

色关联噪声对林木 Logistic 生长模型的影响*

王国威 徐大海 程庆华†

(长江大学物理科学与技术学院, 荆州 434023)

(2013年3月21日收到; 2013年8月19日收到修改稿)

在林木生长 Logistic 模型中, 引入加性和乘性关联色噪声, 运用统一色噪声近似、刘维方程以及诺维科夫原理, 推导了近似福克 - 普朗克方程, 分析了相关参数对稳态概率分布函数的影响. 结果表明: 改变乘性色噪声强度 D 和加性色噪声强度 Q 均能导致稳态概率分布曲线峰值高度的改变以及峰位置的移动, 对概率密度分布呈现出漂移作用. 但是在 D 和 Q 增大的过程中, 稳态概率分布曲线峰位置的移动方向是不同的: D 增大时, 峰的位置向左移动; Q 增大时, 峰的位置向右移动. 另外, 当 $\lambda > 0$ 时, 随着 $|\lambda|$ 的增大, 稳态概率分布函数峰的位置向右移动, 且峰值的高度变大; 而 $\lambda < 0$ 时, 随着 $|\lambda|$ 的增大, 稳态概率分布函数峰值的高度也变大, 而峰的位置却向左移动.

关键词: 林木生长, Logistic 模型, 色噪声, 稳态概率分布

PACS: 42.65.-k, 42.65.Sf, 42.90.+m

DOI: 10.7498/aps.62.224208

1 引言

近年来, 人们对噪声在非线性系统中的作用和影响的研究越来越多, 关于随机共振及其相关问题引起了人们的广泛关注, 并在理论和实验方面取得了重大突破^[1,2]. 关联噪声驱动的随机动力学被广泛应用于化学、物理、生物和医学等领域, 而 Logistic 模型则是其中关注程度比较高的一个问题^[3]. Logistic 模型是一个典型的非线性系统, 在人口动力学、生物学、遗传学和化学反应等学科领域均有广泛应用^[4]. 特别地, Logistic 方程是生态学中模拟种群动态最常用的模型^[5]. 生物生长是一个复杂的非线性系统, 具有潜在的随机性, 在生物系统中揭示非线性条件下噪声产生的各种重要效应已经成为生命科学发展中的一个重要的前沿领域, 其研究成果正在推动许多科学领域的发展和相互交叉^[6]. 别梦杰等^[7]研究了在免疫监视的 Logistic 肿瘤生长动力学模型中关联白噪声对不同抗肿瘤体系个体的免疫效果的影响; 杨建华和刘先斌^[8]研究了受色交叉关联噪声驱动的癌细胞增长系统的平均首通时间; 刘志宏等^[9]研究了关联的加

性离子通道噪声和乘性突触噪声共同作用下非线性积分发放神经元模型中的相干共振现象; 郭永峰和徐伟^[10]研究了关联白噪声驱动的具有时间延迟的 Logistic 肿瘤细胞增长系统的稳态概率密度; 张怀强等^[11]在表征群体生长的 Logistic 方程的基础上提出了一个估算细菌群体生长延迟期和群体倍增时间的新方法.

本文将关联噪声引入到林木生长的 Logistic 方程中, 对关联色噪声驱动的林木生长 Logistic 模型进行了研究. 根据福克 - 普朗克的方法, 计算了该系统的稳态概率分布函数, 分析了色关联噪声参量对定态概率分布函数的影响.

2 林木生长的 Logistic 方程与稳态概率分布函数

Logistic 方程是生态学中模拟种群动态的最常用的模型, 树木生长过程满足方程^[12]:

$$\frac{1}{x} \frac{dx}{dt} = r - \frac{r}{A}x, \quad (1)$$

式中 r 为林木最大生长速率, A 为林木生长的最大值参数, x 为林木大小, $\frac{r}{A}$ 为拥挤效应系数. 这是一

* 湖北省高等学校优秀中青年科技创新团队计划 (批准号: T201204) 和湖北省教育厅重点科学技术研究项目 (批准号: D20121203) 资助的课题.

† 通讯作者. E-mail: qhcheng@yangtzeu.edu.cn

个理想方程, 考虑到林木生长受本身遗传因素的影响, 以及林分中林木生长的营养空间有限 (竞争的存在), 外界环境如光照、温度、土壤和雨水复杂多变, 其最大生长速率必然会随环境发生涨落, 林木生长速率在 r 周围波动, 修正值为 $r + \xi(t)$ ^[13]. 这些内外部因素分别以加性噪声和乘性噪声方式被引入了描述林木生长的 Logistic 方程, 于是 Logistic 方程可以修正为含随机项的郎之万方程^[14]:

$$\frac{dx}{dt} = rx - \frac{r}{A}x^2 + \left(x - \frac{x^2}{A}\right)\xi(t) + \eta(t), \quad (2)$$

式中 $\xi(t)$ 和 $\eta(t)$ 分别为乘性和加性高斯色噪声, 它们具有下列统计性质^[15]:

$$\langle \xi(t) \rangle = \langle \eta(t) \rangle = 0, \quad (3)$$

$$\langle \xi(t)\xi(t') \rangle = \frac{D}{\tau_1} \exp\left(-\frac{|t-t'|}{\tau_1}\right), \quad (4)$$

$$\langle \eta(t)\eta(t') \rangle = \frac{Q}{\tau_2} \exp\left(-\frac{|t-t'|}{\tau_2}\right), \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \langle \xi(t)\xi(t') \rangle &= \langle \eta(t)\xi(t') \rangle \\ &= \frac{\lambda\sqrt{DQ}}{\tau_3} \exp\left(-\frac{|t-t'|}{\tau_3}\right), \end{aligned} \quad (6)$$

其中, D 和 Q 分别为乘性和加性高斯色噪声的强度, λ 是两噪声之间的关联强度, 当 $-1 < \lambda < 0$ 时, 两噪声之间负关联, 当 $0 < \lambda < 1$ 时, 两噪声之间正关联; τ_1 为乘性色噪声之间的自关联时间, τ_2 为加性色噪声之间的自关联时间, τ_3 为交叉关联色噪声之间的关联时间; t 和 t' 分别是两个不同的时刻.

方程 (2) 中关于 x 的势为

$$V(x) = -\frac{r}{2}x^2 + \frac{r}{3A}x^3, \quad (7)$$

它有一个不稳态 $x_u = 0$ 和一个稳态 $x_s = A$.

为了得到满足方程 (2) 的概率分布函数演化方程, 做如下代换^[16]:

$$f(x) = rx - \frac{r}{A}x^2, \quad (8)$$

$$g_1(x) = x - \frac{x^2}{A}, \quad (9)$$

$$g_2(x) = 1, \quad (10)$$

那么, 上述郎之万方程 (2) 可以变形为^[17]

$$\frac{dx}{dt} = f(x) + g_1(x)\xi(t) + g_2(x)\eta(t), \quad (11)$$

根据刘维方程^[18], 得:

$$\frac{\partial \rho(x,t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} [f(x) + g_1(x)\xi(t) + g_2(x)\eta(t)]$$

$$\times \rho(x,t). \quad (12)$$

对上式做系综平均, 且

$$P(x,t) = \langle \delta(x(t) - x) \rangle, \quad (13)$$

可得:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P(x,t)}{\partial t} &= -\frac{\partial}{\partial x} f(x)P(x,t) \\ &\quad - \frac{\partial}{\partial x} g_1(x) \langle \xi(t) \delta(x(t) - x) \rangle \\ &\quad - \frac{\partial}{\partial x} g_2(x) \langle \eta(t) \delta(x(t) - x) \rangle, \end{aligned} \quad (14)$$

由诺维科夫定理^[19] 和统一色噪声近似^[20], 经过计算可以得到概率分布密度函数满足的近似福克 - 普朗克方程为^[21]

$$\frac{\partial P(x,t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} A(x)P(x,t) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} B(x)P(x,t), \quad (15)$$

其中,

$$\begin{aligned} A(x) &= rx \left(1 - \frac{x}{A}\right) + Dx \left(1 - \frac{x}{A}\right) \left(1 - \frac{2x}{A}\right) \\ &\quad + \lambda\sqrt{DQ} \left(1 - \frac{2x}{A}\right), \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} B(x) &= Dx^2 \left(1 - \frac{x}{A}\right)^2 + \lambda\sqrt{DQ} \left(1 - \frac{x}{A}\right) \\ &\quad \times x \left(1 + \frac{1}{1+r\tau_3}\right) + \frac{Q}{1+r\tau_2}. \end{aligned} \quad (17)$$

在定态情况下求解方程 (15), 并利用 $A(x)$ 和 $B(x)$ 的表达式, 可以得到其定态概率分布函数为^[22]

$$P_{st}(x) = \frac{N}{B(x)} \exp\left(\int^x \frac{A(x')}{B(x')} dx'\right), \quad (18)$$

其中, $U(x) = -\int^x \frac{A(x')}{B(x')} dx'$ 为广义势, N 为稳态概率分布归一化常数, N 的值由 $\int_0^{+\infty} P_{st}(x) dx = 1$ 确定. 将 $A(x)$ 和 $B(x)$ 的表达式代入 (18) 式, 可以分析不同参数对概率分布函数的影响.

3 讨论

图 1 给出了不同乘性色噪声强度 D 对稳态概率分布曲线的影响. 由图可知, 在固定强度的乘性色噪声下, 稳态概率分布函数先逐渐减小, 然后经历一个平稳期, 之后迅速地增加, 达到一个峰值, 最后较快地减小并趋于平衡, 这符合林木生长过程中“较快 - 较慢 - 较快 - 较慢”的生长趋势. 随着 D 的增大, 稳态概率分布函数以更快的速度减小至一个

更小的值并趋于第一个平稳期. 而且 D 越大, 这个平稳期结束越早, 然后以更快的速度迅速增加并达到峰值, 峰值的高度随 D 的增加而变大, 但是峰的宽度变小且峰的位置向左移动, 之后以更快的速度减小至一个更小值, 最后缓慢减小至另一个较低的平稳期. 图 1 告诉我们, 在第一个平稳期, 林木经历一个相对缓慢生长的过程, 且乘性色噪声强度越大, 林木生长越早结束这个缓慢生长期. 另外, 适当降低乘性噪声强度, 可以保证林木在生长时有一个快并较持久的生长期, 这一点符合文献 [11] 中总结的情况, 即用 Logistic 方程比较适合于描述慢生树种的树木生长, 而对生长较快的其他树种其精度较低.

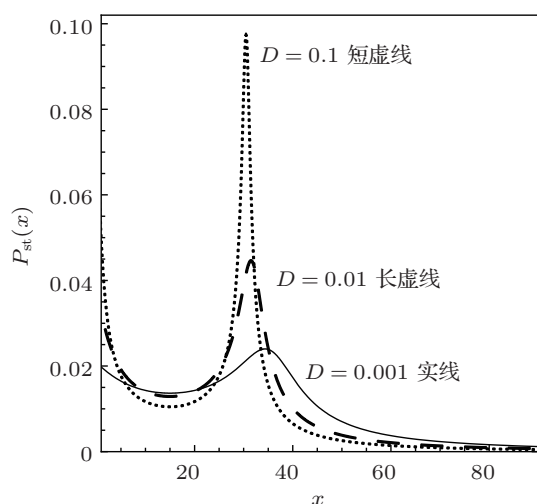


图 1 乘性色噪声强度 D 对稳态概率分布曲线的影响 ($r = 0.01; A = 30; Q = 0.1; \lambda = 0.5; \tau_2 = 0.1; \tau_3 = 0.1$)

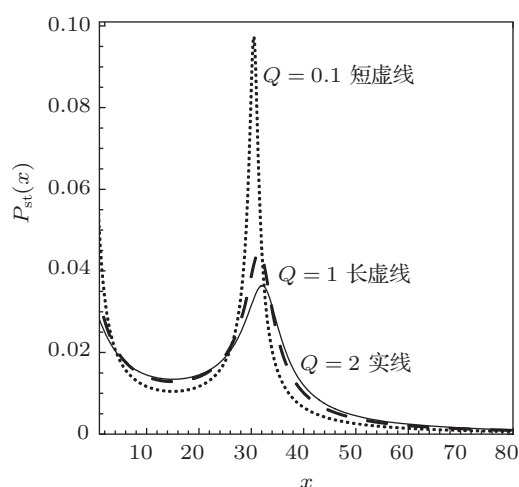


图 2 加性色噪声强度 Q 对稳态概率分布曲线的影响 ($r = 0.01; A = 30; D = 0.1; \lambda = 0.5; \tau_2 = 0.1; \tau_3 = 0.1$)

图 2 反映了不同强度的加性色噪声 Q 对稳态概率分布曲线的影响. 从图 2 可以看出, 对于强度

固定的加性色噪声, 对稳态概率分布曲线的影响与乘性色噪声是类似的, 即曲线均出现了先逐渐减小, 然后经历一个平稳期, 之后迅速地增加达到一个峰值, 最后较快地减小并趋于平稳. 而在 Q 逐渐增大时, 却出现与乘性噪声强度 D 增加时不同的情况: 首先, Q 的取值越大, 稳态概率分布曲线先从一个 $P_{st}(x)$ 值越小的地方逐渐减小至第一个平稳期, 然后以较慢的速度增加到一个峰值, 而且 Q 越大, 峰值高度反而越低, 但是峰的宽度却更大, 同时峰的位置右移, 最后逐渐减小并趋于另一个平稳期. 和图 1 相比, 比较引人思考的是稳态概率分布曲线出现峰值时的不同之处, 图 1 中 D 的取值越大, 其峰的高度越大, 而宽度越小; 而图 2 中, Q 的取值越大, 其峰的高度反而越小, 但是峰的宽度却越大. 由此可见, 乘性色噪声强度和加性色噪声强度对林木生长过程中的影响是不一样的. 综合乘性噪声和加性噪声对林木生长过程的影响, 我们发现, 虽然乘性噪声和加性噪声是非同源的, 但是由于外部环境的涨落可以影响内部因素的涨落, 所以加性噪声就不再是独立的, 它们之间也存在某种关联 [23]. 对上述结论在某些侧面已有佐证, 例如, CO_2 浓度升高是当今全球面临的问题, 研究表明, 随着 CO_2 浓度升高, 林木生长速度加快, 这样 N 素反而会成为限制林木生长的主要因素. 林木在吸收不同形态 N 素后其生物量不同, 所以关于不同 N 素形态对林木生理、生长以及生态方面影响的研究引起了人们的重视, 并且这些结论对研究噪声对林木生长过程的影响起到推动作用 [24].

图 3(a) 给出的是乘性噪声和加性噪声间为正关联时的稳态概率分布曲线, 为了更清楚地研究不同关联强度下曲线的变化情况, 该图像的主要变化部分经过重新绘制并标注后如图 3(b) 所示. 由图 3 可知, 在噪声间关联强度 λ 固定时, 稳态概率分布曲线整体走势与图 1 和图 2 中相似, 不同的是图 3(a) 中的第一个平稳期部分明显要更长一些, 而且 λ 的取值越接近 1, 其峰值的高度增加得越快, 即峰变得更“尖”更高. 当 λ 变化时, 从图 3 可以看出, 在稳态概率分布曲线到达峰值之前, λ 的取值最小的曲线 ($\lambda = 0.1$ 实线) 在最上面, 而 $\lambda = 0.9$ 时的曲线 (短虚线) 却位于最下面. 但是, 在 $\lambda = 0.1$ 时的稳态概率分布曲线到达峰值之后, 情况却变得相反: $\lambda = 0.9$ 的曲线位于最上方, 而 $\lambda = 0.1$ 的曲线却在最下方, 如图 3(b) 所示. 同时我们注意到, 当 λ 增大时, 峰的高度变大, 但是宽度变小, 而且峰的位置向

右移. 由此可见, 两噪声间正关联时, 在林木大小达到最大生长值之前, 噪声间关联强度越小, 对于某一确定的林木大小在该处的概率越大. 另外, 随着噪声间关联强度的增加, $P_{st}(x)$ 峰值高度变大说明林木大小在最大生长量处的概率增加, 同时峰值所在位置右移, 表明增加噪声间关联强度可以促使林木生长过程中的最大生长值变大, 并且大于确定性方程中最大生长量, 即噪声的引入给林木生长系统带来了一定的影响.

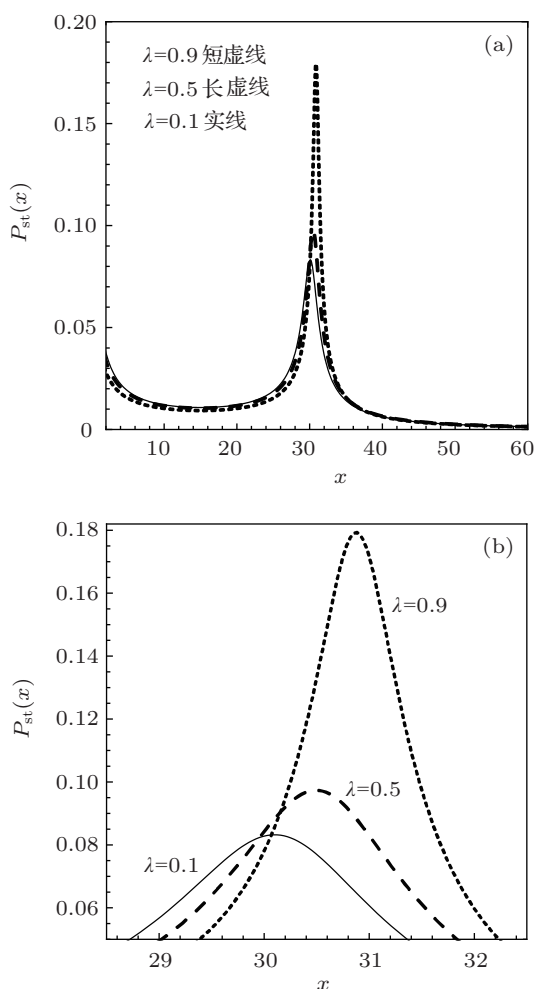


图3 正关联噪声强度对稳态概率分布曲线的影响 ($r = 0.01$; $A = 30$; $D = 0.1$; $Q = 0.1$; $\tau_2 = 0.1$; $\tau_3 = 0.1$)

不同的负关联强度 λ 对稳态概率分布曲线的影响如图 4(a) 所示, 同样地, 为了研究的方便, 我们在图 4(b) 中重新绘制了该图像的主要变化部分并进行了标注. 综合图 3 和图 4, 可以看出, 在噪声间分别为正、负关联的情况下, 稳态概率分布曲线呈现相似的图像. 而且, 从图 4(b) 可以看出, 噪声间负关联时, 随着关联强度 $|\lambda|$ 的增加, $P_{st}(x)$ 峰值所在位置向左移动, 说明最大生长量变小; 但是峰值高

度变大, 说明在该最大生长量处的概率增加. 在达到最大生长值之前, $\lambda = -0.2$ 所对应的稳态概率分布曲线位于三条曲线当中的最下面. 这表明在负关联时, 对于某一确定的林木生长量, $|\lambda|$ 越大, 则在该处所对应的概率越大. 对比图 3(b) 和图 4(b) 两图, 可以得知: 在正、负关联两种情况下, $|\lambda|$ 的值越大, 稳态概率分布函数的峰值的高度越大, 而峰的宽度越小. 然而, 需要指出的是, 当 $\lambda > 0$ 时, 随着 $|\lambda|$ 的增大, 稳态概率分布函数的峰位置向右移动; 而当 $\lambda < 0$ 时, 随着 $|\lambda|$ 的增大, 稳态概率分布函数的峰位置却向左移动. 由以上讨论可知, 当噪声间关联强度分别为正、负关联两种情况时, 对稳态概率分布曲线峰值的位置和峰值高度的影响是不同的, 即对林木生长过程有不同的影响, 这对林木生长过程中如何保持一个较长的快速生长期并达到最大生长值有一定指导作用.

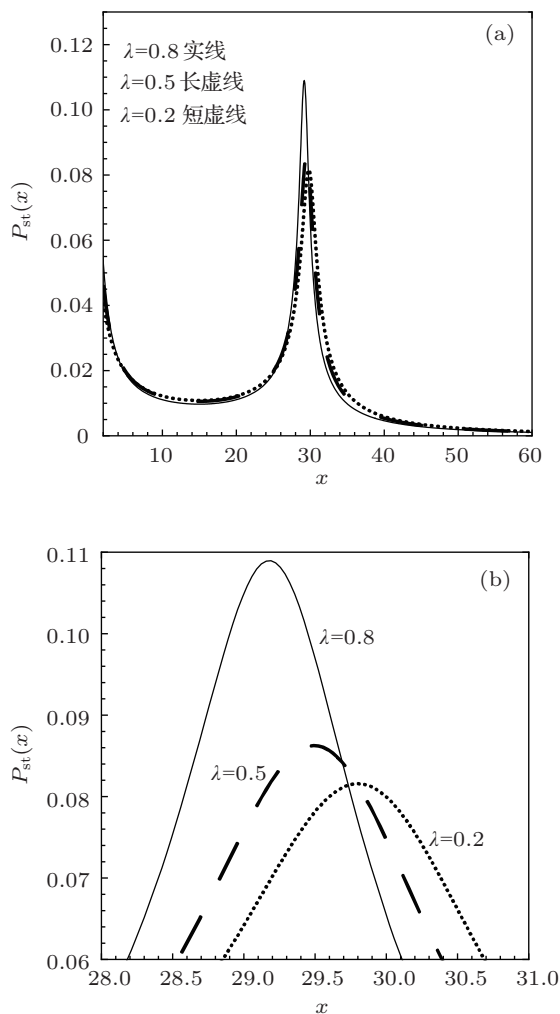


图4 负关联噪声强度对稳态概率分布曲线的影响 ($r = 0.01$; $A = 30$; $D = 0.1$; $Q = 0.1$; $\tau_2 = 0.1$; $\tau_3 = 0.1$)

4 结论

在林木生长 Logistic 模型中, 通过计算该系统的福克 - 普朗克方程, 得到了相应的稳态概率分布函数的表达式, 分别讨论了乘性色噪声强度 D 和加性色噪声强度 Q 以及噪声间关联强度 λ 对林木生长 Logistic 模型的影响. 结果表明: 乘性色噪声强度 D 和加性色噪声强度 Q 的改变均能导致稳态概率分布曲线峰值高度的改变以及峰位置的移动, 对概率密度分布呈现出漂移作用, 但是在 D 和 Q 增大的过程中, 稳态概率分布曲线峰的位置的移动方向却是相反的, D 增大时, 峰的位置向左移动, Q 增大

时, 峰的位置向右移动. 另外, 当 $\lambda > 0$ 时, 随着 $|\lambda|$ 的增大, 稳态概率分布函数峰的位置是向右移动的, 且峰值的高度变大; 而 $\lambda < 0$ 时, 随着 $|\lambda|$ 的增大, 稳态概率分布函数峰值的高度也变大, 而峰的位置却是向左移动的. 综上可知, 在林木生长过程中通过控制内、外部因素, 如考虑林木选种、环境、土壤等的影响可以促进林木生长. 在实际生产中, 以上分析可以从理论上指导我们对林木种类、气候环境、种植条件进行选择, 以及如何保证林木生长有一个较快较持久的生长期, 并更快地达到最大生长值.

- [1] Bai C Y, Yan Y, Mei D C 2010 *Chin. Phys. B* **19** 060503
- [2] Zheng Z R, Su W H, Su Y 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 6989 (in Chinese) [郑植仁, 苏文辉, 苏艳 2007 物理学报 **56** 6989]
- [3] Zhang L, Cao L 2011 *Commun. Theor. Phys. Lett.* **55** 462
- [4] Wang C J, Wei Q, Mei D C. 2007 *Modern Phys. Lett. B* **21** 789
- [5] Yu A H 2003 *M. S. Dissertation* (Nanjing: Nanjing Forestry University) (in Chinese) [余爱华 2003 硕士学位论文 (南京: 南京林业大学)]
- [6] Fang C J 2012 *J. Hubei Univ. Technol.* **27** 92 (in Chinese) [方次军 2012 湖北工业大学学报 **27** 92]
- [7] Bie M J, Zhong W R, Chen H D, Li L, Shao Y Z 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 97 (in Chinese) [别梦杰, 钟伟荣, 陈虎弟, 李立, 邵元智 2009 物理学报 **58** 97]
- [8] Yang J H, Liu X B 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 3727 (in Chinese) [杨建华, 刘先斌 2010 物理学报 **59** 3727]
- [9] Liu Z H, Zhou Y R, Zhang A Y, Pang X F 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 699 (in Chinese) [刘志宏, 周玉荣, 张安英, 庞小峰 2010 物理学报 **59** 699]
- [10] Guo Y F, Xu W 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 6081 (in Chinese) [郭永峰, 徐伟 2008 物理学报 **57** 6081]
- [11] Zhang H Q, Lu L L, Yan X L, Gao P J 2007 *Sci. China* **37** 246 (in Chinese) [张怀强, 卢丽丽, 阎雪岚, 高培基 2007 中国科学 **37** 246]
- [12] Meng X Y 2006 *Forest Mensuration* (3rd Ed.) (Beijing: China Forestry Publishing House) pp179–201 (in Chinese) [孟宪宇 2006 测树学 (第三版)(北京: 中国林业出版社) 第 179—201 页]
- [13] Xing F, Yao S K, Li M L 2011 *J. Capital Normal Univ.* **32** 1 (in Chinese) [邢菲, 姚少魁, 李民丽 2011 首都师范大学学报 **32** 1]
- [14] Chen J, Cheng C M 2008 *J. Huazhong Normal Univ.* **42** 207 (in Chinese) [陈俊, 成传明 2008 华中师范大学学报 **42** 207]
- [15] Han L B 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 2699 (in Chinese) [韩立波 2008 物理学报 **57** 2699]
- [16] Jia Y, Li J R 1996 *Phys. Rev. E* **53** 5786
- [17] Wu D J, Cao L, Ke S Z 1994 *Phys. Rev. E* **50** 2496
- [18] Kubo R 1963 *J. Math. Phys.* **4** 174
- [19] Novikov E A 1919 *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **20** 1290
- [20] Peter J, Peter H 1987 *Phys. Rev. A* **35** 4464
- [21] Hu G 1994 *Stochastic Forces and Nonlinear System* (Shanghai: Shanghai Scientific and Technological Education Publishing House) (in Chinese) [胡岗 1994 随机力与非线性系统 (上海: 上海科技教育出版社)]
- [22] Wang C J, Wei Q, Zheng B B, Mei D C 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 1375 (in Chinese) [王参军, 魏群, 郑宝兵, 梅冬成 2008 物理学报 **57** 1375]
- [23] Nie L R, Mei D C 2007 *Phys. Lett. A* **371** 111
- [24] Zhang Y D, Bai S B 2003 *Chin. J. Appl. Ecol.* **14** 2044 (in Chinese) [张彦东, 白尚斌 2003 应用生态学报 **14** 2044]

Influences of correlated colored-noises on logistic model for tree growth*

Wang Guo-Wei Xu Da-Hai Cheng Qing-Hua[†]

(College of Physics Science and Technology, Yangtze University, Jingzhou 434023, China)

(Received 21 March 2013; revised manuscript received 19 August 2013)

Abstract

By virtue of Liouville Theorem and unified colored-noise approximation approach, an approximate Fokker-Planck equation for a tree growth Logistic model subjected to cross-correlated colored noises is derived, and the steady-state probability distribution (SPD) function is obtained. The steady-state properties of the Logistic model are analyzed. We find the following: (1) the position of peak of SPD moves toward left side as D increases while the position of the peak moves toward the contrary direction with Q increasing; (2) the peak of SPD becomes narrow and grows in height as $|\lambda|$ increases, and for the case of $\lambda > 0$, the position of peak moves toward right as D increases, but it is opposite for the case of $\lambda < 0$ as Q increases.

Keywords: tree growth, Logistic model, correlated noises, steady-state probability distribution

PACS: 42.65.-k, 42.65.Sf, 42.90.+m

DOI: 10.7498/aps.62.224208

* Project supported by the Technology Creative Project of Excellent Young Team of Hubei Province, China (Grant No. T201204) and the Emphases Item of Education Office of Hubei Province, China (Grant No. D20121203).

[†] Corresponding author. E-mail: qhcheng@yangtzeu.edu.cn