

## 一维倾斜场伊辛模型中的纠缠特性\*

王琪 王晓茜†

(长春理工大学理学院, 长春 130022)

(2013年6月11日收到; 2013年8月14日收到修改稿)

在一维倾斜场伊辛模型中, 利用并发度和  $Q$  测量函数分别对系统的两体纠缠和整体纠缠进行度量, 通过讨论系统中量子纠缠的动力学特性, 能够体现出系统的可积和不可积行为. 由系统基态的纠缠特性可以发现只要倾角不为零时, 系统的  $Q$  测量函数会随着磁场的增大而减少, 而用并发度刻画的系统的相变特性, 随着磁场倾角的增大发生了变化. 考虑系统的动力学行为发现, 在一维倾斜场伊辛模型中, 不可积性会抑制两体纠缠, 却促进系统整体纠缠生成.

**关键词:** 伊辛模型, 不可积性, 两体纠缠, 整体纠缠

**PACS:** 03.65.Ud, 03.67.Mn, 42.50.Dv

**DOI:** 10.7498/aps.62.220301

## 1 引言

近些年来, 由于量子纠缠在量子计算、稠密编码和量子隐形传态等技术中起到关键作用, 所以量子纠缠的确切量子力学特性备受关注. 量子纠缠被认为是量子通信和量子计算的关键物理资源.

最近的一些研究发现, 系统的可积性和不可积性对系统的两体纠缠和整体纠缠有着微妙的影响. 开始对不可积体系中的多体纠缠的研究用 Harper 模型<sup>[1-3]</sup>, 而随后的工作则用到量子 baker 映射<sup>[4]</sup>、Frenkel-Kontorova 模型<sup>[5]</sup> 和 无序自旋链<sup>[6]</sup> (disordered spin chains). 而后 Lakshminarayan 和 Subrahmanyam<sup>[7]</sup> 利用受激伊辛模型讨论了系统的可积性和不可积性对两体纠缠及整体纠缠的影响, 结果表明系统的不可积性促进整体纠缠生成, 不可积性还会使平均纠缠度增大. 近期另外的一些研究讨论了 Dicke 模型经典相空间与量子动力学演化之间的关系, 由体系的整体纠缠动力学特性, 发现可以更好地揭示相空间的混沌和规则结构<sup>[8]</sup>. Wang 等<sup>[9,10]</sup> 研究了 QKT (quantum kicked top) 模型中量子混沌对自旋压缩和量子纠缠的影响. 伊辛

模型作为最简单的海森堡模型<sup>[11,12]</sup>, 是一个简单而且现实的固态系统, 这种模型可以十分理想地制备和控制量子纠缠. 对伊辛模型中量子纠缠特性的研究将会有效推动量子计算机的研究和量子信息科学的发展.

基于上面的分析, 本文利用一维倾斜场伊辛模型来对量子纠缠特性进行研究<sup>[13]</sup>. 并发度 (concurrence)<sup>[14]</sup> 和  $Q$  测量函数 ( $Q$  measure)<sup>[15]</sup> 分别是两种不同的纠缠的度量方法. 前者是 1998 年由 Wootters 首次提出的, 并发度很好地度量了系统的两体纠缠, 而后者是 2002 年由 Meyer 和 Wallach 定义的, 可以对系统整体纠缠进行度量. 本文讨论了从可积到不可积范围内自旋链中的两体纠缠和整体纠缠特性, 但是对于系统的两体纠缠只涉及近邻自旋之间的相互作用, 同时这些相互作用是平移不变的. 并且了解到在一维倾斜场伊辛模型中, 不可积性会抑制两体纠缠, 但却能促进系统整体纠缠生成. 不可否认的是, 对纠缠的整体度量只是最近才开始探索, 而且似乎在多体量子态情况下, 不同形式纠缠的度量应该用到不同的方法, 这些情况都需要更进一步的阐明.

\* 国家自然科学基金 (批准号: 11247260, 11305020) 资助的课题.

† 通讯作者. E-mail: xqwang21@163.com

## 2 并发度和 $Q$ 测量函数

1998 年由 Wootters 首次提出并发度来描述两体量子体系的纠缠,也是目前刻画两体纠缠最好的度量方法<sup>[14]</sup>. 首先,根据两量子比特混合态密度矩阵  $\rho_{i,j}$  构建一个自旋翻转矩阵

$$\tilde{\rho}_{i,j} = (\sigma_y \otimes \sigma_y) \rho_{i,j}^* (\sigma_y \otimes \sigma_y), \quad (1)$$

其中  $\rho_{i,j}^*$  是密度矩阵  $\rho_{i,j}$  的复共轭. 进而我们可以得到关于密度矩阵  $\rho_{i,j}$  的厄米矩阵  $R = \sqrt{\sqrt{\rho_{i,j}} \tilde{\rho}_{i,j} \sqrt{\rho_{i,j}}}$ , 将厄米矩阵  $R$  的本征值按降序排列, 有  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq \lambda_4$ , 于是体系的并发度可以写为

$$C(\rho_{i,j}) = \max\{0, \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4\}, \quad (2)$$

当  $C = 0$  时, 系统没有两体纠缠; 当  $C > 0$  时, 系统存在两体纠缠.

2002 年 5 月, Meyer 和 Wallach 定义了  $Q$  测量函数来对整体纠缠进行几何度量, 并且讨论了  $Q$  测量函数的相关性质.  $Q$  测量函数定义如下<sup>[15,16]</sup>:

$$Q(\psi) \equiv \frac{4}{n} \sum_{j=1}^n D(t_j(0)\psi, t_j(1)\psi). \quad (3)$$

2003 年, Brennen<sup>[17]</sup> 将 Meyer-Wallach  $Q$  测量函数做了进一步的推广, 得出如下形式:

$$Q(\psi) = 2 \left( 1 - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \text{tr} \rho_k^2 \right), \quad (4)$$

其中  $\rho_k$  是对除第  $k$  个量子比特外的所有量子比特进行部分求迹后的约化密度矩阵. 表征整体纠缠的  $Q$  测量函数的取值范围为  $0 \leq Q \leq 1$ , 当且仅当  $|\psi\rangle$  为乘积态 (product state) 时  $Q$  测量函数为 0. 当  $Q$  测量函数等于 1 时, 说明系统中单个量子比特与剩余量子比特间的整体纠缠最大<sup>[18]</sup>.

## 3 一维倾斜场伊辛模型

如图 1 所示, 本文考虑  $L$  个自旋为  $1/2$  的一维倾斜场伊辛模型<sup>[13]</sup>, 我们考虑  $x$ - $z$  平面内的倾斜磁场, 其哈密顿量可以写为

$$H = J \sum_{n=1}^L \sigma_n^x \sigma_{n+1}^x + B \sum_{n=1}^L [\sin(\theta) \sigma_n^z + \cos(\theta) \sigma_n^x], \quad (5)$$

其中  $J$  为自旋耦合系数,  $B$  为外加磁场,  $L$  为系统的自旋粒子数,  $\theta$  决定外场方向,  $\sigma_n^x$  和  $\sigma_n^z$  是 Pauli 矩阵. 这里对于自旋链, 采用周期边界条件, 即  $\sigma_{L+1}^i = \sigma_1^i (i = x, z)$ . 当  $\theta = 0$  时, 外加磁场方向与自旋方向相同, 此时模型是可积的<sup>[13]</sup>, 并且系统能级是高度简并的. 当  $\theta = 90^\circ$  时, 外加磁场方向与自旋方向垂直, 称为横场伊辛模型, 此时模型也是可积的, 并且可以利用 Jordan-Wigner 变换<sup>[19,20]</sup> 来对横场伊辛模型进行求解. 当  $0 < \theta < 90^\circ$  时, 模型是不可积的<sup>[13]</sup>. 本文对一维倾斜场伊辛模型在可积情况和不可积情况下的两体纠缠及整体纠缠进行讨论.

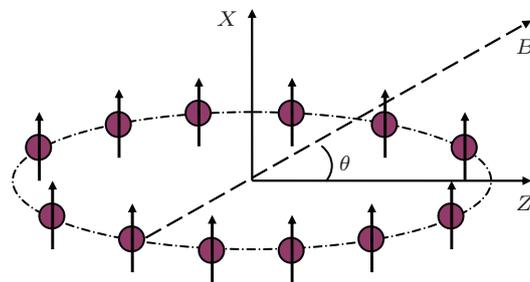


图 1 自旋为  $1/2$  的一维倾斜场伊辛模型, 考虑  $x$ - $z$  平面内的倾斜磁场, 自旋链满足周期边界条件

首先, 我们考虑一维倾斜场伊辛模型基态的纠缠特性. 图 2 中红色虚线描述的是近邻两量子比特之间的纠缠特性, 用并发度来度量, 本文中的并发度考虑的是近邻情况下的两体纠缠, 即两量子比特混合态密度矩阵  $\rho_{i,j}$  可以表示为  $\rho_{i,i+1}$  情况时所对应的并发度; 蓝色实线描述了每个量子比特与剩余量子比特之间的纠缠特性, 用  $Q$  测量函数来度量. 当用并发度来刻画系统的相变情况时, 可以发现, 随着磁场倾角的增大, 对应于发生相变时的磁场强度会减小. 另外,  $Q$  测量函数随着磁场强度的增加由 1 逐渐减小, 最后趋近于 0. 而且还可以发现, 当磁场强度增大到某值后, 并发度会大于  $Q$  测量函数的值, 说明此时系统中的两体纠缠较大, 整体纠缠会随着磁场场强的增大而减小. 图 2 中比较特殊的是磁场倾角  $\theta = 0$  时的情况, 此时磁场方向与粒子自旋方向相同, 而且系统是可积的. 可以看到, 在这种特殊情况下并发度始终为 0, 说明系统中始终不存在两体纠缠. 而  $Q$  测量函数会在磁场强度  $B = 2$  时马上变为 0, 而且在磁场场强  $B > 2$  以后,  $Q$  测量函数会一直为 0, 说明系统中的整体纠缠也会消失.

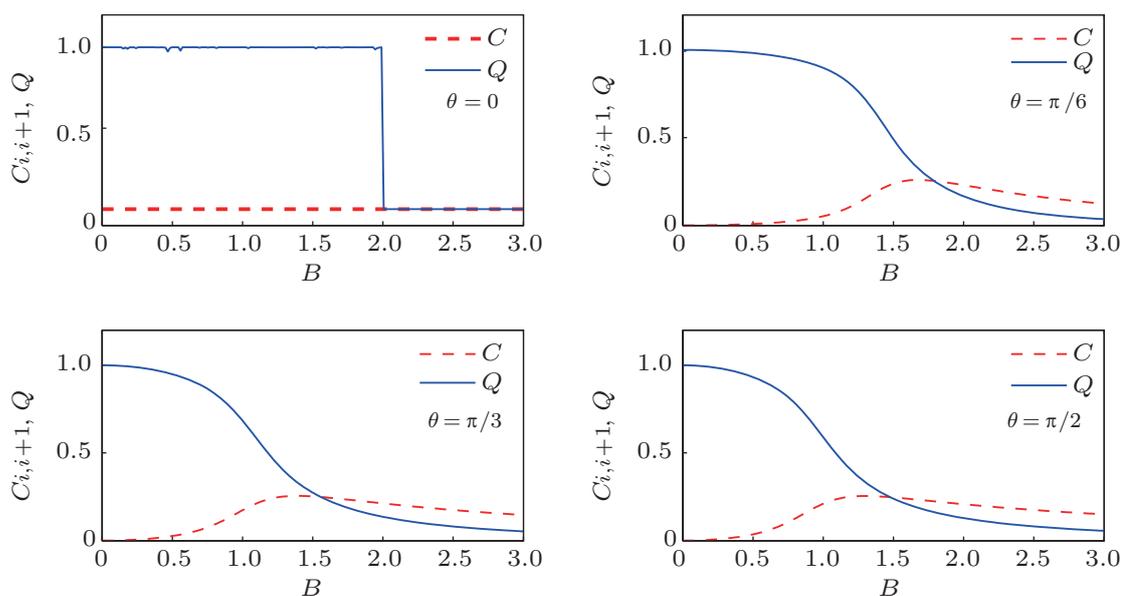


图2 系统基态并发度  $C$  (红色虚线) 和  $Q$  测量函数 (蓝色实线) 与外加磁场  $B$  的关系, 磁场方向分别取  $\theta = 0, \theta = \pi/6, \theta = \pi/3, \theta = \pi/2$ , 耦合系数  $J = 1$ , 系统粒子数  $L = 8$

进一步, 我们研究并发度和  $Q$  测量函数在一维倾斜场伊辛模型中的动力学特性. 选取自旋相干态  $|1\rangle^{\otimes L}$  为系统的初态, 其中  $|1\rangle$  表示粒子自旋向上,  $L$  表示粒子数目. 从而得到初态的时间演化是  $|\psi(t)\rangle = \exp(-iHt)|\psi(0)\rangle$ , 相应的密度矩阵为  $\rho = |\psi(t)\rangle\langle\psi(t)|$ .

在确定耦合系数  $J = 1$ , 磁场场强  $B = 1$  及自旋粒子数目  $L = 8$  的条件下, 我们计算并发度和  $Q$  测量函数的时间演化. 图 3 给出了磁场倾角分别为

$\theta = 0, \theta = \pi/6, \theta = \pi/3, \theta = \pi/2$  情况下并发度的动力学演化曲线. 当磁场倾角为  $\theta = 0$  或  $\theta = \pi/2$  时, 系统是可积的; 当磁场倾角分别为  $\theta = \pi/6$  和  $\theta = \pi/3$  时系统是不可积的. 由图 3 可以发现, 在不可积情况下, 并发度在最初得到最大值后会迅速减小直至为零, 此时系统没有两体纠缠. 并且可以发现, 系统处在不可积情况下, 系统会长时间没有两体纠缠. 而当系统可积时, 一般情况下具有两体纠缠, 只有很短的时间内没有两体纠缠.

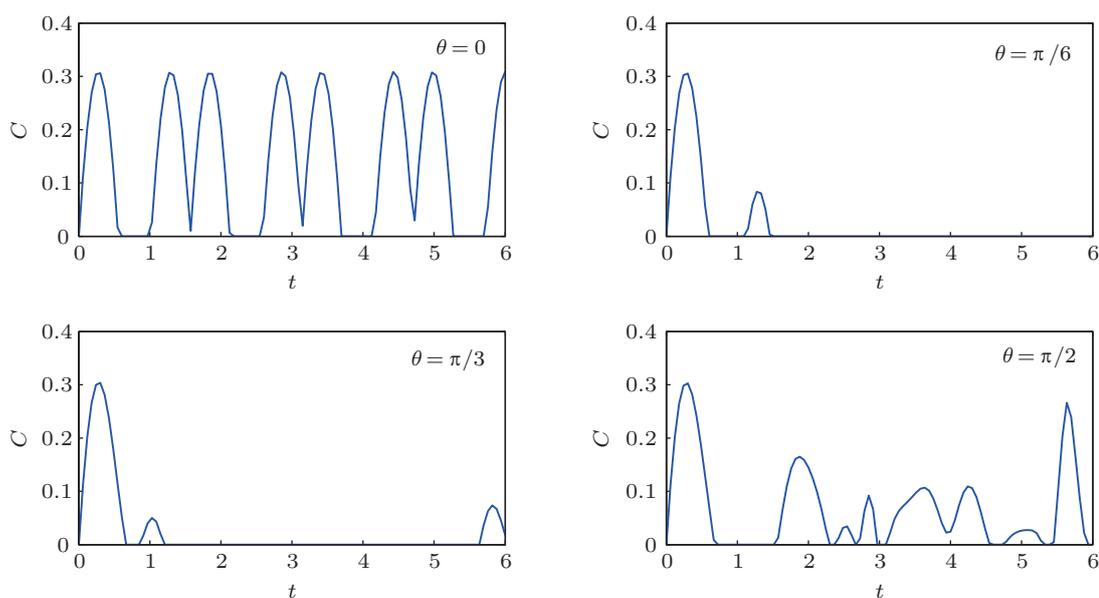


图3 磁场倾斜角度不同情况下, 并发度随时间的动力学演化曲线 系统参数取值分别为  $J = 1, B = 1, L = 8$

图 4 给出了磁场倾角分别为  $\theta = 0, \theta = \pi/6, \theta = \pi/3, \theta = \pi/2$  情况下  $Q$  测量函数的动力学演化曲线. 同样, 当磁场倾角为  $\theta = 0$  或  $\theta = \pi/2$  时, 系统是可积的; 当磁场倾角分别为  $\theta = \pi/6$  和  $\theta = \pi/3$  时系统是不可积的. 由图可以发现, 在不可积情况下, 由  $Q$  测量函数表征的系统的整体纠缠最初由 0 迅速取得最大值, 而且在随后的演化过程中整体纠

缠的幅度变化不大. 而在系统可积的情况下, 整体纠缠的变化幅度明显比不可积的情况下要大.

对比图 3 和图 4 可以得到这样的结论: 在系统参数相同的情况下, 并发度为 0 或较小时, 系统的整体纠缠通常都处在较大值. 并且可以说明在一维倾斜场伊辛模型中, 不可积性会抑制两体纠缠, 但却会促进系统整体纠缠生成.

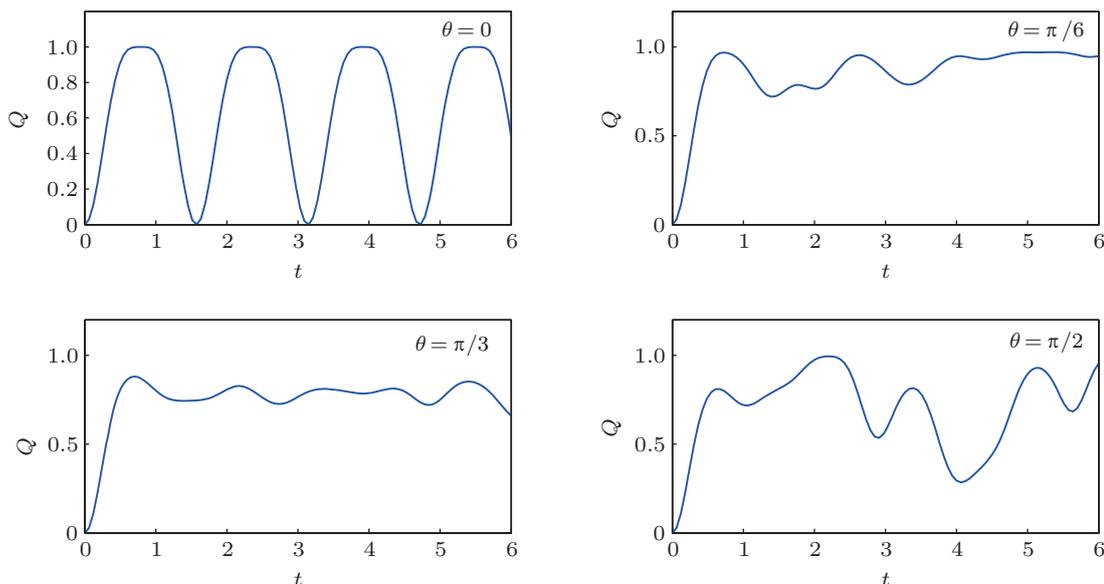


图 4 磁场倾斜角度不同情况下,  $Q$  测量函数随时间的动力学演化曲线 系统参数取值分别为  $J = 1, B = 1, L = 8$

图 5 和图 6 更全面地考虑了磁场倾角和磁场场强对并发度及  $Q$  测量函数的影响, 并且可以看出在足够长的时间内平均值的稳定性变化. 这里考虑粒子数  $L = 8$  (更多自旋粒子数目时与 8 自旋粒子情况本质上是相同的), 耦合系数  $J = 1$  时, 200 次时间演化过程. 由图 5 可以看到, 当取磁场场强  $B = 1$  时, 随着磁场倾角的增大, 最初系统并发度的时间平均值有极小的增加, 而后迅速减小, 在减小到一定值后, 并发度的时间平均值又有了极小幅度的增加, 并且在磁场倾角为  $\theta = \pi/2$  时, 并发度的时间平均值取到了一个较大值. 当取磁场场强  $B = 2$  时, 随着磁场倾角的增大, 最初系统并发度的时间平均值迅速减小, 减小到一定值后又开始震荡增大, 在磁场倾角为  $\theta = \pi/2$  时, 系统并发度的时间平均值取到了最大值. 由图 6 可以看到, 在磁场强度不变的情况下, 随着磁场倾角的增大,  $Q$  测量函数的时间平均值会先增大而后又减小. 而磁场场强  $B = 2$

的情况下,  $Q$  测量函数的时间平均值的增大和减小的幅度都大于磁场场强  $B = 1$  的情况. 最后可以知道, 系统的不可积性使  $Q$  测量函数的时间平均值增大, 相反会使并发度的时间平均值减小. 同样说明了在一维倾斜场伊辛模型中, 不可积性会抑制两体纠缠, 而相反会促进系统整体纠缠生成.

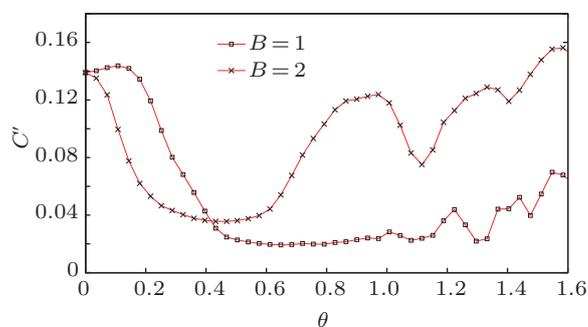


图 5 磁场强度分别为  $B = 1, B = 2$  时, 系统并发度的时间平均值随磁场倾斜角度变化的演化曲线, 参量取值分别为  $J = 1, L = 8$

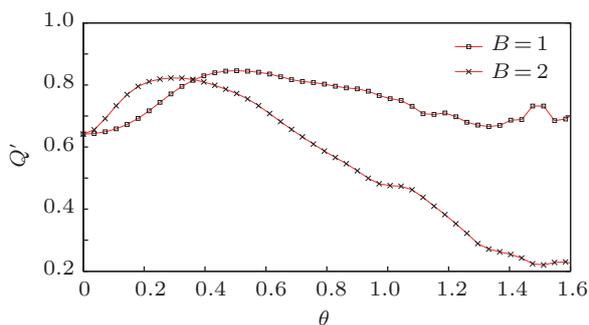


图6 磁场强度分别为  $B=1$ ,  $B=2$  时, 系统  $Q$  测量函数的时间平均值随磁场倾斜角度变化的演化曲线, 参量取值分别为  $J=1$ ,  $L=8$

## 4 结论

本文对一维倾斜场伊辛模型中的量子纠缠特性进行了讨论, 运用了并发度和  $Q$  测量函数对系统的两体纠缠和整体纠缠进行度量.

1) 由系统基态的纠缠特性曲线发现, 随着磁场倾角的增大, 并发度所刻画的系统相变情况发生变化. 随着磁场强度的增大,  $Q$  测量函数由最大值 1 逐渐减小, 随后会趋近于 0; 并发度由 0 先增大后减

小. 在磁场倾角为 0 时, 情况比较特殊, 系统始终不存在两体纠缠, 而  $Q$  测量函数会在磁场场强  $B=2$  时突然由最大值 1 变为 0, 说明系统的整体纠缠也消失了.

2) 选取自旋相干态  $|1\rangle^{\otimes L}$  为系统的初态, 得到初态的时间演化 (模型中参数分别取耦合系数  $J=1$ , 外场场强  $B=1$  及粒子数目  $L=8$ ). 可以发现在一维倾斜场伊辛模型中, 不可积性会抑制两体纠缠, 但却会促进系统整体纠缠生成.

3) 在一维倾斜场伊辛模型中, 考虑并发度和  $Q$  测量函数的时间平均值随磁场倾角的演化曲线, 进一步说明了不可积性会抑制两体纠缠, 但却会促进系统整体纠缠生成.

今后以一维倾斜场伊辛模型为基础还有很多有意义的问题可以考虑, 我们可以考察系统的不可积性对非近邻两体纠缠的影响, 或系统的不可积性对量子关联的影响. 还可以考虑其他种类多体纠缠的情况, 例如真实多体纠缠<sup>[21-23]</sup>(genuine multipartite entanglement).

- [1] Lakshminarayan A, Subrahmanyam V 2003 *Phys. Rev. A* **67** 052304
- [2] Gu B J, Ye B, Xu W B 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 695 (in Chinese) [顾斌杰, 叶宾, 须文波 2008 物理学报 **57** 695]
- [3] Ye B, Gu R J, Xu W B 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 3718 (in Chinese) [叶宾, 谷瑞军, 须文波 2007 物理学报 **56** 3718]
- [4] Scott A J, Caves C 2003 *J. Phys. A* **36** 9553
- [5] Wang X, Ghose S, Sanders B C, Hu B 2004 *Phys. Rev. E* **70** 016217
- [6] Santos L F, Rigolin G, Escobar C O 2004 *Phys. Rev. A* **69** 042304
- [7] Lakshminarayan A, Subrahmanyam V 2005 *Phys. Rev. A* **71** 062334
- [8] Song L J, Yan D, Gai Y J, Wang Y B 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 020302 (in Chinese) [宋立军, 严冬, 盖永杰, 王玉波 2011 物理学报 **60** 020302]
- [9] Wang X Q, Ma J, Zhang X H, Wang X G 2011 *Chin. Phys. B* **20** 050510
- [10] Wang X Q, Ma J, Song L J, Zhang X H, Wang X G 2010 *Phys. Rev. E* **82** 056205
- [11] Qin M 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 2216 (in Chinese) [秦猛 2010 物理学报 **59** 2216]
- [12] Yang Y, Wang A M 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 130305 (in Chinese) [杨阳, 王安民 2013 物理学报 **62** 130305]
- [13] Karthik J, Sharma A, Lakshminarayan A 2007 *Phys. Rev. A* **75** 022304
- [14] Wootters W K 1998 *Phys. Rev. Lett.* **80** 2245
- [15] Meyer D A, Wallach N R 2002 *J. Math. Phys.* **43** 4273
- [16] Scott A J 2004 *Phys. Rev. A* **69** 052330
- [17] Brennen G K 2003 *Quantum Information and Computation* (Vol. 3) (Berlin: Springer) pp619-626
- [18] Castro C S, Sarandy M S 2011 *Phys. Rev. A* **83** 042334
- [19] Jordan P, Wigner E 1928 *Z. Phys.* **47** 631
- [20] Sachdev S 1999 *Quantum Phase Transitions* (London: Cambridge University Press) p46
- [21] Ma Z H, Chen Z H, Chen J L 2011 *Phys. Rev. A* **83** 062325
- [22] Chen J L, Deng D L, Su H Y, Wu C F, Oh C H 2011 *Phys. Rev. A* **83** 022316
- [23] Deng D L, Gu S J, Chen J L 2010 *Annals Phys.* **325** 367

# Properties of entanglement in one-dimensional Ising model with a tilted magnetic field\*

Wang Qi Wang Xiao-Qian<sup>†</sup>

(School of Science, Changchun University of Science and Technology, Changchun 130022, China)

(Received 11 June 2013; revised manuscript received 14 August 2013)

## Abstract

We study the entanglement properties in a one-dimensional Ising chain with a tilted magnetic field that is capable of showing both integrable and nonintegrable behaviors. Here the pairwise entanglement is characterized by concurrence and the multipartite entanglement is characterized by the  $Q$  measure. According to the entanglement properties of the ground state in the Ising mode, which have tilt angle, we can find that the  $Q$  measure decreases with the increasing of the strength of external field. And the phase transition property of the system is changed with the increase of tilt angle for the external magnetic field. We also consider the evolution of entanglement in this model, and find that the nonintegrability can suppress the pairwise entanglement but promotes the multipartite entanglement with the integrable system.

**Keywords:** Ising model, nonintegrability, pairwise entanglement, multipartite entanglement

**PACS:** 03.65.Ud, 03.67.Mn, 42.50.Dv

**DOI:** 10.7498/aps.62.220301

---

\* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 11247260, 11305020).

<sup>†</sup> Corresponding author. E-mail: xqwang21@163.com