

# 一类高聚类系数的加权无标度网络 及其同步能力分析\*

王丹<sup>†</sup> 郝彬彬

(沈阳大学, 装备制造综合自动化重点实验室, 沈阳 110044)

(2013年6月17日收到; 2013年8月15日收到修改稿)

针对真实世界中大规模网络都具有明显聚类效应的特点, 提出一类具有高聚类系数的加权无标度网络演化模型, 该模型同时考虑了优先连接、三角结构、随机连接和社团结构等四种演化机制. 在模型演化规则中, 以概率  $p$  增加单个节点, 以概率  $1-p$  增加一个社团. 与以往研究的不同在于新边的建立, 以概率  $\phi$  在旧节点之间进行三角连接, 以概率  $1-\phi$  进行随机连接. 仿真分析表明, 所提出的网络度、强度和权值分布都是服从幂律分布的形式, 且具有高聚类系数的特性, 聚类系数的提高与社团结构和随机连接机制有直接的关系. 最后通过数值仿真分析了网络演化机制对同步动态特性的影响, 数值仿真结果表明, 网络的平均聚类系数越小, 网络的同步能力越强.

**关键词:** 无标度网络, 加权网络, 聚类系数, 同步能力

**PACS:** 05.45.Xt, 89.75.Fb, 05.90.+m, 02.50.-r

**DOI:** 10.7498/aps.62.220506

## 1 引言

自从小世界现象<sup>[1]</sup>和无标度属性<sup>[2]</sup>被发现以来, 学者们越发认识到复杂网络中所隐藏的通用机制对网络功能的认识是至关重要的. 近年来研究复杂网络上发生的各种动态机制与网络结构特性的关系已经成为研究热点问题, 其中一个有趣的也是重要的复杂网络动力学现象就是网络中节点的同步行为<sup>[3-6]</sup>. 同步是科学和技术中的一个普遍现象, 它可以解释许多自然现象, 如萤火虫一齐闪烁, 心脏细胞有节奏的跳动<sup>[7]</sup>.

之前对复杂网络同步的能力研究主要集中在无权的无标度网络模型上<sup>[8-10]</sup>. 但最近通过对越来越多的真实世界的研究发现, 很多实际网络节点之间的边往往包含着重要的信息特征. 例如, 在航空网络中, 不同型号飞机运载旅客数量的差异; 在城市交通网络中, 城市的主干道在交通网络里的重要性要远大于一般的三四级公路; 在因特网络中, 路由器之间传输能力的差别; 海洋运输网络中, 两

个港口之间通航船舶数量的差异等. 此时, 无权网络就有了局限性, 这就需要通过加权网络给节点与节点之间赋予一定的权值来刻画它们之间相互作用强度的不同.

鉴于加权网络在现实世界存在的普遍性, 学者们陆续提出了一些加权网络模型<sup>[11-14]</sup>. Yook, Jeong, Barabási 和 Tu 提出的 YJBT 模型<sup>[11]</sup>以及 Zheng, Trimper, Zheng 和 Hui 提出的 ZTZH 模型<sup>[12]</sup>都是一种权值不变的加权模型. 而 Wang 等提出的 WCSF (weighted competition scale-free) 模型<sup>[13]</sup>是一种权值和节点都随时间不断增加的加权模型. 该网络模型在现实中有其典型的例子, 如图书租借网络和演员合作网络. 此外, 另一种典型的加权网络模型要数由 Barrat, Barthelemy 和 Vespignani 提出的 BBV 模型<sup>[14]</sup>, 该模型研究的是不同权值情况下网络的完全同步现象.

近些年对加权网络同步的研究主要针对的是 BBV 模型. 但是, 在 BBV 以及其他扩展加权模型<sup>[15-17]</sup>中, 新边的建立主要考虑的是新节点与旧节点之间的连接, 而现实网络中, 新边的建立也会

\* 国家自然科学基金青年科学基金(批准号: 61203152)和辽宁省博士科研启动基金(批准号: 20121040)资助的课题.

<sup>†</sup> 通讯作者. E-mail: wangdan0307@126.com

在旧节点之间<sup>[18,19]</sup>. 例如在社会网络中, 某人的两个朋友就更容易相互认识, 这种现象称为“三角结构”; 虽然相距较远, 但彼此因为某些喜好或专长而相互结识成为朋友, 这种现象可称为“随机连接”; 还有些情况, 网络中加入的可以不是单个节点, 而是一个社团, 社团中的某个成员加入到网络中, 就意味着整个社团都成为网络的一个新成员, 这种现象可称为“社团结构”. 本文同时考虑了这几种现象, 基于 BBV 模型提出了除了具有“优先连接”, 还包含“三角结构”、“随机连接”和“社团结构”的加权演化无标度网络模型. 本文通过采用不同的演化机制, 得到的演化网络模型具有不同的结构特性, 而不同的结构特性影响着网络的同步能力, 基于所提出的新的加权演化网络模型, 研究了演化机制与网络同步能力的关系.

## 2 加权无标度网络模型的构建

在 BBV 模型的基础上, 提出一类包含“优先连接”、“三角结构”、“随机连接”和“社团结构”等演化机制的高聚类系数加权无标度网络模型, 该网络的拓扑结构和权值均随时间的变化而不断演化. 模型演化机制如下.

1) 初始网络: 网络初始状态含有  $m_0$  个完全连接的节点. 网络中所有边的初始权值设定为  $w_0 = 1$ .

2) 加入新节点: 按照概率  $p$ , 网络中加入一个新节点  $v$ , 其中  $p \in [0, 1]$ . 每一个新加入的节点  $v$  具有  $m$  条边与网络中已经存在的节点相连. 连接节点的选择按照如下权重优先选择进行, 即一个旧节点  $i$  被选择的概率  $\Pi_{v \rightarrow i}$  为

$$\Pi_{v \rightarrow i} = \frac{s_i}{\sum_l s_l}, \quad s_i = \sum_{j \in \Gamma(i)} w_{ij}, \quad (1)$$

其中,  $s_i$  为节点  $i$  的强度, 这个强度优先选取的连接机制代表了新节点的加入更倾向于与网络中强度大的节点相连接. 每一个新边  $(v, i)$  的初始值设定为  $w_0 = 1$ . 新边的产生会带来网络中局域流量的变化. 简单起见, 这里仅考虑新边  $(v, i)$  的产生会对节点  $i$  与其邻节点  $j \in \Gamma(i)$  之间的权值增加, 按照 (2) 式所示的规则:

$$w_{ij} \rightarrow w_{ij} + \Delta w_{ij} = w_{ij} + \delta \frac{w_{ij}}{s_i}, \quad (2)$$

其中,  $\delta > 0$ .

按照概率  $1 - p$ , 增加一个节点数为  $m_1$  的完全连接的社团. 社团中的一个节点与网络中已存在的  $m$  个节点相连, 其中连接概率按照 (1) 式选择,

局部权值按照 (2) 式更新. 因为所加入的社团是全连接, 所以当其中一个节点被加入到网络后, 其余  $(m_1 - 1)$  个节点也同时被加入到了网络中.

3) 加入新边: 网络加入  $m_2$  条边. 新增加边的两个端点以概率  $\phi$  按照三角机制进行选取<sup>[19]</sup>, 其中  $\phi \in [0, 1]$ ; 以概率  $1 - \phi$  按照随机连接机制进行选取.

通过步骤 1 至 3, 根据平均场方法, 节点  $i$  的度和强度按照下式进行演化:

$$\frac{dk_i}{dt} = mp \frac{S_i(t)}{\sum_l S_l(t)} + (1 - p)m \frac{S_i(t)}{\sum_l S_l(t)} + \phi m_2 P_{TF} + (1 - \phi)m_2 P_{RS}, \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \frac{ds_i}{dt} = & m \frac{S_i(t)}{\sum_l S_l(t)} (1 + \delta) \\ & + m \delta \sum_{j \in \Gamma(i)} \frac{S_j(t)}{\sum_l S_l(t)} \frac{w_{ij}(t)}{S_j} \\ & + m_2 \phi P_{TF} (1 + \sigma) \\ & + m_2 \phi \frac{1}{tm + N_0} c(k_i) 2\sigma + m_2 (1 - \phi) P_{RS} \\ & + m_2 (1 - \phi) P_{RS} \sigma \frac{2}{tm + N_0} \frac{k_i}{(tm + N_0)}, \quad (4) \end{aligned}$$

其中,

$$\begin{aligned} P_{RS} &= \frac{2}{tm + N_0} \left(1 - \frac{k_i}{(tm + N_0)}\right), \\ P_{TF} &= \frac{1}{tm + N_0} (1 - c(k_i)), \\ N_0 &= m_0(m_0 - 1)/2, \\ \sum_l S_l(t) &= 2(m(1 + \delta) + m_2(1 + \sigma))t. \end{aligned}$$

## 3 网络模型演化的仿真结果与分析

许多真实的加权网络的强度和权值都是服从幂律分布的特点. 我们对强度、度和权值的统计性质进行数值模拟, 还包括度和强度之间的相关性. 这些性质已经被认为是描述权重网络最重要的统计性质. 本文主要基于仿真实例, 通过运用统计物理学方法, 在 Matlab 环境下, 研究 1000 个节点的演化网络结构特性, 其中,  $m_0 = m_1 = 4$ ,  $m = 3$ ,  $m_2 = 2$ ,  $\delta = 1$ ,  $\sigma = 1$ . 图中所有数值模拟结果都是网络 50 次生成的平均值.

当  $p = 1$  时, 网络演化过程中仅有节点规模的增长机制, 没有社团结构的增长, 随着  $p$  值的降低, 演化过程中社团结构的增长机制所占的比重越来越大; 当  $p = 0$  时, 对应网络完全按照社团结构增长, 这种情况在真实网络中不太会出现, 本文不予讨论.

图1—3分别研究了  $p$  值对网络的度分布、强度分布、权值分布的影响. 由图1—3可以看出, 当参数  $p$  选取不同值时, 网络的度分布, 强度分布和权值分布均服从幂律分布, 即  $P(k) \sim k^{-\gamma_k}$ ,  $P(s) \sim s^{-\gamma_s}$ ,  $P(w) \sim w^{-\gamma_w}$ . 通过调节  $p$  值, 可以使分布指数  $\gamma$  在 1.8 到 3.3 之间, 而绝大多数的真实网络的分布指数恰好都在这一区域, 这说明该加权网络模型符合实际网络的真实特性.

从图1可以看出, 当  $p$  分别为 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0, 并且  $\phi = 0.8$  时, 度分布幂律指数  $\gamma_k$  分别为 3.06, 2.94, 2.82, 2.65 和 2.44. 从图2可以看出, 当  $p$  分布为 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0 时, 权值幂律指数  $\gamma_s$  分别为 2.40, 2.23, 2.13, 2.03 和 1.86. 幂律指数  $\gamma_k$  和  $\gamma_s$  都是随着  $p$  值的增加而减小. 这表明当网络中社团结构的生长方式所占的比重增加, 网络的幂律指数  $\gamma_k$  和  $\gamma_s$  也增加, 网络的度分布与强度分布的异质性随着社团结构所占的比重增加而变弱, 度和强度大的节点存在的概率减小. 从图3可以看出网络的权值也是服从幂律分布的, 并且权值分布的幂律指数随着网络  $p$  的降低而增大, 类似于强度和度分布的异质性定义, 同样可以得到随着  $p$  的降低网络的权值分布异质性降低, 权值大的边存在的概率减小.

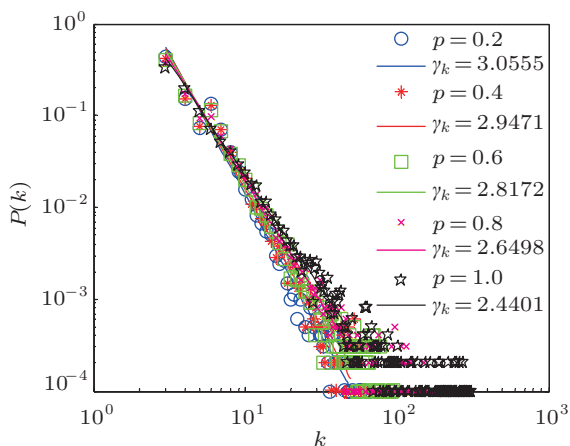


图1 对数坐标下的度分布  $P(k)$  随参数  $p$  变化曲线

接下来我们对社团结构对网络强度  $S(k)$  与度  $k$  之间关系的作用进行分析. 已有的数据表明真实网络中大多数情况下强度  $S(k)$  与度  $k$  的关系服从幂率分布, 两者之间呈现  $S(k) \sim k^\beta$ ,  $\beta > 1$ . 而在原始的 BBV 模型中, 指数  $\beta = 1$ . 图4给出了网络强度和度的关系曲线. 仿真算例显示, 按照本文所提出的演化规则得到的网络指数  $\beta \approx 1.2$ , 符合真实

网络要求, 如航空网络 [20].

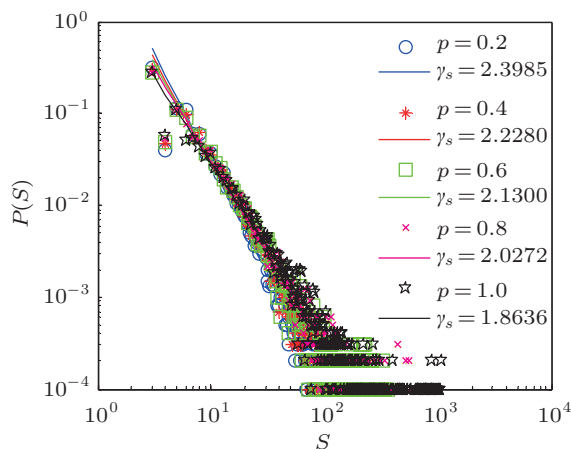


图2 对数坐标下的强度分布  $P(s)$  随参数  $p$  变化曲线

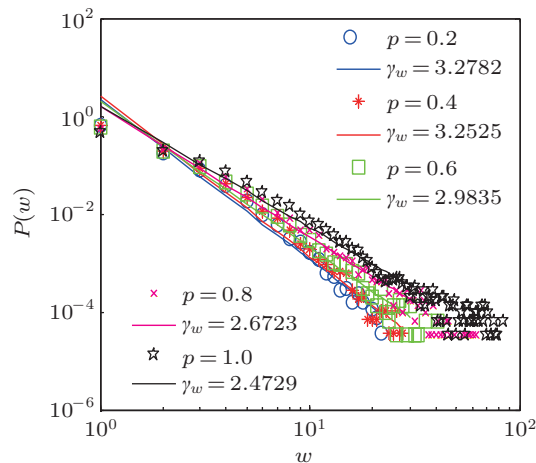


图3 对数坐标下的权值分布  $P(w)$  随参数  $p$  变化曲线

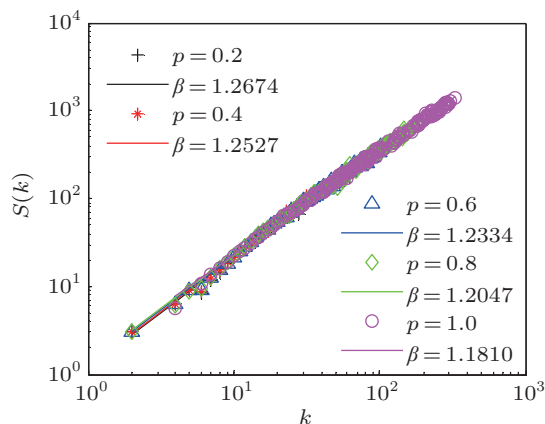


图4 平均强度与度的关系随参数  $p$  变化曲线

当参数  $p$  固定时, 研究网络的三角结构对网络结构的影响, 仿真时选取  $p = 1$ . 当  $\phi = 1$  时, 对应

的  $m_2$  条边均按三角结构加入到网络中来, 当  $\phi = 0$  时,  $m_2$  条边都是按照随机连接的机制加入到网络中来. 分别研究网络的度、强度、权值以及聚类系数等结构特性. 网络规模为 1000 个节点, 参数选取如下,  $m_0 = m_1 = 4, m = 3, m_2 = 2, \delta = 1, \sigma = 1, p = 1$ . 图 5—7 给出了网络在参数  $\phi$  不同时网络的度、强度、权值分布曲线. 仿真显示, 它们均服从幂律分布. 当  $\phi = 1$  时, 网络中没有随机连接机制的影响, 由于三角结构和随机连接共同分配  $m_2$  条权值更新的边, 随机连接的机制是按照网络的强度优先来选取的, 加大了网络度分布的异质性.

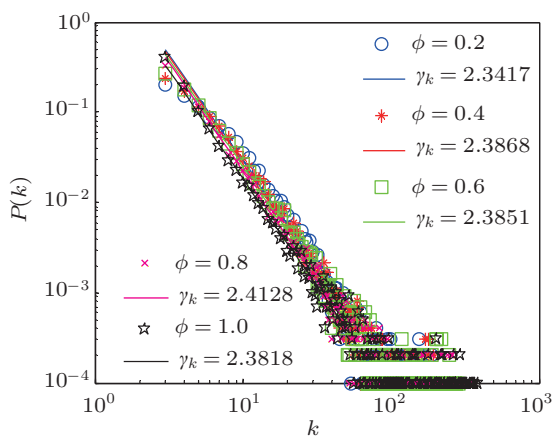


图 5 对数坐标下的度分布  $P(k)$  随参数  $\phi$  变化曲线

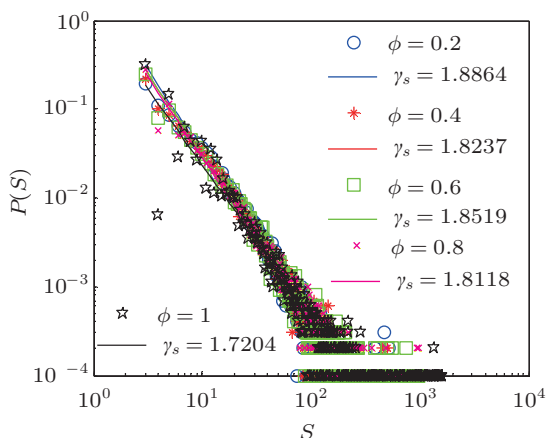


图 6 对数坐标下的强度分布  $P(S)$  随参数  $\phi$  变化曲线

由于以前的网络模型只考虑了优先连接机制, 虽然描述现实网络中“贫者越贫、富者越富”的现象, 但网络模型中的聚类系数都非常小, 例如 BBV 模型, 其聚类系数几乎为 0, 这并不符合真实网络的结构特点. 很多真实网络中小世界现象和无标度特性是同时存在的, 即网络既具有小的平均最短路径

又具有大的平均聚类系数, 同时还服从幂率分布.

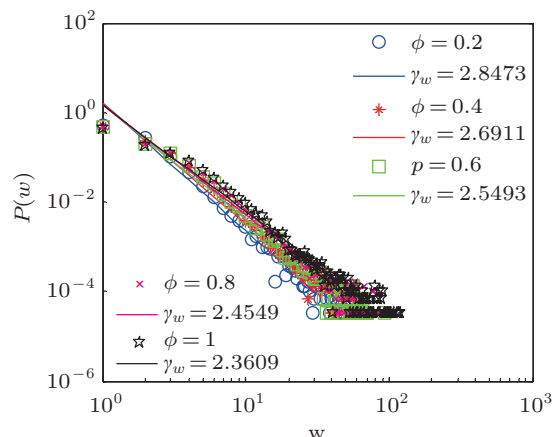


图 7 对数坐标下的权值分布  $P(w)$  随参数  $\phi$  变化曲线

图 8 和图 9 研究了社团结构和三角结构对网络的平均聚类系数的影响, 在参数  $p$  和  $\phi$  取不同值时, 得到平均聚类系数  $C(k)$  与度  $k$  的相关性曲线, 平均聚类系数  $C(k)$  服从网络节点度的幂率分布,

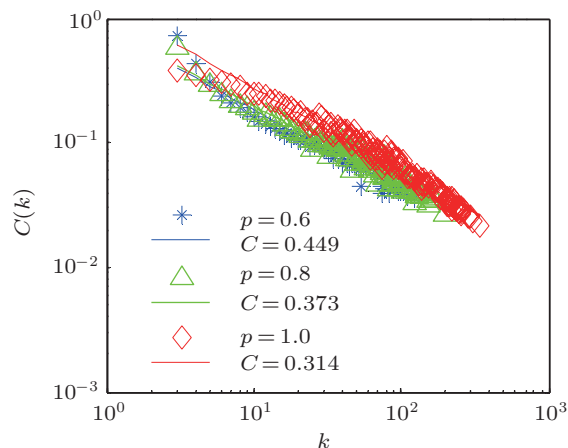


图 8 参数  $p$  不同时  $C(k)$  与  $k$  的关系曲线

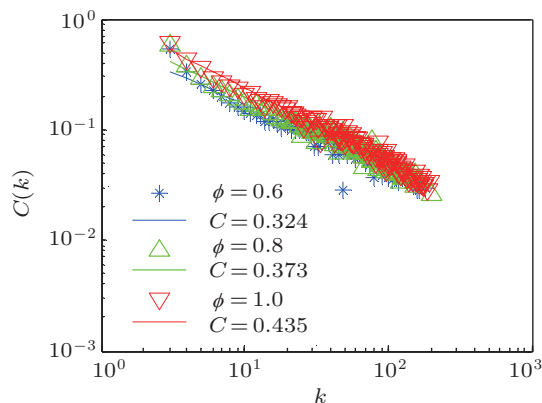


图 9 参数  $\phi$  不同时  $C(k)$  与  $k$  的关系曲线

$C(k) \sim k^{-\gamma}$ . 如图 8 所示, 所选取的参数  $p$  越小, 社团结构所占比重越大, 网络的平均聚类系数也越大, 可以看到当参数  $p = 0.6$  时, 网络的聚类系数已经达到了 0.449. 图 9 所示聚类系数随着网络的  $\phi$  值增加而增加. 当网络其他参数固定, 参数  $\phi = 1$  时, 网络的三角结构所占的比重最大, 网络平均聚类系数最大. 当参数  $\phi = 0, p = 1, m_2 = 0$  时, 网络完全不含三角结构和社团结构的演化机制,  $m_2 = 0$  则随机连接的边也为 0, 此时网络退化为 BBV 网络模型. 当参数  $\phi = 1, p = 1, m_2 = 2$  时, 网络的聚类系数为 0.435. 现实生活中许多大规模网络都具有明显的聚类效应, 尽管它们的聚类系数远小于 1, 但却比  $O(N^{-1})$  要大得多. 例如文献 [21] 中就计算出一个具有 269504 个节点及 1497135 条边的万维网的聚类系数约为 0.29, 而一个具有 10697 个节点及 31992 条边的因特网的聚类系数约为 0.39. 因此, 本文提出的网络模型不仅具有 BBV 网络的无标度特性, 同时也具有高聚类系数, 更加符合真实网络的特征.

#### 4 网络演化机制对同步能力的影响

在网络演化的过程中, 人们需要了解不同的演化机制对网络的结构特性造成什么样的影响, 例如三角结构会造成网络的强度和权值异质性增加, 同时也会使网络的聚类系数增加. 研究演化机制对网络结构的影响, 最终目的是需要理解网络的演化机制对动态特性造成的影响 [22,23]. 这里, 我们研究了网络的演化机制对网络同步能力造成的影响.

同步是指性质完全相同或相近的两个或多个动力系统, 通过系统间的相互作用, 使得在不同的初始条件下各自演化的动力系统其状态逐步接近, 最后达到完全相同的状态, 并保持稳定. 考虑一个由  $N$  个相同的节点构成的连续时间耗散耦合动态网络, 其中第  $i$  个节点的状态方程为 [10]

$$\dot{x}_i = f(x_i) + c \sum_{j=1}^N G_{ij} H(x_j), \quad (5)$$

其中,  $G_{ij}$  按照如下方式定义: 如果节点  $i, j (i \neq j)$  之间存在连接, 则  $G_{ij}$  等于按照本文提出的模型演化规则得到的权值  $w_{ij}$ , 如果节点  $i, j (i \neq j)$  之间不存在连接, 则  $G_{ij} = 0, G_{ii} = - \sum_{j=1, j \neq i}^N G_{ij}$ . 耦合矩阵  $G$  是行零合的, 且  $G$  是半正定的. 据同步化区域的不同情形, 可以把网络 (5) 分为类型 I 和类型 II

网络 [24]. 根据同步判据可以采用耦合矩阵  $G$  的特征值来描述网络同步能力的大小. 对于类型 I 网络, 第二大特征值  $\lambda_2$  越小网络的同步能力越强; 对于类型 II 网络, 特征值比值  $R = \lambda_N / \lambda_2$  越小, 网络的同步能力越强 [24].

采用 Matlab 软件, 对 1000 个节点的耦合动态网络进行仿真, 仿真时选取不同的参数来调节演化机制在网络演化过程中起到的作用. 首先, 研究三角结构和随机连接机制对网络同步能力的影响, 在仿真过程中  $p = 1, m = 3, \phi = 0$  时, 网络完全没有三角结构演化方式, 全部是随机连接的形式对旧节点之间的边进行更新. 当  $\phi = 1$  时, 网络旧节点之间边的更新完全按照三角结构进行, 没有随机连接的形式.  $m_2$  表示每个时间步, 独立于节点演化的网络权值更新的边的总数, 由三角结构和随机连接两种方式构成. 调节  $m_2$  的大小来调节每个时间步加入到网络的三角结构数量  $\phi, m_2$ .  $\phi$  相同时,  $m_2$  越大三角结构所占的比重也越大.

图 10 给出了三角结构机制对网络同步能力的影响, 左图为类型 I 网络第二大特征值  $\lambda_2$  随参数  $m_2, \phi$  的变化关系. 右图为类型 II 网络特征值比值  $R$  随参数  $m_2, \phi$  的变化关系. 图中, 用 “×” 标记的为参数  $\phi = 0$  的曲线, 用 “\*” 标记的为参数  $\phi = 1$  的曲线. 图 10 显示了对两种不同的网络类型, 三角结构的影响也是不一样的. 对于类型 I 网络,  $\phi = 1$  的曲线比  $\phi = 0$  的第二大特征值小.  $\phi = 1$  时,  $m_2$  越大网络的第二大特征值越小, 意味着三角结构加入到网络中的边越多, 网络的同步能力越强了.  $\phi = 0$  时,  $m_2$  越大网络的第二大特征值越小, 意味着单独的随机连接加入到网络中的边越多, 网络的同步能力也越强了. 因此, 对于类型 I 加权网络而言, 三角结构和随机连接的演化机制提高了网络的同步能力. 对于类型 II 网络,  $\phi = 1$  对应的  $R$  值随着  $m_2$  的增加而增加,  $\phi = 0$  对应的  $R$  值随着  $m_2$  的增加而减小. 同样数量的边按照三角结构加入到网络中来降低了网络的同步能力. 按照随机连接的机制加入到网络中来, 提高了网络的同步能力. 因此, 对于类型 I 加权网络而言, 三角结构的演化机制提高了网络的同步能力. 对于类型 II 加权网络而言, 三角结构的演化机制降低了网络的同步能力. 但是随机连接, 对于两种网络的同步能力的影响是一样的, 都能提高网络的同步能力.

在研究社团结构的演化机制对网络同步能力的影响时, 令  $m_2 = 0$ , 没有按照三角结构和随机连

接的形式进行边的更新的情况. 调节参数  $p$  的大小来调节演化过程中社团结构所占的比重. 当  $p = 0$  时, 网络为社团结构增长的网络.  $p = 1$  对应优先连接增长的网络, 此时, 网络结构退化为 **BBV** 网络.  $p$  值越小网络社团结构所占的比重越大. 图 11 给出社团结构的演化机制对网络同步能力的影响, 左图为类型 I 网络第二大特征值  $\lambda_2$  与参数  $p$  的关系, 右图为类型 II 网络特征值比值  $R$  与参数  $p$  的关系. 仿真过程中, 分别采用了不同的  $m$  值, 网络每个节点加入到网络中有  $m$  条边与网络中的节点相连接,  $m$

取值的不同没有影响参数  $p$  对两种类型网络同步能力的影响. 对于类型 I 网络,  $p$  越小, 网络同步能力越差, 即社团结构降低了网络的同步能力. 对于类型 II 网络, 社团结构和优先连接的机制共同存在时, 网络耦合矩阵特征值比值很大, 但是单纯的社团结构和单纯的优先连接网络的特征值比值则很相近. 两种机制相混合的演化机制, 网络同步能力大幅度降低, 甚至不可能实现同步. 例如, 在社会网络中, 这两种机制显然是都存在的, 那么很难达成观点的一致.

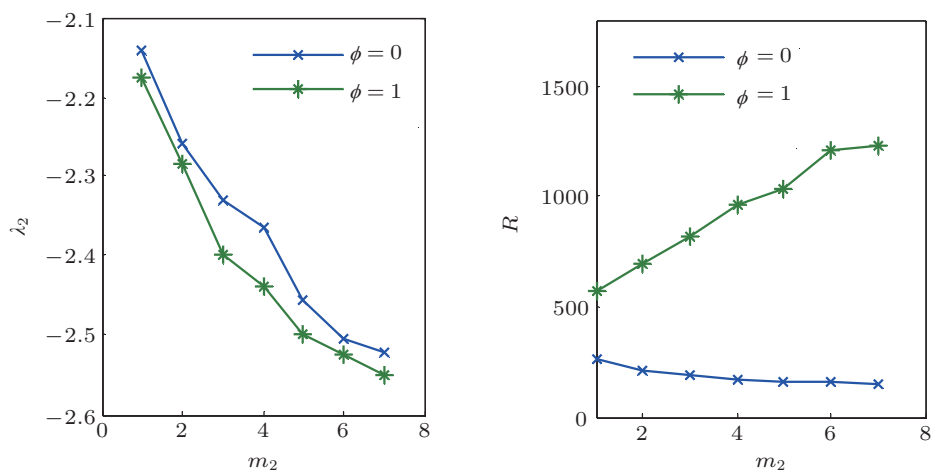


图 10 三角结构演化机制与同步能力的关系

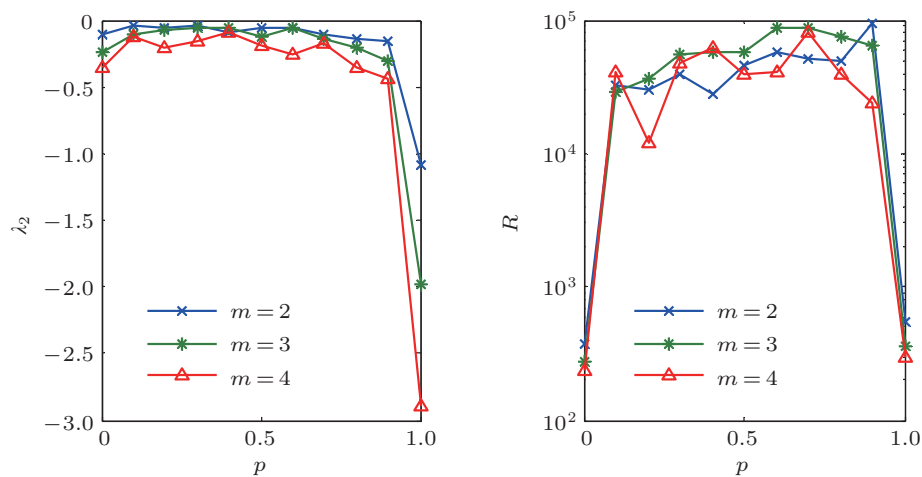


图 11 社团结构演化机制与同步能力的关系

表 1 给出了不同参数下平均聚类系数  $C$  和第二大特征值  $\lambda_2$  与特征值比值  $R$  的对应关系.  $p$  值越小意味着越多的社团结构被加入到网络模型中, 而  $\phi$  值越大意味着越多的三角连接机制被执行. 因此社团结构和三角连接都可以提高无标度网络的平均聚类系数. 从表 1 中可以看出, 平均聚类系数越

大, 第二大特征值  $\lambda_2$  也越大, 这意味着网络的平均聚类系数越小网络的同步能力越大. 三角连接机制可以提高类型 I 网络的同步能力, 但却削弱了类型 II 网络的同步能力, 社团结构机制也可以削弱类型 I 网络的同步能力. 当社团结构和单个节点两种机制混合时, 类型 II 网络的同步能力大幅度降低. 由

此可见,网络的演化机制对网络的同步能力有很大的影响.

表 1 不同参数下平均聚类系数  $C$  和第二大特征值  $\lambda_2$  与特征值比值  $R$  的对应关系

	$p = 0.7$	$p = 0.8$	$p = 0.9$	$\phi = 0.7$	$\phi = 0.8$	$\phi = 0.9$
$C$	0.40	0.372	0.338	0.378	0.431	0.453
$\lambda_2$	-0.225	-0.278	-0.379	-0.266	-0.225	-0.192
$R/10^4$	12.2	9.19	4.35	5.30	9.46	11.5

## 5 结论

本文提出了一类高聚类系数加权无标度网络

模型,该演化模型不仅考虑了旧节点之间三角结构和随机连接形式的边权更新情况,同时也考虑了网络按照社团结构进行演化的机制,是对 BBV 模型的重要补充.基于所提出的网络模型,研究了网络演化机制对网络同步动态特性的影响,仿真结果显示,随机连接机制能够提高网络的同步能力;而三角结构连接可以提高类型 I 网络的同步能力,降低类型 II 网络的同步能力;社团结构的演化机制降低类型 I 网络的同步能力;社团结构和优先连接两种机制混合时,类型 II 网络的同步能力被大幅度降低.

- [1] Watts D J, Strogatz S H 1998 *Nature* **393** 440
- [2] Barabási A L, Albert R 1999 *Science* **286** 509
- [3] Zhao M, Zhou T, Chen G R, Wang B H 2008 *Prog. Phys.* **28** 22 (in Chinese) [赵明, 周涛, 陈关荣, 汪秉宏 2008 物理学进展 **28** 22]
- [4] Boccaletti S, Latora V, Moreno Y, Chavez M, Hwang D U 2006 *Phys. Rep.* **424** 175
- [5] Yao H X, Wang S G 2012 *Chin. Phys. B* **21** 110506
- [6] Liu Z R, Li Y, Zhang J B 2008 *Chin. Phys. Lett.* **25** 874
- [7] Fan J, Wang X F 2005 *Physica A* **349** 443
- [8] Wang X F, Chen G R 2002 *Int. J. Bifurcat. Chaos* **12** 187
- [9] Barahona M, Pecora L M 2002 *Phys. Rev. Lett.* **89** 054101
- [10] Wang X F, Chen G R 2002 *IEEE Trans. Circuits Syst.* **1** 49 54
- [11] Yook S H, Jeong H, Barabási A L, Tu Y 2001 *Phys. Rev. Lett.* **86** 5835
- [12] Zheng D F, Trimper S, Zheng B, Hui P M 2003 *Phys. Rev. E* **67** 040102
- [13] Wang S J, Zhang C H 2004 *Phys. Rev. E* **70** 066127
- [14] Barrat A, Barthélemy M, Vespignani A 2004 *Phys. Rev. Lett.* **92** 228701
- [15] Ou Q, Jin Y D, Zhou T, Wang B H, Yin B Q 2007 *Phys. Rev. E* **75** 021102
- [16] Wang W X, Hu B, Zhou T, Wang B H, Xie Y B 2005 *Phys. Rev. E* **72** 046140
- [17] Xie Y B, Wang W X, Wang B H 2007 *Phys. Rev. E* **75** 026111
- [18] Wang W X, Hu B, Wang B H, Yan G 2006 *Phys. Rev. E* **73** 016133
- [19] Wang D, Jin X Z 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 228901 (in Chinese) [王丹, 金小崢 2012 物理学报 **61** 228901]
- [20] Jing Y W, Hao B B, Zhang S Y 2009 *Comp. Syst. Comp. Sci.* **6** 87 (in Chinese) [井元伟, 郝彬彬, 张嗣瀛 2009 复杂系统与复杂性科学 **6** 87]
- [21] Newman M E J 2003 *SIAM Rev.* **45** 167
- [22] Wang D, Jing Y W, Hao B B 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 220511 (in Chinese) [王丹, 井元伟, 郝彬彬 2012 物理学报 **61** 220511]
- [23] Wang D, Jing Y W, Hao B B 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 170513 (in Chinese) [王丹, 井元伟, 郝彬彬 2012 物理学报 **61** 170513]
- [24] Kocarev L, Amato P 2005 *Chaos* **15** 024101

# A weighted scale-free network model with high clustering and its synchronizability\*

Wang Dan<sup>†</sup> Hao Bin-Bin

(Key Laboratory of Manufacturing Industrial Integrated Automation, Shenyang University, Shenyang 110044, China)

(Received 17 June 2013; revised manuscript received 15 August 2013)

## Abstract

The detecting of clusters or communities in large real-world networks such as large social or information networks is of considerable significance. We propose a new weighted evolving model of high clustering scale-free network incorporating a community structure mechanism, which means the addition of the new node depends on not only a single node but also a community. In the process of the evolution, a new node with probability  $p$  and a new community with the probability  $1 - p$  are added to the network. Different from the existing studies where new links are additionally established, some links with probability  $\phi$  according to the triad formation mechanism and other links with the probability  $1 - \phi$  according to the random selection mechanism are connected between neighbors in the model. The topology and weights of links of the network evolve as time goes on. Moreover, the evolving model gives power-law distributions of degree, weight, and strength as confirmed in several real world systems. Especially, the average clustering coefficient exhibits power-law decay as a function of degree of node. Both the community structure and the triad formation can enhance the average clustering coefficient of scale-free networks. Furthermore, we investigate how the synchronization of the network is influenced by the evolution mechanism of the network. Numerical simulation results show that the network synchronizability is optimized when the average clustering coefficient decreases in the model.

**Keywords:** scale-free network, weighted network, clustering coefficient, synchronizability

**PACS:** 05.45.Xt, 89.75.Fb, 05.90.+m, 02.50.-r

**DOI:** 10.7498/aps.62.220506

---

\* Project supported by the Young Scientists Fund of the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 61203152) and the Scientific Research Foundation for Doctor of Liaoning Province of China (Grant No. 20121040)

<sup>†</sup> Corresponding author. E-mail: wangdan0307@126.com