均匀磁场中二维各向同性带电谐振子的守恒量与对称性研究*

楼智美†

(绍兴文理学院物理系, 绍兴 312000)

(2013年7月26日收到; 2013年8月17日收到修改稿)

由牛顿第二定律得到二维各向同性带电谐振子在均匀磁场中运动的运动微分方程, 通过对运动微分方程的直接积分得到系统的两个积分 (守恒量). 利用 Legendre 变换建立守恒量与 Lagrange 函数间的关系, 从而求得系统的 Lagrange 函数, 并讨论与守恒量相应的无限小变换的 Noether 对称性与 Lie 对称性, 最后求得系统的运动学方程.

关键词: 二维各向同性带电谐振子, 守恒量, Noether 对称性, Lie 对称性

PACS: 02.30.Hq, 11.30.−j DOI: 10.7498/aps.62.220201

1 引 言

力学系统的对称性与守恒量紧密地联系在一起, 关于力学系统对称性与守恒量的研究已渗透到数学、力学、物理学等各个领域. 寻求力学系统的对称性和守恒量, 特别是寻求典型力学系统的守恒量, 并研究与守恒量相应的 Noether 对称性和 Lie 对称性, 已受到众多分析力学专家的关注. 寻找力学系统的守恒量有多种方法, 如 Noether 对称性法 [1−3]、Lie 对称性法 [4−6]、Mei 对称性法 [7−9]、Poisson 括号法 [10−13] 、Ermakov 方法 [14−16] 和扩展 Prelle-Singer 法 [17−19]. 从运动微分方程出发, 经简单的变换后直接积分求得守恒量的方法 (直接积分法)[20,21], 不需要已知系统的 Lagrange 函数 (或 Hamilton 函数), 也不需要求积分乘子, 方法直接而简单, 适合求运动微分方程为线性微分方程组的守恒量. 均匀磁场中二维各向同性带电谐振子是一常见的力学系统, 用牛顿第二定律能很方便地得到其运动微分方程, 但其 Lagrange 函数不能直接得到. 因此, 本文用直接积分法先得到均匀磁场中二维各向同性带电谐振子的两个独立积分 (守恒量), 再利用 Legendre 变换建立守恒量与 Lagrange 函数间的关系, 从而求得系统的 Lagrange 函数, 并讨论与守恒量相应的无限小变换的 Noether 对称性与 Lie 对称性, 最后求得系统的运动学方程.

2 均匀磁场中二维各向同性带电谐振子的守恒量

设带电量为 q 的二维各向同性谐振子在 oxy 平面, 处在磁感应强度为 B 的均匀磁场中, 磁场方向为 z 方向. 则此系统的运动微分方程为

$$m\ddot{x}_1 = -kx_1 + qB\dot{x}_2, \tag{1a}$$

$$m\ddot{x}_2 = -kx_2 - qB\dot{x}_1, \tag{1b}$$

其中 $x_1 = x, x_2 = y$.

(1a) 式乘以 $\dot{x}_1$ 与 (1b) 式乘以 $\dot{x}_2$ 求和后积分, 可得积分 (守恒量)I_1:

$$I_1 = \frac{m}{2}(\dot{x}_1^2+\dot{x}_2^2)+\frac{k}{2}(x_1^2+x_2^2). \tag{2a}$$

(1a) 式乘以 x_2 与 (1b) 式乘以 x_1 相差后积分, 可得积分 (守恒量)I_2:

$$I_2 = m(x_2\dot{x}_1 - x_1\dot{x}_2) - \frac{qB}{2}(x_1^2+x_2^2). \tag{2b}$$

* 国家自然科学基金重点项目 (批准号: 10932002) 资助的课题.

† 通讯作者. E-mail: louzhimei@usx.edu.cn

很明显, I_1 具有能量的量纲, 为系统的能量, 且与二维各向同性谐振子的能量相同. I_2 具有角动量的量纲, 可称之为系统的 “类角动量”. 当 $B=0$ 时, I_2 退化为二维各向同性谐振子的角动量. 另外, I_1 与 I_2 是相互独立的.

3 系统的 Lagrange 函数

令 $C_2^1=\frac{\dot{x}_1}{\dot{x}_2}, C_1^2=\frac{\dot{x}_2}{\dot{x}_1}$, 则守恒量 I_1 可分别表示成如下形式:

$$I_1^1=\frac{m}{2}\dot{x}_1^2(1+(C_1^2)^2)+\frac{k}{2}(x_1^2+x_2^2), \tag{3a}$$

$$I_1^2=\frac{m}{2}\dot{x}_2^2(1+(C_2^1)^2)+\frac{k}{2}(x_1^2+x_2^2). \tag{3b}$$

可以通过 Legendre 变换建立守恒量 I_1 与 Lagrange 函数间的如下关系 [22]:

$$\dot{x}_1\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}+\dot{x}_2\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2}-L=I_1, \tag{4}$$

(4) 式的特征方程为

$$\frac{\mathrm{d}\dot{x}_1}{\dot{x}_1}=\frac{\mathrm{d}\dot{x}_2}{\dot{x}_2}=\frac{\mathrm{d}L}{I_1+L}, \tag{5}$$

由 (5) 式可得

$$\frac{\mathrm{d}\dot{x}_1}{\dot{x}_1}=\frac{\mathrm{d}L_1}{I_1^1+L_1}, \tag{6a}$$

$$\frac{\mathrm{d}\dot{x}_2}{\dot{x}_2}=\frac{\mathrm{d}L_1}{I_1^2+L_2}. \tag{6b}$$

将 (3a), (3b) 式分别代入 (6a), (6b) 式, 可得 [22]

$$L_1=A_1\dot{x}_1+\dot{x}_1\int^{\dot{x}_1}\frac{I_1^1(x_1,x_2,\xi)\,\mathrm{d}\xi}{\xi^2}, \tag{7a}$$

$$L_2=A_2\dot{x}_2+\dot{x}_2\int^{\dot{x}_2}\frac{I_1^2(x_1,x_2,\xi)\,\mathrm{d}\xi}{\xi^2}, \tag{7b}$$

其中 $A_1=A_1(x_1,x_2,C_1^2)$, $A_2=A_2(x_1,x_2,C_2^1)$ 是任意函数, L_1, L_2 分别是用 $\dot{x}_1,\dot{x}_2$ 表示的 Lagrange 函数, 则系统的 Lagrange 函数为 [22]

$$\begin{aligned}L={}&A_1\dot{x}_1+A_2\dot{x}_2\\&+\frac{1}{2}\Big[\dot{x}_1\int^{\dot{x}_1}\frac{I_1^1(x_1,x_2,\xi)\,\mathrm{d}\xi}{\xi^2}\\&+\dot{x}_2\int^{\dot{x}_2}\frac{I_1^2(x_1,x_2,\xi)\,\mathrm{d}\xi}{\xi^2}\Big]\\={}&\frac{m}{2}(\dot{x}_1^2+\dot{x}_2^2)-\frac{k}{2}(x_1^2+x_2^2)+A_1\dot{x}_1+A_2\dot{x}_2.\end{aligned} \tag{8}$$

将 (8) 式代入 Lagrange 方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}-\frac{\partial L}{\partial x_1}=0, \tag{9a}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2}-\frac{\partial L}{\partial x_2}=0, \tag{9b}$$

并比较 (9a), (9b) 式与 (1a), (1b) 式可得

$$A_{2x_1}-A_{1x_2}=qB, \tag{10}$$

$$A_{1t}=A_{2t}=0, \tag{11}$$

其中的下标分别表示对 x_1,x_2,t 的偏导. 由 (10) 和 (11) 式可取

$$\begin{aligned}&A_1=-qBx_2,\\&A_2=0,\end{aligned} \tag{12}$$

则系统的 Lagrange 函数为

$$L=\frac{m}{2}(\dot{x}_1^2+\dot{x}_2^2)-\frac{k}{2}(x_1^2+x_2^2)-qBx_2\dot{x}_1. \tag{13}$$

4 守恒量的 Noether 对称性与 Lie 对称性

引进群的无限小变换

$$\begin{aligned}&t^*=t+\varepsilon\tau_\alpha(x_s,\dot{x}_s,t),\\&x_s^*=x_s+\varepsilon\xi_s^\alpha(x_s,\dot{x}_s,t)\quad(\alpha,s=1,2),\end{aligned} \tag{14}$$

其中 α 代表守恒量的个数, ε 为无限小参数, τ_α, ξ_s^α 为与第 α 个守恒量相应的无限小变换生成元. (14) 式的无限小生成元向量为

$$\boldsymbol{X}^{(0)}=\tau_\alpha\frac{\partial}{\partial t}+\sum_{s=1}^{2}\xi_s^\alpha\frac{\partial}{\partial x_s}, \tag{15}$$

(15) 式的一次扩展为

$$\boldsymbol{X}^{(1)}=\boldsymbol{X}^{(0)}+\sum_{s=1}^{2}(\dot{\xi}_s^\alpha-\dot{x}_s\dot{\tau}_\alpha)\frac{\partial}{\partial \dot{x}_s}, \tag{16}$$

二次扩展为

$$\boldsymbol{X}^{(2)}=\boldsymbol{X}^{(1)}+\sum_{s=1}^{2}(\ddot{\xi}_s^\alpha-\dot{x}_s\ddot{\tau}_\alpha-2\ddot{x}_s\dot{\tau}_\alpha)\frac{\partial}{\partial \ddot{x}_s}. \tag{17}$$

根据 Noether 逆定理可确定与守恒量相应的无限小变换的生成元 [1].

$$\xi_s^\alpha=\tau_\alpha\dot{x}_s+\tilde{h}_{sk}\frac{\partial I_\alpha}{\partial \dot{x}_k}\quad(k,\alpha=1,2), \tag{18}$$

$$\tau_\alpha=\frac{1}{L}\Big[I_\alpha-\sum_{s=1}^{2}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_s}(\xi_s^\alpha-\dot{x}_s\tau_\alpha)-G_\alpha\Big]\quad(\alpha=1,2), \tag{19}$$

其中的 $\tilde{h}_{sk}$ 为 Hess 逆矩阵的各元素, G_α 为规范函数, 且满足结构方程

$$L\dot{\tau}_\alpha+\boldsymbol{X}^{(1)}(L)+\dot{G}_\alpha=0. \tag{20}$$

将守恒量 (2a), (2b) 式及 Lagrange 函数 (13) 式分别代入 (18), (19) 和 (20) 式, 得到与两个守恒量 I_1, I_2 相应的无限小变换的生成元和规范函数.

$$\tau_1=-1, \xi_1^1=\xi_2^1=0, G_1=0, \tag{21}$$

$$\tau_2=-1, \xi_1^2=x_2, \xi_2^2=-x_1, G_2=\frac{qB}{2}(x_2^2-x_1^2), \tag{22}$$

即与守恒量 I_1, I_2 相应的变换是 Noether 对称变换.

下面讨论守恒量的 Lie 对称性. 为方便起见, 将运动微分方程 (1a), (1b) 式改写为

$$\ddot{x}_1=-ax_1+b\dot{x}_2=g_1, \tag{23a}$$

$$\ddot{x}_2=-ax_2-b\dot{x}_1=g_2, \tag{23b}$$

其中 $a=\dfrac{k}{m}, b=\dfrac{qB}{m}$ 为常数. 可以验证, 无限小变换的生成元 (21), (22) 式均满足如下 Lie 对称性确定方程:

$$\ddot{\xi}_s^{\alpha}-\dot{x}_s\ddot{\tau}_{\alpha}-2\dot{\tau}_{\alpha}g_s=\boldsymbol{X}^{(1)}(g_s)\ \ (\alpha, s=1,2), \tag{24}$$

其中 g_s 为 (23) 式中的广义加速度, 则说明与守恒量相应的无限小变换也是 Lie 对称变换.

5 系统的运动学方程

系统的运动微分方程 (23) 式是相互耦合的二阶线性微分方程组, 其解可表示为

$$\begin{aligned}x_1=&A_1\cos\omega_1 t+B_1\sin\omega_1 t\\&+C_1\cos\omega_2 t+D_1\sin\omega_2 t,\end{aligned} \tag{25a}$$

$$\begin{aligned}x_2=&A_2\cos\omega_1 t+B_2\sin\omega_1 t\\&+C_2\cos\omega_2 t+D_2\sin\omega_2 t.\end{aligned} \tag{25b}$$

将 (25) 式代回 (23) 式, 可解得

$$\omega_1=\frac{\sqrt{b^2+4a}-b}{2}, \omega_2=\frac{\sqrt{b^2+4a}+b}{2}, \tag{26}$$

$$A_2=-B_1, B_2=A_1, C_2=D_1, D_2=-C_1. \tag{27}$$

将 (27) 式代入 (25) 式, 则系统的运动学方程为

$$\begin{aligned}x_1=&A_1\cos\omega_1 t+B_1\sin\omega_1 t\\&+C_1\cos\omega_2 t+D_1\sin\omega_2 t,\end{aligned} \tag{28a}$$

$$\begin{aligned}x_2=&-B_1\cos\omega_1 t+A_1\sin\omega_1 t\\&+D_1\cos\omega_2 t-C_1\sin\omega_2 t.\end{aligned} \tag{28b}$$

其中 A_1, B_1, C_1, D_1 为常数, 由初始条件 $x_{10}, x_{20}, \dot{x}_{10}, \dot{x}_{20}$ 决定.

$$A_1=\frac{\omega_2 x_{10}+\dot{x}_{20}}{\omega_1+\omega_2}, B_1=\frac{\dot{x}_{10}-\omega_2 x_{20}}{\omega_1+\omega_2},$$

$$C_1=\frac{\omega_1 x_{10}-\dot{x}_{20}}{\omega_1+\omega_2}, D_1=\frac{\dot{x}_{10}+\omega_1 x_{20}}{\omega_1+\omega_2}, \tag{29}$$

由于 $\omega_1\neq\omega_2$, 且 ω_1, ω_2 均为无理数, 故二维各向同性带电谐振子的运动轨迹不可能闭合.

特别地, 当不受磁场作用时, $B=0$, 即 $b=0$, 则 (26) 式简化为

$$\omega_1=\omega_2=\omega=\sqrt{a}=\sqrt{\frac{k}{m}}, \tag{30}$$

同时, (29) 式简化为

$$\begin{aligned}A_1=\frac{\omega x_{10}+\dot{x}_{20}}{2\omega},\ \ B_1=\frac{\dot{x}_{10}-\omega x_{20}}{2\omega},\\ C_1=\frac{\omega x_{10}-\dot{x}_{20}}{2\omega},\ \ D_1=\frac{\dot{x}_{10}+\omega x_{20}}{2\omega},\end{aligned} \tag{31}$$

将 (30), (31) 式代入 (28) 式得

$$\begin{aligned}x_1&=x_{10}\cos\omega t+\frac{\dot{x}_{10}}{\omega}\sin\omega t\\&=E_1\sin(\omega t+\phi_1),\end{aligned} \tag{32a}$$

$$\begin{aligned}x_2&=x_{20}\cos\omega t+\frac{\dot{x}_{20}}{\omega}\sin\omega t\\&=E_2\sin(\omega t+\phi_2),\end{aligned} \tag{32b}$$

其中 E_1, E_2 为振幅, ϕ_1, ϕ_2 为初相, 由初始条件 x_{10}, x_{20}, $\dot{x}_{10}$, $\dot{x}_{20}$ 确定. 很显然, 当不受磁场作用时, 解 (28) 式退化为解 (32) 式, 二维各向同性带电谐振子退化为一般的二维各向同性谐振子.

6 结 论

本文由牛顿第二定律直接写出二维各向同性带电谐振子在均匀磁场中运动的运动微分方程, 所得方程是两个相互耦合的二阶线性微分方程组. 通过对微分方程组简单的运算, 用直接积分的方法得到了系统的两个独立积分 (守恒量). 再利用 Legendre 变换建立守恒量与 Lagrange 函数间的关系, 从而求得了系统的 Lagrange 函数. 利用 Noether 逆定理求得与守恒量相应的无限小变换的生成元, 结果表明, 与守恒量相应的无限小变换既是 Noether 对称变换, 又是 Lie 对称变换. 最后求得了系统的运动学方程, 并对运动学方程做了适当的讨论. 事实上, 许多典型力学系统的运动微分方程比其 Lagrange 函数更容易求得, 本文所用的由运动微分方程直接求守恒量、Lagrange 函数及系统的运动学方程的方法, 将研究守恒量与对称性的理论推广应用于研究实际的力学系统, 对于研究一些典型力学系统十分有效.

[1] Mei F X 1999 *Applications of Lie Groups and Lie Algebras to Constrained Mechanical Systems*(Beijing: Science Press) p103, p303 (in Chinese) [梅凤翔 1999 李群和李代数对约束力学系统的应用 (北京: 科学出版社) 第 103 页, 第 303 页]

[2] Dong W S, Wang B X, Fang J H 2011 *Chin. Phys.* B **20** 010204

[3] Chen R, Xu X J 2012 *Chin. Phys.* B **21** 094510

[4] Fang J H 2010 *Chin. Phys.* B **19** 040301

[5] Wang X X, Han Y L, Zhang M L, Jia L Q 2013 *Chin. Phys.* B **22** 020201

[6] Xie Y L, Jia L Q, Luo S K 2011 *Chin. Phys.* B **20** 010203

[7] Jiang W A, Luo S K 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 060201 (in Chinese) [姜文安, 罗绍凯 2011 物理学报 **60** 060201]

[8] Han Y L, Sun X T, Zhang Y Y, Jia L Q 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 160201 (in Chinese) [韩月林, 孙现亭, 张耀宇, 贾利群 2013 物理学报 **62** 160201]

[9] Fang J H , Ding N, Wang P 2007 *Chin.Phys.* **16** 887

[10] Kaushal R S, Gupta S 2001 *J. Phys.* A: *Math. Gen.* **34** 9879

[11] Kaushal R S, Parashar D, Gupta S 1997 *Ann. Phys.* **259** 233

[12] Lou Z M 2007 *Chin. Phys.* **16** 1182

[13] Lou Z M 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 2475 (in Chinese) [楼智美 2007 物理学报 **56** 2475]

[14] Haas F, Goedert J 1996 *J. Phys.* A: *Math. Gen.* **29** 4083

[15] Lou Z M 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 1969 (in Chinese) [楼智美 2005 物理学报 **54** 1969]

[16] Lou Z M 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 1460 (in Chinese) [楼智美 2005 物理学报 **54** 1460]

[17] Prelle M J , Singer M F 1983 *Trans. Amer. Math. Soc.* **279** 215

[18] Chandrasekar V K, Senthilvelan M , Lakshmanan M 2006 *J. Phys.* A: *Math.Gen.* **39** L69

[19] Lou Z M 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 719 (in Chinese) [楼智美 2010 物理学报 **59** 719]

[20] Ding G T 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 064502 (in Chinese) [丁光涛 2013 物理学报 **62** 064502]

[21] Ding G T 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 064501 (in Chinese) [丁光涛 2013 物理学报 **62** 064501]

[22] López G 1996 *Ann. Phys.* **251** 363

The study of conserved quantities and symmetries for two-dimensional isotropic harmonic charged oscillator moving in homogeneous magnetic field*

Lou Zhi-Mei†

(*Department of Physics, Shaoxing University, Shaoxing* 312000*, China*)

(Received 26 July 2013; revised manuscript received 17 August 2013)

Abstract

The kinematic differentiation equations of two-dimensional isotropic harmonic charged oscillator moving in a homogeneous magnetic are obtained by using Newton's second law. Two integrals (conserved quantities) are obtained by directly integrating the kinematic differentiation equations. The relationship between the Lagrangian and the conserved quantity is established through the Legendre transformation, thereby obtaining a Lagrangian function of the system. The Noether symmetry and Lie symmetry of the infinitesimal transformations corresponding to the conserved quantities are studied. Finally, the kinematical equations of the system are obtained.

Keywords: two-dimensional isotropic harmonic charged oscillator, conserved quantities, Noether symmetries, Lie symmetries

PACS: 02.30.Hq, 11.30.−j **DOI:** 10.7498/aps.62.220201

* Project supported by the Key Program of the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 10932002)

† Corresponding author. E-mail: louzhimei@usx.edu.cn