

# 基于高斯型脉冲的非线性 Ramsey 干涉\*

陈超 田钢 于术娟 杨世平†

(河北师范大学物理科学与信息工程学院, 石家庄 050024)

(2013年7月3日收到; 2013年8月13日收到修改稿)

基于非线性 Rosen-Zener 隧穿理论, 利用高斯型脉冲研究了双势阱玻色-爱因斯坦凝聚体的非线性 Ramsey 干涉. 通过数值模拟得到了丰富的非线性 Ramsey 干涉图样, 分别讨论了粒子间相互作用和高斯型脉冲的周期对干涉图样的影响. 通过哈密顿正则关系得到了干涉条纹的基频表达式, 并借助傅里叶变换对 Ramsey 干涉条纹的频率进行分析, 得到了干涉条纹的基频随粒子间相互作用及脉冲周期的变化关系. 比较数值和解析结果发现两者符合得很好.

**关键词:** 玻色-爱因斯坦凝聚, Ramsey 干涉, 高斯型脉冲

**PACS:** 52.35.Mw, 37.25.+k, 03.75.Lm

**DOI:** 10.7498/aps.62.225202

## 1 引言

1950年, Ramsey<sup>[1]</sup>在研究原子与微波谐振腔的相互作用时, 受到迈克耳孙干涉仪工作原理的启发, 创造了分离振荡场的方法, 其利用谐振腔与原子系统进行两次相互作用, 然后再对两能级间的跃迁频率进行测量. 研究表明 Ramsey 干涉图样的中间峰宽度取决于原子系统无耦合时间的长短, 无耦合时间越长, 峰的宽度就越窄, 测量精度就越高<sup>[2]</sup>. 分离振荡场测量方法极大地推动了精密测量技术的发展, 这一理论方法的发展直接导致了原子钟的诞生, 从而给定了新的时间标准<sup>[3]</sup>. 1995年玻色-爱因斯坦凝聚(BEC)的实现为冷原子干涉技术的发展带来了新的契机, 利用冷原子干涉技术可以进行更加精密的测量, 如对重力场的精密测量<sup>[4,5]</sup>、对旋转角速度的测量<sup>[6,7]</sup>以及对原子精细结构常数的测量<sup>[8]</sup>等.

双势阱模型<sup>[9-12]</sup>是研究 BEC 动力学过程的一个重要模型, 随着两阱间的基态能级间隔、相互作用以及原子间相互作用的变化, 系统就会展现出很多奇妙的动力学特性, 如非线性 Landau-Zener 跃迁<sup>[13-15]</sup>、Rosen-Zener 隧穿<sup>[16-18]</sup>、开关特性<sup>[19]</sup>、

动力学不稳定性<sup>[20,21]</sup>以及自囚禁<sup>[22,23]</sup>等现象. 目前, 已对此进行了深入而广泛的研究, 在此基础上还对超冷原子分子系统的 Ramsey 干涉测量进行了研究<sup>[24-27]</sup>. 随着冷原子干涉技术的不断发展, 可以利用 BEC 的优良特性来寻找更多的干涉方案<sup>[28-31]</sup>. 本文以非线性 Rosen-Zener 隧穿理论为基础, 采用高斯型脉冲研究了双势阱 BEC 的非线性 Ramsey 干涉. 利用高斯脉冲作为外场, 对系统进行扫描以实现 Rosen-Zener 隧穿过程, 两次扫描之间附加一段时间的独立演化. 在独立演化过程中, 两势阱中的凝聚体不发生隧穿, 只积累相位差, 随着独立演化时间的变化就可在时间域上观察到丰富的 Ramsey 干涉条纹. 本文主要研究原子间相互作用和高斯型脉冲周期对干涉条纹及频率的影响.

## 2 模型

对于囚禁在双势阱中的两团弱耦合 BEC, 系统可以用二次量子化的两模哈密顿模型来描述:

$$\hat{H} = -\frac{\epsilon}{2}(\hat{y}_1^\dagger \hat{y}_1 - \hat{y}_2^\dagger \hat{y}_2) + \frac{\eta}{2}(\hat{y}_1^\dagger \hat{y}_2 + \hat{y}_2^\dagger \hat{y}_1) - \frac{m}{4}(\hat{y}_1^\dagger \hat{y}_1 - \hat{y}_2^\dagger \hat{y}_2)^2, \quad (1)$$

\* 河北省自然科学基金(批准号: A2010000343)资助的课题.

† 通讯作者. E-mail: yangship@mail.hebtu.edu.cn

其中  $\varepsilon$  表征两阱基态之间的能量差,  $m$  描述原子间相互作用的强度,  $h$  为两阱间的耦合强度,  $\hat{y}_i^\dagger$  和  $\hat{y}_i$  ( $i = 1, 2$ ) 分别对应两阱中粒子的产生与消灭算符, 并且满足粒子数守恒条件  $\hat{y}_1^\dagger \hat{y}_1 + \hat{y}_2^\dagger \hat{y}_2 = N$ ,  $N$  为两阱中的总粒子数. 若总粒子数  $N$  足够大, 则系统可以用平均场理论来近似描述, 即二次量子化算符  $\hat{\psi}_i$  可以写为相应的复数  $\psi_i = \sqrt{N_i} e^{-iq_i}$ , 引入两阱中的粒子布居数差  $n = (N_2 - N_1)/N$  和相对相位  $q = q_2 - q_1$ , 并利用粒子数守恒条件  $N_1 + N_2 = N$ , 可得与原系统对应的经典哈密顿量如下:

$$\mathcal{H} = \varepsilon n + \frac{\mu}{2} n^2 - \eta \sqrt{1 - n^2} \cos q, \quad (2)$$

相应的运动方程为

$$\begin{cases} \dot{n} = -\eta \sqrt{1 - n^2} \sin \theta \\ \dot{\theta} = \varepsilon + \mu n + \frac{\eta n}{\sqrt{1 - n^2}} \cos \theta \end{cases} \quad (3)$$

为研究系统的 Ramsey 干涉, 首先利用外加高斯型脉冲将两阱中的凝聚体进行耦合, 以制备干涉源; 接着让两阱中的凝聚体独立地进行演化, 在此过程中无耦合; 待演化结束后, 两阱中的凝聚体分别积累了不同的附加相位, 该附加相位的差将会影响最终粒子在两阱中的分布; 为形成干涉, 最后还需要给系统加一次高斯脉冲, 整个干涉过程如图 1 所示.

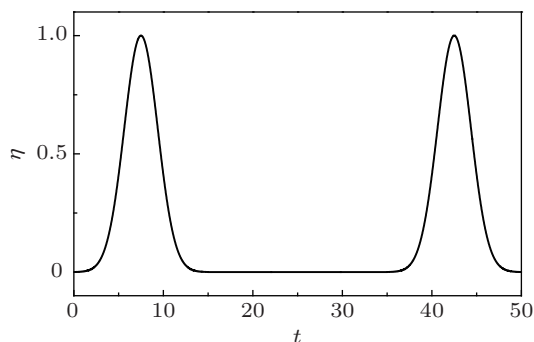


图 1 Ramsey 干涉计结构示意图

耦合系数  $\eta(t)$  由两个高斯型脉冲给出, 依据上面的设计, 模型 (3) 中的具体形式如下:

$$\eta(t) = \begin{cases} \eta_0 \exp\left(-\frac{(t - T/2)^2}{T^2}\right) & (0 \leq t \leq T) \\ 0 & (T < t < T + T_F) \\ \eta_0 \exp\left(-\frac{(t - T/2 - T_F)^2}{T^2}\right) & (T + T_F \leq t \leq 2T + T_F) \end{cases}, \quad (4)$$

其中  $\eta_0$  表示最大脉冲强度,  $T$  为脉冲宽度或周期,  $T_F$  为两个脉冲的间隔, 由于独立演化时间  $T_F$  对整个系统终态的粒子数布居有着十分重要的影响, 通过改变独立演化时间  $T_F$ , 便可在时间域上观察到所谓的 Ramsey 干涉图样.

### 3 数值模拟与结果分析

本文采用自适应的 4—5 阶龙格 - 库塔对方程 (3) 进行数值求解, 进而研究系统的动力学演化过程. 假设初始时刻两阱中的 BEC 原子数目相同, 即,  $N_1 = N_2 = N/2$ , 布居数差  $n = 0$ , 相对相位差  $q = 0$ , 然后对不同的独立演化时间  $T_F$  进行模拟, 计算两次脉冲结束以后粒子在两阱中的布居数差  $n$ , 便可以得到其随独立演化时间  $T_F$  而周期变化的 Ramsey 干涉图样. 计算中取  $h_0 = 1$ , 首先分别模拟了粒子间的非线性相互作用参数  $\mu$  以及脉冲周期  $T$  对干涉条纹的影响. 图 2 分别给出了不同的非线性

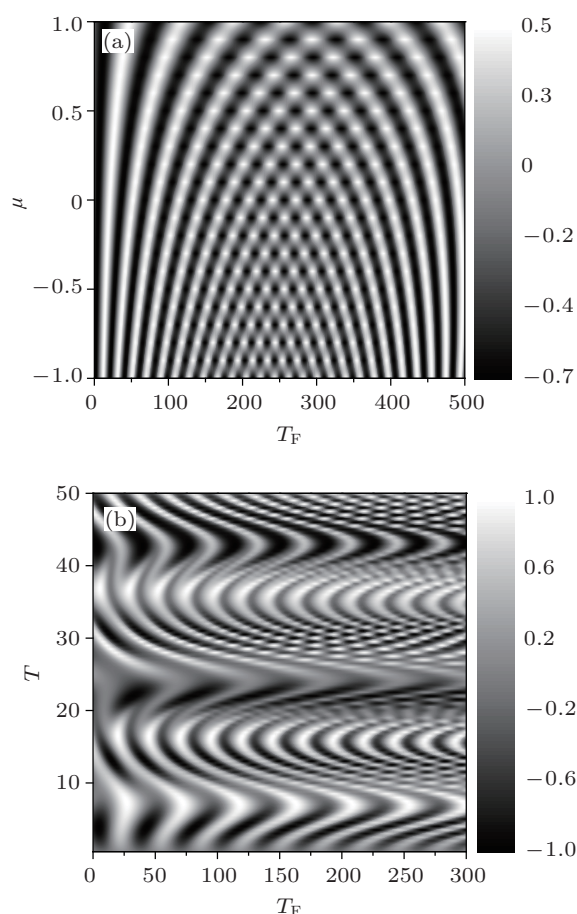


图 2 不同参数下的 Ramsey 干涉 (a) 粒子布居数差随粒子间非线性相互作用  $\mu$  变化的等高线分布; (b) 粒子布居数差随脉冲周期  $T$  变化的等高线分布; 计算中取两阱间基态能级差  $\varepsilon = 0.2$ , 粒子间相互作用  $\mu = 0.2$

性相互作用参数  $\mu$  以及脉冲周期  $T$  时, 粒子布居数差随自由演化时间  $T_F$  变化的等高线分布. 从图 2 中可以很直观地看出, 在不同的  $\mu$  和  $T$  取值下, 粒子布居数差  $n$  随自由演化时间  $T_F$  呈周期性变化的干涉图样.

### 3.1 粒子间非线性相互作用对干涉条纹的影响

为研究粒子间非线性相互作用对干涉条纹的影响, 这里取定两阱的基态能级差为  $\epsilon = 0.2$ , 高斯型脉冲的周期为  $T = 15$ , 并分别取粒子间的非线性相互作用系数  $\mu = 0.1, \mu = 0.5, \mu = 0.9$ , 对两阱间的粒子布居数差  $n$  和相对相位  $q$  进行计算, 结果如图 3 所示. 随着非线性相互作用强度的增加, 干涉图样由单频振荡向倍频振荡变化, 表现了丰富的干涉图样, 并且干涉图样的振荡周期逐渐增大. 最直接的表现如图 2(a) 所示, 随着粒子间非线性相互作用的增大, 干涉条纹的宽度逐渐变宽. 因此我们可

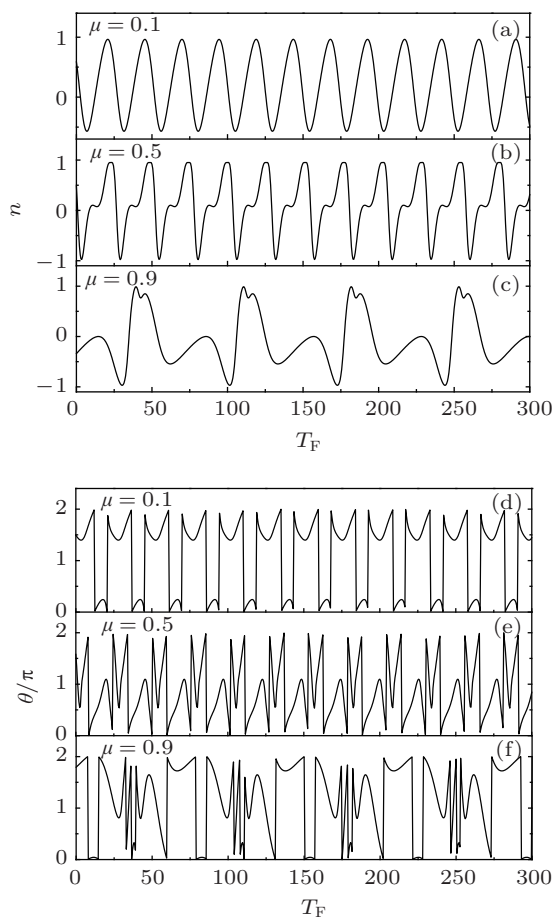


图 3 粒子间相互作用  $\mu$  取不同值时的 Ramsey 干涉 (a)—(c) 粒子布居数差的周期性变化; (d)—(f) 两阱间相对相位的周期性变化; 计算中取两阱间基态能级差  $\epsilon = 0.2$ , 脉冲周期  $T = 15$

以通过观测条纹的宽度来间接得到粒子间的非线性相互作用强度的大小.

### 3.2 高斯型脉冲的周期对干涉的影响

在两势阱的基态能级差  $\epsilon = 0.2$ , 粒子间的非线性相互作用常数  $\mu = 0.8$  的条件下, 分别对高斯型脉冲周期为  $T = 0.2, T = 20$  和  $T = 2000$  时的情况进行了模拟, 结果如图 4 所示. 随着脉冲周期的增加, 干涉条纹逐渐由单周期的正弦型振荡向多周期的矩形振荡过渡, 并且在快速扫描情况 ( $T = 0.2$ ) 和绝热扫描条件 ( $T = 2000$ ) 下, 两阱间粒子布居数的振荡幅度都会明显减小. 这是因为在快速扫描情况下, 系统难以跟随外场的快速变化而发生隧穿, 而在绝热情况下, 外场的变化又十分缓慢, 隧穿概率同样不会太高. 如图 2(b) 所示, 干涉条纹的宽度随脉冲周期的增大呈周期性的变化, 因此可以通过调节脉冲周期  $T$  的取值来调节干涉条纹的图样和振幅.

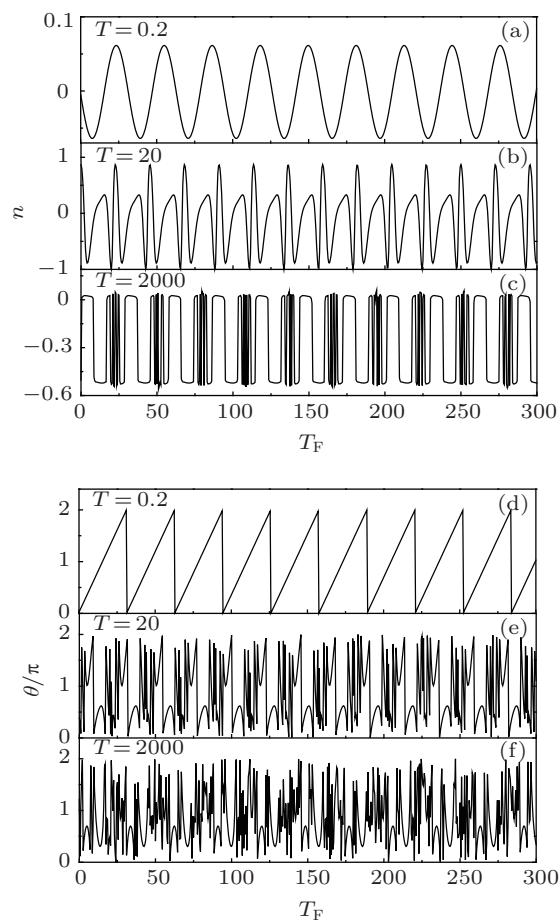


图 4 脉冲周期  $T$  取不同值时的 Ramsey 干涉图样 (a)—(c) 粒子布居数差的周期性变化; (d)—(f) 两阱间相对相位的周期性变化; 计算中取两阱间基态能级差  $\epsilon = 0.2$ , 粒子间相互作用  $\mu = 0.8$

### 3.3 对干涉条纹的频率分析

在本文的 Ramsey 干涉中, 干涉条纹的出现是由于在独立演化阶段, 两阱中的基态各自积累了一定的相位, 两者的相位差变化快慢直接决定了干涉图样频率的大小. 接下来分析相位差的动力学演化过程对干涉图样频率的影响. 在独立演化阶段, 系统的耦合常数  $\eta = 0$ , 由经典哈密顿量的正则关系

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial n}, \quad (5)$$

可以得到在该阶段内, 两阱间积累的相对相位差为

$$\begin{aligned} \theta &= \int_T^{T+T_F} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial n} dt \\ &= \int_T^{T+T_F} (\varepsilon + \mu n) dt = (\varepsilon + \mu n) T_F, \end{aligned} \quad (6)$$

其中  $n$  为第一个高斯脉冲结束后 ( $T$  时刻), 两阱间的布居数之差. 可以发现, 相位差与独立演化时间成正比, Ramsey 干涉图样的基频就对应着这个正比例系数, 即,  $\omega = |\varepsilon + \mu n|$ .

对不同脉冲周期  $T$  时的干涉图样进行傅里叶分析, 得到了相应的基频随非线性系数  $\mu$  的变化关系, 如图 5(a)—(c) 所示. 同时将第一个脉冲结束后的粒子布居数差带入频率表达式  $\omega = |\varepsilon + \mu n|$  中, 即可得到  $\omega$  随  $\mu$  的变化关系. 由图 5 中可以看出, 解析得到的结果与数值分析结果一致. 随着脉冲周期的增加, 干涉图样的基频与非线性相互作用系数  $\mu$  的关系逐渐由线性向非线性关系变化. 为了解释基频的变化, 我们计算了第一个脉冲结束后的粒子布居数差  $n$  随  $T$  和  $\mu$  的变化, 从图 5(d)—(f) 可以看出, 随着脉冲周期  $T$  的增大, 粒子布居数差的非线性振荡直接导致了干涉条纹基频的振荡.

## 4 结论

本文基于 Rosen-Zener 隧穿理论研究了双势阱 BEC 的非线性 Ramsey 干涉, 通过数值模拟计算得到了时间域上的干涉条纹, 主要讨论了粒子间相互作用以及高斯型脉冲周期对干涉图样的影响. 随着粒子间非线性相互作用的增强以及高斯型脉冲周期的增加, 干涉条纹都会由单一的正弦型振荡向多周期振荡变化, 从而导致倍频成分的产生. 通过哈密顿正则方程计算得到了干涉条纹的基频对相互

作用系数的依赖关系; 通过傅里叶变换对干涉条纹进行频率分析, 得到其基频并与理论预言进行比较, 发现两者符合得很好. 研究表明, 干涉图样的基频与粒子间的非线性相互作用以及外场的脉冲周期有着很大的关联, 利用这种关联我们可以通过测量干涉间接得到原子系统的相关参数. 在本文的讨论中, 两势阱的基态能级为非简并情况, 在简并情况下  $e = 0$ , 系统不存在  $e$  与  $mn$  的竞争, 零频点会随之减少, 同时本文仅讨论了快速扫描情况下干涉图样基频随非线性系数的变化关系, 在绝热近似以及一般情况下的干涉过程会更加复杂, 也会有更加丰富的物理现象值得我们去探讨.

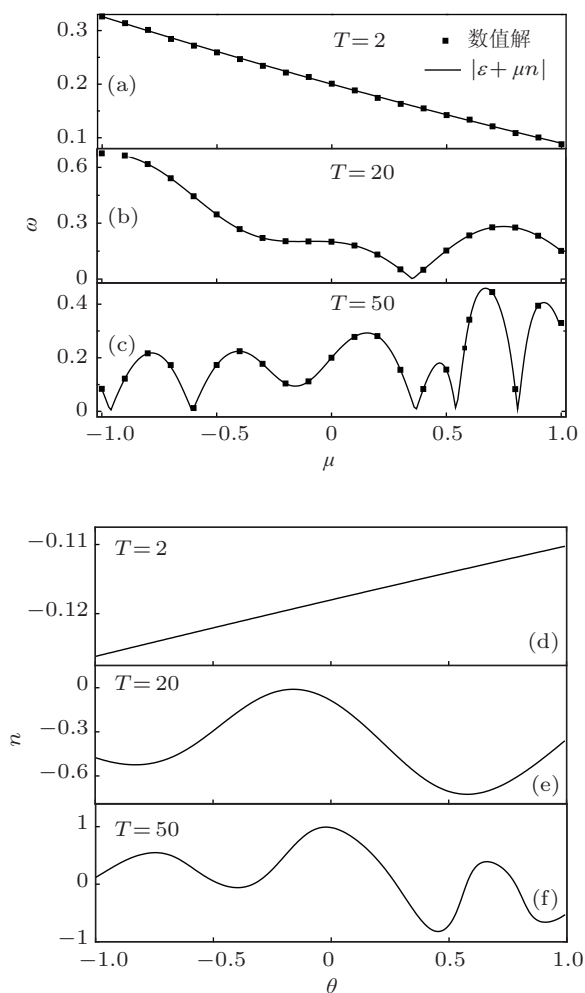


图 5 (a)—(c) 为不同脉冲周期  $T$  下干涉条纹基频随非线性相互作用系数的变化关系; (d)—(f) 为第一个脉冲结束后的粒子布居数差随非线性相互作用系数的变化关系; 计算中取  $\varepsilon = 0.2$

- [1] Ramsey N F 1950 *Phys. Rev.* **78** 695
- [2] Mousavi S V, Campo A del, Lizuain I, Muga J G 2007 *Phys. Rev. A* **76** 033607
- [3] Fertig C, Gibble K 2000 *Phys. Rev. Lett.* **85** 1622
- [4] Peters A, Chung K Y, Chu S 1999 *Nature* **400** 849
- [5] Canuel B, Leduc F, Holleville D, Gauguier A, Fils J, Virdis A, Clairon A, Dimarcq N, Bordé C J, Landragin A 2006 *Phys. Rev. Lett.* **97** 010402
- [6] Durfee D S, Shaham Y K, Kasevich M A 2007 *Phys. Rev. Lett.* **97** 240801
- [7] Gustavson T L, Bouyer P, Kasevich M A 1997 *Phys. Rev. Lett.* **78** 2046
- [8] Weiss D S, Young B N, Chu S 1993 *Phys. Rev. Lett.* **70** 2706
- [9] Grifoni M, Hanggi P 1998 *Phys. Rep.* **304** 229
- [10] Dalfovo F, Giorgini S, Pitaevskii L P, Stringari S 1999 *Rev. Mod. Phys.* **71** 463
- [11] Leggett A J 2001 *Rev. Mod. Phys.* **73** 307
- [12] Albiez M, Gati R, Fölling J, Hunsmann S, Cristiani M, Oberthaler M K 2005 *Phys. Rev. Lett.* **95** 010402
- [13] Liu J, Wu B, Niu Q 2003 *Phys. Rev. Lett.* **90** 170404
- [14] Xi Y D, Wang D L, She Y C, Wang F J, Ding J W 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 3720 (in Chinese) [奚玉东, 王登龙, 余彦超, 王凤姣, 丁建文 2010 物理学报 **59** 3720]
- [15] Wang S, Yang Z A 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 3699 (in Chinese) [王沙, 杨志安 2009 物理学报 **58** 3699]
- [16] Thomas G F 1983 *Phys. Rev. A* **27** 2744
- [17] Ye D F, Fu L B, Zhao H, Liu J 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 5071 (in Chinese) [叶地发, 傅立斌, 赵鸿, 刘杰 2007 物理学报 **56** 5071]
- [18] Wang J Z, Cao H, Dou F Q 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 220305 (in Chinese) [王建忠, 曹辉, 豆福全 2012 物理学报 **61** 220305]
- [19] Wang H L, Yang S P 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 4700 (in Chinese) [王海雷, 杨世平 2008 物理学报 **57** 4700]
- [20] Liu J, Wang W G, Zhang C W, Niu Q, Li B W 2005 *Phys. Rev. A* **72** 063623
- [21] Li L, Li Z D, Malomed B A, Mihalache D, Liu W M 2005 *Phys. Rev. A* **72** 033611
- [22] Kohler S, Sols F 2002 *Phys. Rev. Lett.* **89** 060403
- [23] Ma Y, Fu L B, Yang Z A, Liu J 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 5625 (in Chinese) [马云, 傅立斌, 杨志安, 刘杰 2006 物理学报 **55** 5625]
- [24] Li S C, Fu L B, Duan W S, Liu J 2008 *Phys. Rev. A* **78** 063621
- [25] Li S C 2010 *J. Phys. B* **43** 205303
- [26] Li S C, Duan W S 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 4396 (in Chinese) [栗生长, 段文山 2009 物理学报 **58** 4396]
- [27] Meng H J, Gou X Q, Wang W Y, Yang Y, Ma Y, M Y Y, Duan W S 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 197301 (in Chinese) [蒙红娟, 苟学强, 王元元, 杨阳, 马莹, 马云云, 段文山 2012 物理学报 **61** 197301]
- [28] Hua W, Li B, Liu X S 2011 *Chin. Phys. B* **20** 060308
- [29] Xi Y D, Wang D L, He Z M, Ding J W 2009 *Chin. Phys. B* **18** 939
- [30] Fang J S 2008 *Chin. Phys. B* **17** 3996
- [31] Lee C H, Huang J B, Deng H M, Dai H, Xu J 2012 *Front. Phys.* **7** 109

# Nonlinear Ramsey interference with Gaussian pulse\*

Chen Chao Tian Gang Yu Shu-Juan Yang Shi-Ping<sup>†</sup>

(College of Physics Science and Information Engineering, Hebei Normal University, Shijiazhuang 050024, China)

(Received 3 July 2013; revised manuscript received 13 August 2013)

## Abstract

According to the theory of nonlinear Rosen-Zener tunneling, we investigate the nonlinear Ramsey interference of Bose-Einstein condensate in a double-well potential with Gaussian pulse. Rich Ramsey fringes are shown by the numerical simulations. The influences on the fringes of the atom-atom interaction and the period of Gaussian pulse are discussed. We obtain the analytical expression for the fundamental frequency of Ramsey fringes by using Hamilton equation. The relation of the frequency to the interaction strength and the Gaussian-pulse period is found by analyzing the fringes through Fourier transformation. The numerical simulations are consistent with our theoretical predictions.

**Keywords:** Bose-Einstein condensate, Ramsey interference, Gaussian pulse

**PACS:** 52.35.Mw, 37.25.+k, 03.75.Lm

**DOI:** 10.7498/aps.62.225202

\* Project supported by the Natural Science Foundation of Hebei Province, China (Grant No. A2010000343).

† Corresponding author. E-mail: yangship@mail.hebtu.edu.cn