: 61203047, 61203048, 61304144) 资助的课题.

[†] 通讯作者. E-mail: xiaona_97@163.com

容许的不确定性, 闭环系统都达到鲁棒稳定且满足 H_∞ 性能指标. 最后给出一个数值算例来说明所设计方法的有效性.

2 问题描述

考虑如下一类带有分布时滞和非线性项的不确定 T-S 模糊系统, 由如下 IF-THEN 规则表示: Plant Rule i : IF $s_1(t)$ is μ_{i1} and \dots and $s_p(t)$ is μ_{ip} Then

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) = & [A_i + \Delta A_i(t)]x(t) + [A_{1i} + \Delta A_{1i}(t)] \\ & \times x(t - \tau_1(t)) + A_{2i} \int_{t-\tau_2}^t x(s) ds + B_i u(t) \\ & + D_i g(x(t)) + D_{1i} w(t), \end{aligned} \quad (1)$$

$$y(t) = C_i x(t) + C_{1i} x(t - \tau_1(t)) + D_{2i} v(t), \quad (2)$$

$$z(t) = E_i x(t) + G_i u(t), \quad (3)$$

$$x(t) = \phi(t) \forall t \in [-\tau, 0], \quad i = 1, 2, \dots, r, \quad (4)$$

其中 μ_{ij} 是模糊集; r 是 IF-THEN 模糊规则的数目; $s_1(t), \dots, s_p(t)$ 表示前件变量. $x(t) \in \mathbb{R}^n$ 表示系统状态; $u(t) \in \mathbb{R}^m$ 为控制输入; $y(t) \in \mathbb{R}^s$ 表示测量输出; $z(t) \in \mathbb{R}^q$ 为被控输出; $w(t) \in \mathbb{R}^p$ 为任意的噪声信号; $v(t) \in \mathbb{R}^w$ 为任意的扰动信号; $\tau_1(t)$ 和 τ_2 都是正的标量, 代表模糊系统中各项的时滞参数, 其中 $\tau_1(t) \leq \bar{\tau}_1$; $\phi(t)$ 是给定的在 $[-\tau, 0]$, $\tau = \max(\bar{\tau}_1, \tau_2)$ 范围上的连续可微初值函数; $A_i, A_{1i}, A_{2i}, B_i, C_i, C_{1i}, D_i, D_{1i}, D_{2i}, E_i, G_i$ 是已知的常数矩阵; $\Delta A_i(t), \Delta A_{1i}(t)$ 是实值的未知矩阵, 代表时变的参数不确定性, 并且具有如下形式:

$$\begin{aligned} & [\Delta A_i(t) \Delta A_{1i}(t)] \\ & = M_i F_i(t) [N_{ai} N_{a1i}], \quad i = 1, 2, \dots, r, \end{aligned} \quad (5)$$

其中 M_i, N_{ai}, N_{a1i} 是已知的常数矩阵, $F_i(\cdot) : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^{l_1 \times l_2}$ 是未知的矩阵函数, 满足

$$F_i(t)^T F_i(t) \leq I, \quad \forall t. \quad (6)$$

不确定矩阵 $\Delta A_i(t), \Delta A_{1i}(t)$ 被称为是容许的, 如果条件 (5) 和 (6) 都满足.

采用单点模糊化, 乘积推理, 中心加权平均解模糊, 动态模糊模型 (1)—(3) 可以表示为

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) = & \sum_{i=1}^r h_i(s(t)) \left\{ [A_i + \Delta A_i(t)]x(t) \right. \\ & \left. + [A_{1i} + \Delta A_{1i}(t)]x(t - \tau_1(t)) \right. \\ & \left. + A_{2i} \int_{t-\tau_2}^t x(s) ds + B_i u(t) \right. \\ & \left. + D_i g(x(t)) + D_{1i} w(t) \right\}, \end{aligned} \quad (7)$$

$$y(t) = \sum_{i=1}^r h_i(s(t)) \{ C_i x(t) + C_{1i} x(t - \tau_1(t)) + D_{2i} v(t) \}, \quad (8)$$

$$z(t) = \sum_{i=1}^r h_i(s(t)) [E_i x(t) + G_i u(t)], \quad (9)$$

其中隶属度函数的表达和文献 [27] 相同.

在本文中, 我们要用到如下的假设: 非线性函数 $g(x(t))$ 满足:

$$\begin{aligned} \text{(I)} & g(0) = 0; \\ \text{(II)} & \|g(x) - g(y)\| \leq \|S_g(x - y)\|. \end{aligned}$$

对于所有的 $x, y \in \mathbb{R}^n$, 其中 S_g 是已知的实常矩阵.

现在, 利用并行分布补偿机理, 我们设计如下形式的模糊非线性观测器型输出反馈控制器:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}(t) = & \sum_{i=1}^r h_i(s(t)) [A_i \hat{x}(t) + A_{1i} \hat{x}(t - \tau_1(t)) \\ & + D_i g(\hat{x}(t)) + B_i u(t) + L_i (y(t) - \hat{y}(t))], \end{aligned} \quad (10)$$

$$\hat{y}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(s(t)) [C_i \hat{x}(t) + C_{1i} \hat{x}(t - \tau_1(t))], \quad (11)$$

$$u(t) = \sum_{i=1}^r h_i(s(t)) [K_i \hat{x}(t)], \quad i = 1, 2, \dots, r, \quad (12)$$

其中 $\hat{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ 表示控制器状态; L_i 和 K_i 分别为待定的观测器和控制器增益.

由此根据 (7)—(12), 闭环系统可以写成如下形式 (Σ'):

$$\begin{aligned} \dot{\eta}(t) = & \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(s(t)) h_j(s(t)) \{ A_{ij}(t) \eta(t) \\ & + \bar{A}_{1i}(t) \eta(t - \tau_1(t)) + \hat{A}_{2i} \int_{t-\tau_2}^t H \eta(s) ds \\ & + \bar{D}_i \xi(x(t), \hat{x}(t)) + \bar{D}_{1i} \bar{\omega}(t) \}, \end{aligned} \quad (13)$$

$$z(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(s(t)) h_j(s(t)) \hat{E}_{ij} \eta(t), \quad (14)$$

其中

$$\begin{aligned} \eta(t) = & \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t) - \hat{x}(t) \end{bmatrix}, \\ \bar{\omega}(t) = & \begin{bmatrix} w(t) \\ v(t) \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

$$\xi(x(t), \hat{x}(t)) = \begin{bmatrix} g(x(t)) \\ g(x(t)) - g(\hat{x}(t)) \end{bmatrix},$$

$$A_{ij}(t) = \hat{A}_{ij} + \Delta \hat{A}_i(t),$$

$$\bar{A}_{1i}(t) = \hat{A}_{1i} + \Delta \hat{A}_{1i}(t),$$

$$\hat{A}_{ij} = \begin{bmatrix} A_i + B_i K_j & -B_i K_j \\ 0 & A_i - L_i C_j \end{bmatrix},$$

$$\Delta \hat{A}_i(t) = \begin{bmatrix} \Delta A_i(t) & 0 \\ \Delta A_i(t) & 0 \end{bmatrix},$$

$$\hat{A}_{1i} = \begin{bmatrix} A_{1i} & 0 \\ 0 & A_{1i} - L_i C_{1j} \end{bmatrix},$$

$$\Delta \hat{A}_{1i}(t) = \begin{bmatrix} \Delta A_{1i}(t) & 0 \\ \Delta A_{1i}(t) & 0 \end{bmatrix},$$

$$\hat{A}_{2i} = \begin{bmatrix} 0 \\ A_{2i} \end{bmatrix},$$

$$\bar{D}_i = \begin{bmatrix} D_i & 0 \\ 0 & D_i \end{bmatrix},$$

$$\bar{D}_{1i} = \begin{bmatrix} D_{1i} & 0 \\ D_{1i} & -L_i D_{2j} \end{bmatrix},$$

$$\hat{E}_{ij} = [E_i + G_i K_j \quad -G_i K_j], H = [I \quad 0].$$

鲁棒 H_∞ 观测器型输出反馈控制问题可以进行如下表示: 对于给定的带有分布时滞和非线性项的模糊系统 (Σ) 和一个给定的干扰抑制参数 $\gamma > 0$, 寻找一个形如 (10) 式中的观测器增益 L_i 和形如 (12) 式中的控制器增益 K_i , 满足稳定性条件和 H_∞ 性能

$$\|z\|_2 < \gamma \|\bar{w}\|_2. \quad (15)$$

为了得到主要结论, 首先给出以下引理.

引理1^[28] 对任意矩阵 $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $Y \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 和正定矩阵 $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$, 下面的不等式成立:

$$XY^T + YX^T \leqslant XPX^T + YP^{-1}Y^T.$$

3 H_∞ 性能分析

引理1 给定 $\gamma > 0$ 是一常数, 在假设的前提下, 不确定模糊时滞系统 (Σ') 是渐近稳定且满足 H_∞ 性能. 如果存在矩阵 $P > 0$, $Q_2 > 0$, X_{lk} 和对称的 X_{ll} , $l, k = 1, 2, 3, k > l$ 及标量 $\varepsilon_n > 0$ ($n = 1, 2, 3$), 使得下

面的不等式成立:

$$\begin{bmatrix} \pi_{1ij} & \pi_{2i} & \pi_{3ij} \\ * & -S_1 & 0 \\ * & * & -S_2 \end{bmatrix} < 0, \quad 1 \leqslant i \leqslant r, \quad (16)$$

$$\begin{bmatrix} \pi_{1ij} + \pi_{1ji} & \pi_{2i} + \pi_{2j} & \pi_{3ij} + \pi_{3ji} \\ * & -2S_1 & 0 \\ * & * & -2S_2 \end{bmatrix} < 0, \quad 1 \leqslant i < j \leqslant r, \quad (17)$$

$$\Pi_X = \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} & X_{13} \\ * & X_{22} & X_{23} \\ * & * & X_{33} \end{bmatrix} > 0, \quad (18)$$

其中

$$\begin{aligned} \pi_{0ij} &= P\hat{A}_{ij} + \hat{A}_{ij}^T P + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) \hat{S}_g^T \hat{S}_g \\ &\quad + \bar{\tau}_1 X_{11} + X_{13} + X_{13}^T + \tau_2^2 H^T Q_2 H, \\ \pi_{1ij} &= \begin{bmatrix} \pi_{0ij} & \pi_{4ij} & \hat{A}_{ij}^T P \\ * & \pi_{5i} & \hat{A}_{1i}^T P + P \\ * & * & -2P + \bar{\tau}_1 X_{33} \end{bmatrix}, \\ \pi_{2i} &= \begin{bmatrix} P\hat{A}_{2i} & P\bar{D}_{1i} & P\hat{M}_i & \hat{N}_{ai}^T \\ -P\hat{A}_{2i} & -P\bar{D}_{1i} & -P\hat{M}_i & \hat{N}_{ai}^T \\ P\hat{A}_{2i} & P\bar{D}_{1i} & P\hat{M}_i & 0 \end{bmatrix}, \\ \pi_{3ij} &= \begin{bmatrix} \hat{E}_{ij}^T & P\bar{D}_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P\bar{D}_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P\bar{D}_i \end{bmatrix}, \\ \pi_{4ij} &= P\hat{A}_{1i} - \hat{A}_{ij}^T P + \bar{\tau}_1 X_{12} - X_{13} + X_{23}^T, \\ \pi_{5i} &= -P\hat{A}_{1i} - \hat{A}_{1i}^T P + \bar{\tau}_1 X_{22} - X_{23} - X_{23}^T, \\ S_1 &= \text{diag}\{Q_2, \gamma^2 I, I, I\}, \\ S_2 &= \text{diag}\{I, \varepsilon_1 I, \varepsilon_3 I, \varepsilon_2 I\}, \\ \hat{S}_g &= \text{diag}\{S_g, S_g\}. \end{aligned}$$

Proof: 我们首先证明当 $w(t) \equiv 0$ 时, 系统 (Σ') 是鲁棒渐近稳定的. 首先定义如下形式的 Lyapunov 候选函数:

$$\begin{aligned} V(t) &= \eta(t)^T P \eta(t) + V_1(t) + V_2(t) \\ &\quad + V_3(t) + V_4(t), \end{aligned} \quad (19)$$

其中

$$V_1(t) = \int_0^t \int_{\theta-\bar{\tau}_1}^{\theta} \begin{bmatrix} \eta(\theta) \\ \eta(\theta - \tau_1(t)) \\ \dot{\eta}(s) \end{bmatrix}^T \times \Pi_X \begin{bmatrix} \eta(\theta) \\ \eta(\theta - \tau_1(t)) \\ \dot{\eta}(s) \end{bmatrix} ds,$$

$$V_2(t) = \int_{-\bar{\tau}_1}^0 \int_{t+\theta}^t \dot{\eta}(s)^T X_{33} \dot{\eta}(s) ds d\theta,$$

$$V_3(t) = \int_{t-\tau_2}^t \left[\int_s^t x(\theta)^T d\theta \right] Q_2 \left[\int_s^t x(\theta) d\theta \right] ds,$$

$$V_4(t) = \int_0^{\tau_2} ds \int_{t-s}^t (\theta - t + s) x(\theta)^T Q_2 x(\theta) d\theta.$$

由假设和引理 1, 可得 $V(t)$ 沿系统 (Σ) 的轨线对时间求导有

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= 2\eta(t)^T P \dot{\eta}(t) + \dot{V}_1(t) + \dot{V}_2(t) + \dot{V}_3(t) + \dot{V}_4(t) + 2[\dot{\eta}(t)^T - \eta(\theta - \tau_1(t))^T] P \{-\dot{\eta}(t) \\ &\quad + \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(s(t)) h_j(s(t)) [A_{ij}(t) \eta(t) + \bar{A}_{1i}(t) \eta(t - \tau_1(t)) + \hat{A}_{2i} \int_{t-\tau_2}^t H \eta(s) ds \\ &\quad + \bar{D}_i \xi(x(t), \hat{x}(t)) + \bar{D}_{1i} \bar{\omega}(t)]\} \\ &\leq \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(s(t)) h_j(s(t)) \{ \eta(t)^T [P A_{ij}(t) + A_{ji}(t)^T P] \eta(t) + \eta(t)^T P \bar{A}_{1i}(t) \eta(t - \tau_1(t)) \\ &\quad + \eta(t - \tau_1(t))^T \bar{A}_{1i}(t)^T P \eta(t) + \eta(t)^T P \hat{A}_{2i} \alpha(t) + \alpha(t)^T \hat{A}_{2i}^T P \eta(t) \\ &\quad + \varepsilon_1^{-1} \eta(t)^T P \bar{D}_i \bar{D}_i^T P \eta(t) + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) \eta(t)^T \hat{S}_g^T \hat{S}_g \eta(t) \\ &\quad + \eta(t)^T (\bar{\tau}_1 X_{11} + X_{13} + X_{13}^T) \eta(t) + 2\eta(t)^T (\bar{\tau}_1 X_{12} - X_{13} + X_{23}^T) \eta(t - \tau_1(t)) \\ &\quad + \eta(t - \tau_1(t))^T (\bar{\tau}_1 X_{22} - X_{23} - X_{23}^T) \eta(t - \tau_1(t)) + \dot{\eta}(t)^T (\bar{\tau}_1 X_{33}) \dot{\eta}(t) \\ &\quad + 2\dot{\eta}(t) P A_{ij}(t) \eta(t) + 2\dot{\eta}(t) P \bar{A}_{1i}(t) \eta(t - \tau_1(t)) + 2\dot{\eta}(t) P \hat{A}_{2i} \alpha(t) \\ &\quad - 2\dot{\eta}(t)^T P \dot{\eta}(t) + \varepsilon_2^{-1} \dot{\eta}(t)^T P \bar{D}_i \bar{D}_i^T P \dot{\eta}(t) + \varepsilon_3^{-1} \eta(t - \tau_1(t))^T P \bar{D}_i \bar{D}_i^T P \eta(t - \tau_1(t)) \\ &\quad + 2\eta(t - \tau_1(t))^T P \dot{\eta}(t) - 2\eta(t - \tau_1(t))^T P A_{ij}(t) \eta(t) - 2\eta(t - \tau_1(t))^T P \bar{A}_{1i}(t) \eta(t - \tau_1(t)) \\ &\quad - 2\eta(t - \tau_1(t))^T P \hat{A}_{2i} \alpha(t) + \tau_2^2 \eta(t)^T H^T Q_2 H \eta(t) - \alpha(t)^T Q_2 \alpha(t) \}. \end{aligned}$$

接着, 我们可以得到

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &\leq \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(s(t)) h_j(s(t)) \{ \zeta(t)^T \Pi_{ij} \zeta(t) \} \\ &= \sum_{i=1}^r h_i(s(t))^2 \{ \zeta(t)^T \Pi_{ii} \zeta(t) \} + 2 \sum_{i,j=1, i < j}^r h_i(s(t)) h_j(s(t)) \left\{ \zeta(t)^T \times \frac{\Pi_{ij} + \Pi_{ji}}{2} \zeta(t) \right\}, \end{aligned} \quad (20)$$

其中

$$\zeta(t) = [\eta(t)^T \quad \eta(t - \tau_1(t))^T \quad \dot{\eta}(t)^T \quad \alpha(t)^T]^T,$$

$$\Pi_{ij} = \begin{bmatrix} \Pi_{11ij} & \Pi_{12ij} & A_{ij}(t)^T P & P \hat{A}_{2i} \\ * & \Pi_{22i} & \bar{A}_{1i}(t)^T P + P & -P \hat{A}_{2i} \\ * & * & \Pi_{33i} & P \hat{A}_{2i} \\ * & * & * & -Q_2 \end{bmatrix},$$

$$\Pi_{11ij} = P A_{ij}(t) + A_{ij}(t)^T P + \varepsilon_1^{-1} P \bar{D}_i \bar{D}_i^T P + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) \hat{S}_g^T \hat{S}_g + \bar{\tau}_1 X_{11} + X_{13} + X_{13}^T + \tau_2^2 H^T Q_2 H,$$

$$\Pi_{12ij} = P \bar{A}_{1i}(t) + \bar{\tau}_1 X_{12} - X_{13} + X_{23}^T - A_{ij}(t)^T P,$$

$$\Pi_{22i} = -P \bar{A}_{1i}(t) - \bar{A}_{1i}(t)^T P + \varepsilon_3^{-1} P \bar{D}_i \bar{D}_i^T P + \bar{\tau}_1 X_{22} - X_{23} - X_{23}^T,$$

$$\Pi_{33i} = -2P + \bar{\tau}_1 X_{33} + \varepsilon_2^{-1} P \bar{D}_i \bar{D}_i^T P.$$

另一方面, 使用 Schur 补定理, 由 (16) 和 (17) 式, 可得

$$\Pi_{ij} < 0, \quad 1 \leq i \leq j \leq r.$$

由上式及 (20) 式, 可得对于任意的 $\zeta(t) \geq 0, \dot{V}(t) < 0$.

因此, 系统 (13) 是鲁棒渐近稳定的.

下面推导闭环系统 (Σ') 满足 H_∞ 性能的充分条件. 引入函数:

$$J(t) = \int_0^t [z(s)^T z(s) - \gamma^2 \bar{\omega}(s)^T \bar{\omega}(s)] ds,$$

其中 $t > 0$. 注意到零初始条件, 可以得到对于任意非零 $w(t) \in \mathcal{L}_2[0, \infty)$ 和 $t > 0$,

$$J(t) = \int_0^t [z(s)^T z(s) - \gamma^2 \bar{\omega}(s)^T \bar{\omega}(s) + \dot{V}(s)] ds - V(t) \leq \int_0^t [z(s)^T z(s) - \gamma^2 \bar{\omega}(s)^T \bar{\omega}(s) + \dot{V}(s)] ds, \quad (21)$$

其中 $V(s)$ 为 (19) 式的形式, 则我们可以得到

$$z(s)^T z(s) - \gamma^2 w(s)^T w(s) + \dot{V}(s) \leq \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(s(s)) h_j(s(s)) \zeta(s)^T \hat{\Pi}_{ij} \zeta(s), \quad 1 \leq i \leq j \leq r, \quad (22)$$

其中

$$\zeta(s) = \begin{bmatrix} \eta(t)^T & \eta(t - \tau_1(t))^T & \dot{\eta}(t)^T & \alpha(t)^T & \bar{\omega}(t)^T \end{bmatrix}^T,$$

$$\hat{\Pi}_{ij} = \begin{bmatrix} \hat{\Pi}_{11ij} & \Pi_{12ij} & A_{ij}(t)^T P & P \hat{A}_{2i} & P \bar{D}_{1i} \\ * & \Pi_{22i} & \bar{A}_{1i}(t)^T P + P & -P \hat{A}_{2i} & -P \bar{D}_{1i} \\ * & * & \Pi_{33i} & P \hat{A}_{2i} & P \bar{D}_{1i} \\ * & * & * & -Q_2 & 0 \\ * & * & * & * & -\gamma^2 I \end{bmatrix},$$

$$\hat{\Pi}_{11ij} = P A_{ij}(t) + A_{ij}(t)^T P + \varepsilon_1^{-1} P \bar{D}_i \bar{D}_i^T P + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) \hat{S}_g^T \hat{S}_g + \bar{\tau}_1 X_{11} + X_{13} + X_{13}^T + \hat{E}_{ij}^T \hat{E}_{ij} + \tau_2^2 H^T Q_2 H,$$

利用引理 1, 并对 (16) 和 (17) 式应用 Schur 补引理, 可得 $\hat{\Pi}_{ij} < 0, 1 \leq i \leq j \leq r$. 连同 (21) 式, 对于任意非零的 $\bar{\omega}(t) \in \mathcal{L}_2[0, \infty)$ 和 $t > 0$ 可得 $J(t) < 0$. 因此, 我们可得 $\|z\|_2 < \gamma \|\bar{\omega}\|_2$.

证明结束.

下面在引理 3 中, 我们将给出将非凸条件 (16)—(18) 转换成严格 LMI 条件的方法.

引理3 存在矩阵 $P > 0, Q_2 > 0, K_i, L_i$ 和 X_{lk} 及对称的 $X_{ll}, 1 \leq l \leq k \leq 3$ 使得 (16)—(18) 式成立当且仅当给定 Q_2 和标量 $\varepsilon_n (n = 1, 2, 3)$, 存在矩阵 $\hat{P}_1 > 0, P_2 > 0, Z_m, W_m, m = 1, 2, \tilde{X}_{lk} (1 \leq l \leq k \leq 3)$ 使得下面的 LMIs 成立:

$$\begin{bmatrix} \phi_{1ii} & \phi_{2i} & \phi_{3ii} \\ * & -\tilde{S}_1 & 0 \\ * & * & -\tilde{S}_2 \end{bmatrix} < 0, \quad 1 \leq i \leq r, \quad (23)$$

$$\begin{bmatrix} \psi_{1ii} & \psi_{2ii} & \psi_{3i} \\ * & -\tilde{R}_1 & 0 \\ * & * & -\tilde{R}_2 \end{bmatrix} < 0, \quad 1 \leq i \leq r, \quad (24)$$

$$\begin{bmatrix} \phi_{1ij} + \phi_{1ji} & \phi_{2i} + \phi_{2j} & \phi_{3ij} + \phi_{3ji} \\ * & -2\tilde{S}_1 & 0 \\ * & * & -2\tilde{S}_2 \end{bmatrix} < 0,$$

$$1 \leq i < j \leq r, \quad (25)$$

$$\begin{bmatrix} \psi_{1ij} + \psi_{1ji} & \psi_{2ij} + \psi_{2ji} & \psi_{3i} + \psi_{3j} \\ * & -2\tilde{R}_1 & 0 \\ * & * & -2\tilde{R}_2 \end{bmatrix} < 0,$$

$$1 \leq i \leq r, \quad (26)$$

$$\mathcal{X} = \begin{bmatrix} \tilde{X}_{11} & \tilde{X}_{12} & \tilde{X}_{13} \\ * & \tilde{X}_{22} & \tilde{X}_{23} \\ * & * & \tilde{X}_{33} \end{bmatrix} > 0. \quad (27)$$

其中

$$\tilde{X}_{lk} = \begin{bmatrix} \tilde{X}_{lk}^{11} & X_{lk}^{12} \\ X_{lk}^{21} & X_{lk}^{22} \end{bmatrix}, \quad 1 \leq l < k \leq 3,$$

$$\phi_{1ij} = \begin{bmatrix} \phi_{0ij} & \phi_{4ij} & \hat{P}_1 A_i^T + Z_j^T B_i^T \\ * & \phi_{5i} & \hat{P}_1 A_{1i}^T + \hat{P}_1 \\ * & * & -2\hat{P}_1 + \bar{\tau}_1 \tilde{X}_{33}^{11} \end{bmatrix}$$

$$\phi_{2i} = \begin{bmatrix} D_{1i} & M_i & \hat{P}_1 N_{ai}^T & \hat{P}_1 E_i^T + Z_j^T G_i^T \\ -D_{1i} & -M_i & \hat{P}_1 N_{ali}^T & 0 \\ D_{1i} & M_i & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\phi_{3ij} = \begin{bmatrix} D_i & 0 & 0 & \hat{P}_1 S_g^T & \tau_2 \hat{P}_1 \\ 0 & D_i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & D_i & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\phi_{0ij} = A_i \hat{P}_1 + B_i Z_j + (A_i \hat{P}_1 + B_i Z_j)^T + \bar{\tau}_1 \tilde{X}_{11}^{11} + \tilde{X}_{13}^{11} + (\tilde{X}_{13}^{11})^T,$$

$$\phi_{4ij} = A_{1i} \hat{P}_1 - \hat{P}_1 A_i^T - Z_j^T B_i^T + \bar{\tau}_1 \tilde{X}_{12}^{11} - \tilde{X}_{13}^{11} + (X_{23}^{11})^T,$$

$$\phi_{5i} = -\hat{P}_1 A_{1i}^T - A_{1i} \hat{P}_1 + \bar{\tau}_1 \tilde{X}_{22}^{11} - \tilde{X}_{23}^{11} - (\tilde{X}_{23}^{11})^T,$$

$$\tilde{S}_1 = \text{diag}(\gamma^2 I, I, I, I),$$

$$\tilde{S}_2 = \text{diag}(\varepsilon_1 I, \varepsilon_3 I, \varepsilon_2 I, (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3)^{-1} I, Q_2^{-1}),$$

$$\psi_{1ij} = \begin{bmatrix} \psi_{0ij} & \psi_{4ij} & A_i^T P_2 - C_j^T W_i^T \\ * & \psi_{5ij} & A_{1i}^T P_2 - C_{1j}^T W_i^T + P_2 \\ * & * & -2P_2 + X_{33}^{22} \end{bmatrix},$$

$$\psi_{0ij} = P_2 A_i - W_i C_j + (P_2 A_i - W_i C_j)^T + \bar{\tau}_1 X_{11}^{22} + X_{13}^{22} + (X_{13}^{22})^T + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) S_g^T S_g,$$

$$\psi_{4ij} = -A_i^T P_2 + C_j^T W_i^T + \bar{\tau}_1 X_{12}^{22} - X_{13}^{22} + (X_{23}^{22})^T,$$

$$\psi_{5ij} = -P_2 A_{1i} + W_i C_{1j} + (W_i C_{1j} - P_2 A_{1i})^T + \bar{\tau}_1 X_{22}^{22} - X_{23}^{22} - (X_{23}^{22})^T,$$

$$\tilde{R}_1 = \text{diag}(Q_2, \gamma^2 I), \quad \tilde{R}_2 = \text{diag}(\varepsilon_1 I, \varepsilon_3 I, \varepsilon_2 I).$$

在这样的情况下, 所设计的基于观测器的 H_∞ 输出反馈控制器 (10)—(12) 有如下参数:

$$K_i = Z_i \hat{P}_1^{-1}, \quad L_i = P_2^{-1} W_i, \quad 1 \leq i \leq r. \quad (28)$$

Proof: 必要性: 假设存在矩阵 $P > 0, Q_2 > 0, K_i, L_i$ 和 X_{lk} 及对称的 $X_{ll}, 1 \leq l \leq k \leq 3$ 使得 (16)—(18) 式成立. 划分 P 和 X_{lk} 如下:

$$P = \begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{bmatrix}, \quad X_{lk} = \begin{bmatrix} X_{lk}^{11} & X_{lk}^{12} \\ X_{lk}^{21} & X_{lk}^{22} \end{bmatrix}, \quad (29)$$

其中 $P_1 > 0, P_2 > 0, X_{lk}^{11}$ 和对称的 X_{lk}^{22} . 将 (29) 式代入 (16) 式, 可得

$$\begin{bmatrix} \Theta_{11} & \Theta_{12} & \Theta_{13} & \Theta_{14} & \Theta_{15} & \Theta_{16} \\ * & \Theta_{22} & \Theta_{23} & \Theta_{24} & 0 & \Theta_{26} \\ * & * & -\Theta_{33} & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & -I & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -\Theta_{55} & 0 \\ * & * & * & * & * & -\Theta_{66} \end{bmatrix} < 0, \quad (30)$$

其中, 记号 \otimes 用来代替在接下来的证明中不需要的矩阵部分,

$$\Theta_{11} = \begin{bmatrix} \theta_{111} & \otimes & \theta_{112} \\ * & \otimes & \otimes \\ * & * & \theta_{113} \end{bmatrix},$$

$$\Theta_{12} = \begin{bmatrix} \otimes & \Theta_{121} & \otimes \\ \otimes & \otimes & \otimes \\ \otimes & \Theta_{122} & \otimes \end{bmatrix},$$

$$\Theta_{13} = \begin{bmatrix} \otimes & P_1 D_{1i} & \otimes \\ \otimes & \otimes & \otimes \\ \otimes & -P_1 D_{1i} & \otimes \end{bmatrix},$$

$$\Theta_{14} = \begin{bmatrix} P_1 M_i & N_{ai}^T & E_i^T + K_j^T G_i^T \\ \otimes & \otimes & \otimes \\ -P_1 M_i & N_{ali}^T & 0 \end{bmatrix},$$

$$\Theta_{15} = \begin{bmatrix} P_1 D_i & \otimes & 0 \\ \otimes & \otimes & \otimes \\ 0 & \otimes & P_1 D_i \end{bmatrix},$$

$$\Theta_{16} = \begin{bmatrix} \otimes & 0 & \otimes \\ \otimes & \otimes & \otimes \\ \otimes & 0 & \otimes \end{bmatrix},$$

$$\Theta_{22} = \begin{bmatrix} \otimes & \otimes & \otimes \\ * & -2P_1 + \tau_1 X_{33}^{11} & \otimes \\ * & * & \otimes \end{bmatrix},$$

$$\Theta_{23} = \begin{bmatrix} \otimes & \otimes & \otimes \\ \otimes & P_1 D_{1i} & \otimes \\ \otimes & \otimes & \otimes \end{bmatrix},$$

$$\Theta_{24} = \begin{bmatrix} \otimes & \otimes & \otimes \\ P_1 M_i & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\Theta_{26} = \begin{bmatrix} \otimes & \otimes & \otimes \\ \otimes & P_1 D_i & \otimes \\ \otimes & \otimes & \otimes \end{bmatrix},$$

$$\Theta_{33} = \text{diag}(Q_2, \gamma^2 I, \gamma^2 I),$$

$$\Theta_{55} = \text{diag}(\varepsilon_1 I, \varepsilon_1 I, \varepsilon_3 I),$$

$$\Theta_{66} = \text{diag}(\varepsilon_3 I, \varepsilon_2 I, \varepsilon_2 I),$$

$$\theta_{111} = P_1 A_i + P_1 B_i K_j + (P_1 A_i + P_1 B_i K_j)^T + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) S_g^T S_g + \tau_1 X_{11}^{11} + X_{13}^{11} + (X_{13}^{11})^T + \tau_2^2 Q_2,$$

$$\theta_{112} = P_1 A_{1i} - A_i^T P_1 - K_j^T B_i^T P_1 + \bar{\tau}_1 X_{12}^{11} - X_{13}^{11} + (X_{23}^{11})^T,$$

$$\theta_{113} = -P_1 A_{1i} - A_i^T P_1 + \bar{\tau}_1 X_{22}^{11} - X_{23}^{11} - (X_{23}^{11})^T,$$

$$\Theta_{121} = A_i^T P_1 + K_j^T B_i^T P_1,$$

$$\Theta_{122} = A_i^T P_1 + P_1.$$

在 (30) 式左侧, 左右两侧分别乘以

$$\begin{bmatrix} \Xi_1 & 0 & 0 \\ 0 & \Xi_2 & 0 \\ 0 & 0 & \Xi_3 \end{bmatrix},$$

其中

$$\Xi_1 = \begin{bmatrix} P_1^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P_1^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & P_1^{-1} \end{bmatrix},$$

$$\Xi_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix},$$

$$\Xi_3 = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix},$$

及其转置, 再设 $\hat{P}_1 = P_1^{-1}$, $\hat{X}_{kl}^{11} = P_1^{-1} X_{kl}^{11} P_1^{-1}$ ($1 \leq k < l \leq 3$) 可得 (23) 式, $i = j$ 及 $K_i = Z_i P_1 = Z_i \hat{P}_1^{-1}$. 利用同样的方法, 可得 (25) 式.

为得到余下的 LMIs (24) 和 (26), 在矩阵 (30) 左侧, 左右两侧分别乘以

$$\begin{bmatrix} \hat{\Xi}_1 & 0 & 0 \\ 0 & \hat{\Xi}_2 & 0 \\ 0 & 0 & \hat{\Xi}_3 \end{bmatrix},$$

其中

$$\hat{\Xi}_1 = \begin{bmatrix} 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix},$$

$$\hat{\Xi}_2 = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\hat{\Xi}_3 = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix},$$

及其转置, 可得 (24) 式, $i = j$ 和 $L_i = P_2^{-1} W_i$. 类似地, 可得 (26) 和 (27) 式. 必要性得证.

充分性: 假设存在矩阵 $\hat{P}_1 > 0$, $P_2 > 0$, Z_m , W_m , $m = 1, 2$, \hat{X}_{lk}^{11} ($1 \leq l < k \leq 3$), 使得 LMIs(23)—(27) 成立. 令 K_i 和 L_i 如 (28) 式, $P_1 = \hat{P}_1^{-1}$, 由 (23)—(26) 式我们可得

$$\tilde{\Phi}_{ii} < 0, \quad \tilde{\Psi}_{ii} < 0, \quad 1 \leq i \leq r, \quad (31)$$

$$\tilde{\Phi}_{kl} + \tilde{\Phi}_{lk} < 0,$$

$$\tilde{\Psi}_{kl} + \tilde{\Psi}_{lk} < 0, \quad 1 \leq k < l \leq r, \quad (32)$$

其中

$$\tilde{\Phi}_{ii} = \begin{bmatrix} \Phi_{1ii} & \Phi_{2ii} & \Phi_{3ii} \\ * & -I & 0 \\ * & * & -R_1 \end{bmatrix},$$

$$\Phi_{1ij} = \begin{bmatrix} \Phi_{0ij} & \Phi_{4ij} & A_i^T P_1 + K_j^T B_i^T P_1 \\ * & \Phi_{5ij} & A_{1i}^{varT} P_1 + P_1 \\ * & * & -2P_1 + \bar{\tau}_1 X_{33}^{11} \end{bmatrix},$$

$$\Phi_{2ij} = \begin{bmatrix} P_1 D_{1i} & P_1 M_i & N_{ai}^T & E_i^T + K_j^T G_i^T \\ -P_1 D_{1i} & -P_1 M_i & N_{ai}^T & 0 \\ P_1 D_{1i} & P_1 M_i & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\Phi_{3ij} = \begin{bmatrix} P_1 D_i & 0 & 0 & S_g^T & \tau_2 I \\ 0 & P_1 D_i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P_1 D_i & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned} \Phi_{0ij} &= P_1 A_i + P_1 B_i K_j + (P_1 A_i + P_1 B_i K_j)^T \\ &\quad + \bar{\tau}_1 X_{11}^{11} + X_{13}^{11} + (X_{13}^{11})^T, \\ \Phi_{4ij} &= P_1 A_{1i} - A_i^T P_1 - K_j^T B_i^T P_1 \\ &\quad + \bar{\tau}_1 X_{12}^{11} - X_{13}^{11} + (X_{23}^{11})^T, \\ \Phi_{5ij} &= -P_1 A_{1i} - A_i^T P_1 + \bar{\tau}_1 X_{22}^{11} \\ &\quad - X_{23}^{11} - (X_{23}^{11})^T, \\ \tilde{\Psi}_i &= \begin{bmatrix} \psi_{1ii} & \psi_{2ii} & \psi_{3i} \\ * & -\tilde{R}_1 & 0 \\ * & * & -\tilde{R}_2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

使用 Schur 补定理, 由 (31) 和 (32) 式, 可得

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \tilde{\Phi}_{ii} & \tilde{\Gamma}_{ii} \\ * & \tilde{\Psi}_{ii} \end{bmatrix} < 0, \quad 1 \leq i \leq r, \quad (33) \\ \begin{bmatrix} \tilde{\Phi}_{kl} + \tilde{\Phi}_{lk} & \tilde{\Gamma}_{kl} + \tilde{\Gamma}_{lk} \\ * & \tilde{\Psi}_{kl} + \tilde{\Psi}_{lk} \end{bmatrix} < 0, \\ 1 \leq k < l \leq r, \quad (34) \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}_{ij} &= [\tilde{\Gamma}_{2ij} \quad \tilde{\Gamma}_{3i} \quad \tilde{\Gamma}_{6i} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]; \\ \tilde{\Gamma}_{2ij} &= [\tilde{\Gamma}_{0ij} \quad \tilde{\Gamma}_{1ij} \quad -K_j^T B_i^T P_1 \quad 0 \quad P_2 M_i \quad 0 \\ &\quad -K_j^T G_i^T \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T, \\ \tilde{\Gamma}_{3i} &= [\tilde{\Gamma}_4 \quad \tilde{\Gamma}_5 \quad 0 \quad 0 \quad -P_2 M_i \\ &\quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T, \\ \tilde{\Gamma}_{6i} &= [0 \quad 0 \quad (\bar{\tau}_1 X_{33}^{12})^T \\ &\quad 0 \quad P_2 M_i \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T, \\ \Gamma_{0ij} &= -K_j^T B_i^T P_1 + (\bar{\tau}_1 X_{11}^{12} + X_{13}^{12} + (X_{13}^{21})^T)^T, \\ \tilde{\Gamma}_{1ij} &= K_j^T B_i^T P_1 + \bar{\tau}_1 X_{12}^{21} - X_{13}^{21} + (X_{23}^{12})^T, \\ \tilde{\Gamma}_4 &= (\bar{\tau}_1 X_{12}^{12} - X_{13}^{12} + (X_{23}^{21})^T)^T, \\ \tilde{\Gamma}_5 &= (\bar{\tau}_1 X_{22}^{12} - X_{23}^{12} - (X_{23}^{21})^T)^T. \end{aligned}$$

交换 (33) 和 (34) 式的行和列, 可得 (16) 和 (17) 式
其中 $P > 0$, 及

$$\begin{aligned} P &= \begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{bmatrix}, \\ X_{lk} &= \begin{bmatrix} X_{lk}^{11} & X_{lk}^{12} \\ X_{lk}^{21} & X_{lk}^{22} \end{bmatrix}, \quad 1 \leq l \leq k \leq 3. \end{aligned}$$

证明结束.

4 H_∞ 观测器型输出反馈控制器设计

现在, 我们给出本文所示带有分布时滞和非线性项的 T-S 模糊系统的鲁棒 H_∞ 观测器型输出反馈控制问题的可解性.

定理1 存在模糊控制器 (10)—(12) 使得闭环模糊系统 (Σ') 渐近稳定并且满足 H_∞ 性能, 如果存在矩阵 $\hat{P}_1 > 0, P_2 > 0, Z_m, W_m, m = 1, 2, \tilde{X}_{lk} (1 \leq l \leq k \leq 3)$ 和标量 $\varepsilon_n (n = 1, 2, 3)$ 使得 (23)—(27) 成立. 在这种情况下, 控制器增益 K_i 和观测器增益 L_i 在 (28) 式中给出.

证明 由引理 2 和 3, 可得定理结果.

证明结束.

5 仿真算例

本节, 采用并行分布补偿机制, 使用一个仿真算例来证明所设计的基于观测器的 H_∞ 输出反馈控制器的有效性.

本例中的模糊规则为两条, 系统参数如下:

$$\begin{aligned} A_1 &= \begin{bmatrix} 0 & 0.5 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \\ A_{11} &= \begin{bmatrix} -0.03 & 0.02 \\ 0.04 & -0.03 \end{bmatrix}, \\ A_{21} &= \begin{bmatrix} -0.05 & 0.02 \\ 0.02 & -0.05 \end{bmatrix}, \\ B_1 &= \begin{bmatrix} 0.3 & -0.8 \\ 0.3 & 1 \end{bmatrix}, \\ C_1 &= \begin{bmatrix} -0.1 & 0.2 \end{bmatrix}, \\ C_{11} &= \begin{bmatrix} -1 & 0.6 \end{bmatrix}, \\ D_1 &= \begin{bmatrix} 0.01 \\ 0.02 \end{bmatrix}, \\ D_{11} &= \begin{bmatrix} -0.5 \\ 0 \end{bmatrix}, \\ D_{21} &= -0.2, \\ E_1 &= \begin{bmatrix} 0 & 0.01 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 G_1 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \\
 A_2 &= \begin{bmatrix} -8 & 0.15 \\ 1.3 & 0.08 \end{bmatrix}, \\
 A_{12} &= \begin{bmatrix} -0.05 & 0.01 \\ 0.03 & -0.02 \end{bmatrix}, \\
 A_{22} &= \begin{bmatrix} -0.06 & 0.02 \\ 0.01 & -0.02 \end{bmatrix}, \\
 B_2 &= \begin{bmatrix} 0.6 & -0.8 \\ 0.2 & 0.1 \end{bmatrix}, \\
 C_2 &= \begin{bmatrix} -0.3 & 1.5 \end{bmatrix}, \\
 C_{12} &= \begin{bmatrix} -0.3 & 0 \end{bmatrix}, \\
 D_2 &= \begin{bmatrix} 0.02 \\ -0.03 \end{bmatrix}, \\
 D_{12} &= D_{11}, \quad D_{22} = 0.3, \\
 E_2 &= E_1, \\
 G_2 &= \begin{bmatrix} -0.5 & -1 \\ 0 & 5 \end{bmatrix},
 \end{aligned}$$

参数不确定矩阵 $\Delta A_1(t)$, $\Delta A_{11}(t)$ 和 $\Delta A_2(t)$, $\Delta A_{12}(t)$ 满足 (5) 式和 (6) 式及

$$\begin{aligned}
 M_1 &= \begin{bmatrix} -0.1 & 0.2 \\ 0 & -0.3 \end{bmatrix}, \\
 N_{a1} &= 0.02, \quad N_{a11} = 0.01, \\
 M_2 &= \begin{bmatrix} -0.3 & 0.1 \\ 0.1 & -0.2 \end{bmatrix}, \\
 N_{22} &= N_{21}, \quad N_{a12} = N_{a11}.
 \end{aligned}$$

最终的模糊系统表示为

$$\begin{aligned}
 \dot{x}(t) &= \sum_{i=1}^2 h_i(s(t)) \{ [A_i + \Delta A_i(t)]x(t) \\
 &+ [A_{1i} + \Delta A_{1i}(t)]x(t-0.1) \\
 &+ [A_{2i} + \Delta A_{2i}(t)] \int_{t-0.1}^t x(s) ds \\
 &+ [B_i + \Delta B_i(t)]u(t) + D_{1i}w(t) \}, \\
 y(t) &= \sum_{i=1}^2 h_i(s(t)) \{ [C_i + \Delta C_i(t)]x(t) + D_{2i}w(t) \},
 \end{aligned}$$

$$z(t) = \sum_{i=1}^2 h_i(s(t)) [E_i x(t) + G_i u(t)],$$

其中

$$\begin{aligned}
 h_1(x_1(t)) &= \begin{cases} 1, & x_1 < -1, \\ 0.1 - 0.1x_1^2, & |x_1| \leq 1, \\ 0 & x_1 > 1. \end{cases} \\
 h_2(x_1(t)) &= \begin{cases} 0, & x_1 < -1 \\ 0.9 + 0.1x_1^2, & |x_1| \leq 1, \\ 1, & x_1 > 1. \end{cases}
 \end{aligned}$$

其中需要注意非线性函数, 在实际系统中扰动多种多样, 有些扰动不具有有界的能量, 因此不能涵盖在能量有界的扰动 $v(t)$ 中. 考虑这样的情况, 我们使用一个非线性函数来表示这类并不具有有界的能量, 而仅满足 Lipschitz 条件的扰动. 在本算例中, 我们选择如下形式的非线性函数:

$$g(x(t)) = \sin([0.3 \ 0.1]x(t)).$$

并选择干扰抑制比 $\gamma = 0.8$ 及

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 1, \quad Q_2 &= \begin{bmatrix} 0.2 & 0 \\ 0 & 0.2 \end{bmatrix}, \\
 S_g &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

利用 Matlab 解 (23)—(27) 可以得到

$$\begin{aligned}
 W_1 &= \begin{bmatrix} 0.8829 \\ 0.8673 \end{bmatrix}, \quad W_2 = \begin{bmatrix} 0.8433 \\ 0.6810 \end{bmatrix}, \\
 Z_1 &= \begin{bmatrix} -1.1498 & -0.6405 \\ 1.3574 & -1.0379 \end{bmatrix}, \\
 Z_2 &= \begin{bmatrix} 1.1834 & -2.5272 \\ 2.5771 & -1.4938 \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

同时可解得, $\bar{\tau}_{\max} = 1$.

利用定理 1, 所设计的基于观测器型模糊输出反馈控制器参数如下:

$$\begin{aligned}
 L_1 &= \begin{bmatrix} 1.3722 \\ 2.3794 \end{bmatrix}, \quad L_2 = \begin{bmatrix} 1.7233 \\ 1.4483 \end{bmatrix}, \\
 K_1 &= \begin{bmatrix} -1.2809 & -0.2684 \\ 1.8750 & -1.0861 \end{bmatrix},
 \end{aligned}$$

$$K_2 = \begin{bmatrix} 1.9625 & -2.2157 \\ 3.4633 & -1.6892 \end{bmatrix}.$$

当初始条件为 $x(0) = \begin{bmatrix} 1 & -2 \end{bmatrix}^T$ 时, 设外部干扰输入 $w(t)$ 具有如下形式:

$$w(t) = \frac{1}{t+0.1}, \quad t \geq 0.$$

由此, 闭环系统的状态响应的仿真见图 1, 图 2 至图 4 依次为闭环系统控制输入、测量输出和被控输出的仿真图. 从仿真结果可以看出所设计的基于观测器型模糊动态输出反馈控制器满足所给的要求.

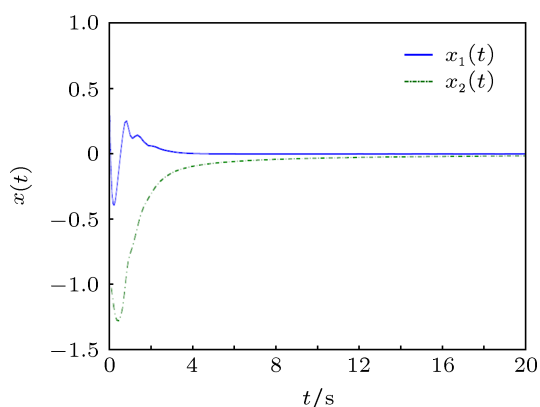


图 1 状态响应 $x(t)$

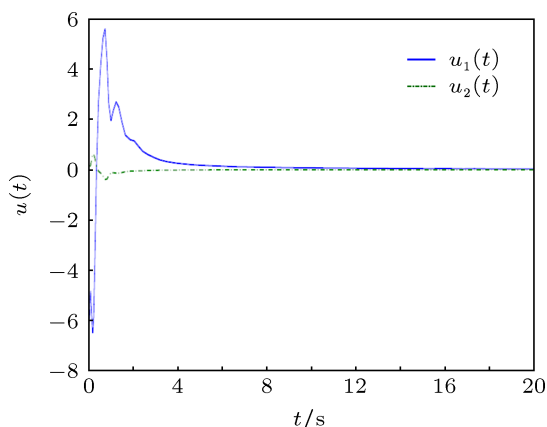


图 2 控制输入 $u(t)$

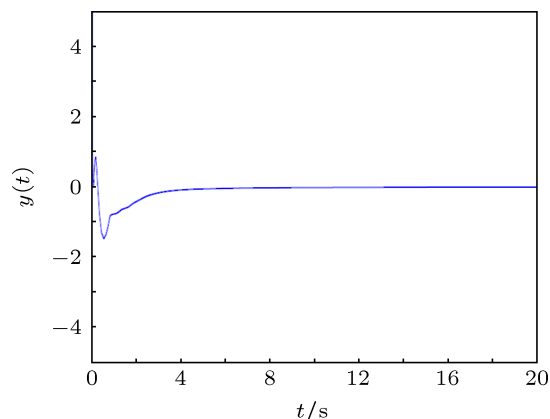


图 3 测量输出 $y(t)$

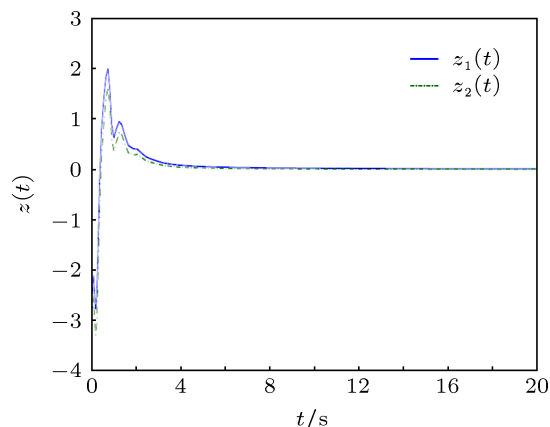


图 4 控制输出 $z(t)$

6 结论

本文对于同时具有分布时滞及非线性项的 T-S 模糊系统进行了观测器型 H_∞ 输出反馈控制器设计, 得到了控制器存在的新结果, 并提供了期望控制器的设计方法. 最后, 用仿真算例进行仿真, 说明了所设计的带有非线性项的观测器型 H_∞ 输出反馈控制器的有效性.

[1] Cao Y Y, Frank P M 2000 *IEEE Transactions on Fuzzy Systems* **8** 200
 [2] Wang H, Han Z Z, Zhang W, Xie Q Y 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 2779 (in Chinese) [王划, 韩正之, 章伟, 谢七月 2008 物理学报 **57** 2779]
 [3] Song X N, Fu Z M, Liu L P 2012 *Chin. Phys. B* **21** 118701
 [4] Shi P, Mahmoud M, Yi J, Ismail A 2005 *Information Sciences* **176** 186
 [5] Lee S M, Kwon O M, Park J H 2010 *Chin. Phys. B* **19** 050507
 [6] Li Z, Han C Z 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 847 (in Chinese) [李智, 韩崇昭 2001 物理学报 **50** 847]
 [7] Gao Y, Li L, Peng H, Yang Y, Zhang X 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 1444 (in Chinese) [高洋, 李丽香, 彭海朋, 杨义先, 张小红 2008 物理学报 **57** 1444]
 [8] Niu Y, Ho D W C, Lam J 2005 *Automatica* **41** 873
 [9] Lee H J, Park J B, Chen G 2001 *IEEE Transactions on Fuzzy Systems* **9** 369
 [10] Lee K R, Kim J H, Jeung E T, Park H B 2000 *IEEE Transactions on Fuzzy Systems* **8** 657
 [11] Cao Y Y, Frank P M 2002 *IEEE Transactions on Fuzzy Systems* **8** 406
 [12] Xu S, Lam J 2005 *IEEE Transactions on Fuzzy Systems* **13** 82
 [13] Zhou S, Feng G, Lam J, Xu S 2005 *Information Sciences* **174** 197
 [14] Guan X P, Chen C L, Fan Z P 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 753 (in Chinese)

- [关新平, 陈彩莲, 范正平 2002 物理学报 **51** 753]
- [15] Zhang H, Yang D, Chai T 2007 *IEEE Transactions on Systems Man and Cybernetics Part C-Applications and Reviews* **37** 160
- [16] Zhang H, Xie X 2011 *IEEE Transactions on Fuzzy Systems* **19** 478
- [17] Yue D, Lam J 2005 *Optimal Control Applications and Methods* **26** 85
- [18] Xu S, Lam J, Chen B 2004 *European Journal of Control* **10** 365
- [19] Yang D, Zhang H, Zhao Y, Song C, Wang Y 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 1562 (in Chinese) [杨东升, 张化光, 赵琰, 宋崇辉, 王迎春 2010 物理学报 **59** 1562]
- [20] Li N, Liu H, Xiang W 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 230505 (in Chinese) [李宁, 刘恒, 向伟 2012 物理学报 **61** 230505]
- [21] Gong D W, Zhang H G, Wang Z S 2012 *Chin. Phys. B* **21** 030204
- [22] Fridman E, Shaked U 2002 *IEEE Transactions on Automatic Control* **47** 253
- [23] Ali M 2011 *Chin. Phys. B* **20** 080201
- [24] Yang D, Zhang J 2013 *Journal of Northeastern University (Natural Science)* **34** 305 (in Chinese) [杨冬梅, 张静 2013 东北大学学报(自然科学版) **34** 305]
- [25] Lo J C, Lin M L 2004 *IEEE Transactions on Fuzzy Systems* **12** 350
- [26] Lin C, Wang Q G, Lee T H, He Y, Chen B 2008 *Automatica* **44** 868
- [27] Song X, Xu S, Shen H 2008 *Information Sciences* **178** 4341
- [28] Xie L, de Souza C E 1992 *IEEE Transactions on Automatic Control* **37** 1188

Robust observer-based H_∞ control for nonlinear T-S fuzzy time-delay systems*

Song Xiao-Na[†] Liu Lei-Po

(*Electronic and Information Engineering College, Henan University of Science and Technology, Luoyang 471023, China*)

(Received 13 June 2013; revised manuscript received 3 August 2013)

Abstract

This paper considers the design problem of observer-based H_∞ output feedback control over the nonlinear Takagi-Sugeno (T-S) fuzzy systems with distributed delays. Firstly, delay-dependent sufficient conditions satisfy the H_∞ performance, are given for the stability analysis in terms of non-strict linear matrix inequality; then, the equivalent linear matrix inequality stability conditions can be obtained. Based on this, the solvable of the observer-based H_∞ output feedback control problem is proposed. Finally, a numerical example is given to illustrate the effectiveness of the design approach here.

Keywords: T-S fuzzy systems, distributed delays, observer-based output feedback control, H_∞ control

PACS: 87.19.1r, 02.30.Yy, 07.05.Mh, 05.45.-a

DOI: 10.7498/aps.62.218703

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 61203047, 61203048, 61304144).

[†] Corresponding author. E-mail: xiaona.97@163.com