Klein-Gordon 方程 Q 球解中能量稳定性和扰动研究*

颜骏†

(四川师范大学物理系, 成都 610066)

(2013 年 7 月 30 日收到; 2013 年 8 月 30 日收到修改稿)

本文研究了一种复标量场模型中的双层 Q 球解, 在解析形式下计算了 Q 球荷和能量. 同时, 分析了其能量稳定性质, 通过 Klein-Gordon 方程获得了 Q 球能量的扰动表达式. 另外, 还讨论了 Q 球暗物质产生的物理效应.

关键词: Klein-Gordon 方程, Q 球解, 能量稳定性与扰动, 暗物质

PACS: 03.65.Ge, 03.65.Pm, 95.35.+d **DOI:** 10.7498/aps.62.230301

1 引 言

近年来天体粒子物理的研究表明暗物质已经成为宇宙的重要组成部分, 暗物质对宇宙结构的形成有重要影响, 但暗物质的本质还不清楚. 探究宇宙中暗物质的性质不仅对天体物理学和宇宙学有重要的意义, 而且对粒子物理也有着深远的影响. 1985 年 Coleman 在 Klein-Gordon 方程中获得了一种带荷非拓扑孤子 ——Q 球解 [1], Kusenko 等人指出超对称理论中可能存在这类 Q 球 [2]. 随后, 人们对 Q 物质进行了广泛研究, 如 Q 球经典解、Q 壁、规范场 Q 球等 [3,4]; Q 球还可以产生引力效应, 并形成大质量的 Q 星 [5,6]. 另外, Q 球作为暗物质的候选者引起了人们的广泛兴趣, 这些早期宇宙中产生的 Q 球暗物质有可能产生遗迹引力波效应和原初磁场 [7,8], 并在微波背景辐射的实验观察中得到进一步证实.

Q 球研究的基本问题是寻找各种不同势能形式下, 复 Klein-Gordon 场方程的解析解, 并计算相应的 Q 球荷和能量等物理量; 在此基础上研究 Q 球的能量稳定性质. 另外, 还可研究电磁场的作用的 Q 球解 [9], 早期宇宙中 Q 球随时间的演化解 [10], 以及蒸发与凝聚等物理效应. Q 球作为暗物质的候选者还可能产生粒子的辐射效应 [11,12], 并希望在暗物质的观测中得到进一步证实 [13,14]. 因此, 寻找各种不同形式的 Q 球解是非常有科学意义的, 本文将研究一种具有振荡形式的新的双层 Q 球解, 并且分析和讨论这一 Q 球解的能量稳定性和扰动性质. 目前已有文献研究不同形式 Klein-Gordon 场方程的束缚态解 [15,16], 可借鉴这些求解方法研究 Q 球模型中的各种解析解. 此外, 蒸发的量子化黑洞的基态可能存在一个接近普朗克质量的暗物质 [17], 这类 “暗星” 或 Planckon 粒子和 Q 球暗物质的关系, 以及在宇宙和星体演化中它们和暗能量的作用 [18−21], 将是今后研究中的一个很有趣的课题.

2 复 Klein-Gordon 方程的振荡 Q 球解

复标量场的拉氏密度可表示为

$$L = g^{nn}\frac{\partial\varphi^*}{\partial x^n}\frac{\partial\varphi}{\partial x^n} + m^2\varphi^*(x)\varphi(x) + V(\varphi_1,\varphi_2), \tag{1}$$

式中, φ 和 φ^* 是复标量场, 其两个分量为 $\varphi = \varphi_1 + \mathrm{i}\varphi_2$, $\varphi^* = \varphi_1 - \mathrm{i}\varphi_2$, g^{nn} 是闵可夫斯基空间度规, 势能 $V = V(\varphi_1,\varphi_2)$ 是复标量场两个分量的函数, m^2 是标量场质量, 球坐标下具有势能作用的 Klein-Gordon 方程为

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\varphi_i}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial\theta}\sin\theta\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\varphi_i}{\partial\alpha^2} - \frac{\partial^2\varphi_i}{\partial t^2} - m^2\varphi_i + \frac{1}{2}\frac{\partial V}{\partial\varphi_i} = 0, \tag{2}$$

---

* 四川省教育厅自然科学基金 (批准号: 11ZA100) 资助的课题.

† 通讯作者. E-mail: yanjun5@sina.com

 http://wulixb.iphy.ac.cn

现在研究 Klein-Gordon 方程 (2) 所存在的 Q 球解, 设复标量场 $\varphi_i=\varphi(r,t)$, 这时 φ_i 只与径向坐标 r 和时间 t 有关, 令

$$\varphi = f(r)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega} = f(r)(\cos\omega t+\mathrm{i}\sin\omega t). \tag{3}$$

为了获得 Klein-Gordon 方程的解, 本文取 $V=A\varphi\varphi^*=A\left(\varphi_1^2+\varphi_2^2\right)=Af^2$, 其中 A 为势能系数, 可取正值或负值, 当 $A>0$ 时对应于排斥势, $A<0$ 时对应于吸引势, ω 是振动频率. 此时方程 (2) 变为

$$\frac{\partial^2 f(r)}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial f(r)}{\partial r} +\omega^2 f(r)-m^2 f(r)-Af(r)=0. \tag{4}$$

为了求解径向方程 (4), 再令 $f(r)=u(r)/r$, 代入上式有

$$u''+\left(\omega^2-m^2-A\right)u=0. \tag{5}$$

当 $\omega^2-m^2-A>0$ 时, (5) 式的解析解为

$$u=B_1\cos\eta r+B_2\sin\eta r, \tag{6}$$

式中, B_1 和 B_2 是解的系数, $\eta=\sqrt{\omega^2-m^2-A}$, 显然, 上式中的 $B_1\cos\eta r$ 项将导致 $f(r)=u(r)/r$ 在 $r\to 0$ 时发散, 因此只能取 $u=B\sin\eta r$, 这里 $B=B_2$.

当 $\omega^2-m^2-A<0$ 时, 为了区别于第一种解, 将势能系数 A 换为 A', 同 (这) 时 $\beta=\sqrt{A'+m^2-\omega^2}$, 那么 (5) 式的解为

$$u=C_1\mathrm{e}^{\beta r}+C_2\mathrm{e}^{-\beta r}, \tag{7}$$

式中, C_1 和 C_2 是解的系数, β 是常数. 这种 Q 球解所对应的守恒量, 即 $U(1)$ 荷和及能量分别为

$$\begin{aligned} Q &= \int j^0\mathrm{d}^3x \\ &= \mathrm{i}\int \mathrm{d}^3x\left[\frac{\partial L}{\partial\left(\frac{\partial\varphi^*}{\partial t}\right)}\varphi^*-\frac{\partial L}{\partial\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)}\varphi\right] \\ &= 2\omega\int f^2r^2\sin\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\alpha, \end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned} E &= \int T^{00}\mathrm{d}^3x \\ &= \int\left(L-\frac{\partial L}{\partial\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)}\frac{\partial\varphi}{\partial t}-\frac{\partial L}{\partial\left(\frac{\partial\varphi^*}{\partial t}\right)}\frac{\partial\varphi^*}{\partial t}\right)\mathrm{d}^3x \\ &= \int\left[\left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial f}{\partial\theta}\right)^2 +\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\left(\frac{\partial f}{\partial\alpha}\right)^2 +\left(\omega^2+m^2+A\right)f^2\right]r^2\sin\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\alpha, \end{aligned} \tag{9}$$

式中 j^0 是 $U(1)$ 荷的密度, T^{00} 是能量动量张量的时间分量.

为了保持 Q 球荷和能量收敛, 具有物理意义的 Q 球解可能有以下两种情况: 在 0—R 区间上取第一种解 $f(r)=(B/r)\sin\eta r$, 另外在 R—$+\infty$ 区间上取第二种解 $f(r)=(C_3/r)\mathrm{e}^{-\beta r}$, 这种情况对应于两种双层 Q 球解. 下面对上述 Q 球解给定边界条件和连续性条件, 首先给出双层 Q 球中第一种解的边界条件, 设在 $r=0$ 处, 由 $f(0)=1$ 得解的一个系数

$$B=\frac{1}{\eta}, \tag{10}$$

再根据第一种解和第二种解所满足的连续性条件, 即在 $r=R$ 处, 设

$$f(R)=\frac{B}{R}\sin\eta R =\frac{C_3}{R}\mathrm{e}^{-\beta R}, \tag{11}$$

得解的第二个系数

$$C_3=B\mathrm{e}^{\beta R}\sin\eta R =\frac{1}{\eta}\mathrm{e}^{\beta R}\sin\eta R, \tag{12}$$

所以, 本文中所研究的复 Klein-Gordon 方程具有以下周期振荡形式的双层 Q 球解:

$$f(r)=\begin{cases}\dfrac{1}{\eta r}\sin\eta r, & 0-R, \\ \dfrac{1}{\eta r}\mathrm{e}^{\beta R-\beta r}\sin\eta R, & R-+\infty.\end{cases} \tag{13}$$

3 双层 Q 球的能量稳定性质

首先计算双层 Q 球解中的 $U(1)$ 荷和场的能量, 将解 (13) 式代入 (8) 式得如下双层 Q 球的总$U(1)$ 荷

$$\begin{aligned} Q &= Q_1+Q_2 \\ &= 2\pi\omega\frac{1}{\eta^3}(2\eta R-\sin 2\eta R) +4\pi\omega\frac{1}{\eta^2\beta}\sin^2\eta R. \end{aligned} \tag{14}$$

将这一解代入 (9) 式得如下的双层 Q 球的总能量:

$$E=E_1+E_2$$

$$
\begin{aligned}
&=4\pi\left[\frac{1}{\eta^2}\omega^2 R-\frac{1}{\eta^2}\frac{\sin^2\eta R}{R}\right.\\
&\quad -\frac{1}{2\eta^3}(m^2+A)\sin 2\eta R\\
&\quad \left.+\frac{1}{\eta^2}\left(\frac{1}{R}+\frac{A'+m^2}{\beta}\right)\sin^2\eta R\right]. \qquad (15)
\end{aligned}
$$

这里, 无论是球 Q 的总 $U(1)$ 荷还是总能量都随半经呈周期振荡形式. 接下来将根据解析方法证明双层球 Q 解在稳定性方面具有的新的性质. 能量 (15) 式对半经求一阶和二阶导数, 得

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial E}{\partial R}=&4\pi\omega^2\frac{1}{\eta^2}-4\pi(m^2+A)\\
&\times\frac{1}{\eta^2}\cos 2\eta R+4\pi\frac{1}{\eta\beta}\\
&\times(A'+m^2)\sin 2\eta R, \qquad (16)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 E}{\partial R^2}=&8\pi(m^2+A)\frac{1}{\eta}\sin 2\eta R\\
&+8\pi\frac{1}{\beta}(A'+m^2)\cos 2\eta R. \qquad (17)
\end{aligned}
$$

在 (16) 和 (17) 式中令

$$
\begin{aligned}
a&=\frac{\eta}{\beta}(A'+m^2),\\
b&=m^2+A,\\
c&=\omega^2, \qquad (18)
\end{aligned}
$$

则由 $\partial E/\partial R=0$ 推出如下三角函数方程:

$$a\sin 2\eta R-b\cos 2\eta R+c=0, \qquad (19)$$

这一方程的解为

$$
\begin{aligned}
2\eta R_{\rm c}=&\theta-(-1)^n\arcsin\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}+n\pi,\\
&n=0,1,2,\cdots \qquad (20)
\end{aligned}
$$

这里 $R_{\rm c}$ 为 Q 球的临界半径, 其中参量 a, b, c 由 (18) 式所决定, 所以临界半径与标量场的质量、势能系数和振动频率有密切关系. 当 n 取偶数时, 将 (20) 式代入 (17) 式得临界半径时能量的二阶导数

$$\left(\frac{\partial^2 E}{\partial^2 R}\right)_{R=R_{\rm c}}=8\pi\frac{1}{\eta}\sqrt{a^2+b^2-c^2}>0, \qquad (21)$$

式中

$$
\begin{aligned}
&a^2+b^2-c^2\\
=&\frac{\omega^2-m^2-A}{m^2+A'-\omega^2}\left(m^2+A'\right)^2+\left(m^2+A\right)^2-\omega^4, \quad (22)
\end{aligned}
$$

因此, 在临界半径时 Q 球的能量具有稳定性质. 同理, 当 n 取奇数得临界半径时能量的二阶导数

$$\left(\frac{\partial^2 E}{\partial^2 R}\right)_{R=R_{\rm c}}=-8\pi\frac{1}{\eta}\sqrt{a^2+b^2-c^2}<0. \qquad (23)$$

综上所述, 通过对 Q 球能量表达式进行的仔细分析, 结果表明 Q 球解存在着能量稳定性质; 偶数 Q 球能量处于稳定状态, 奇数 Q 球能量处于不稳定状态, 并且具有周期性的稳定点. 当 Q 球的半径很小时, Q 球不具有能量稳定性, 这是本文所获得的双层 Q 球解的一种新的物理特点.

4 双层 Q 球解的扰动和场能量的变化

在天体物理和宇宙学中存在着物质的各种扰动现象, 这些扰动包括标量、矢量和张量场的各种扰动. 在早期宇宙的暴胀过程中, 存在着扰动所产生的密度涨落现象, 这些扰动对宇宙中物质的大尺度结构形成将产生重要影响; 物质扰动也可能产生遗迹引力波效应, 并且可能在微波背景辐射的实验中得到进一步的探测. 另外, 黑洞引力场所产生的扰动, 将引起周围各种标量和费米物质的能量密度涨落 [22,23], 这些物质涨落可能产生一些可观测的物理效应. 本文将进一步研究 Klein-Gordon 方程双层 Q 球解的的扰动, 以及引起的场能量的变化.

Q 球模型中的标量场 f, 振动频率 ω 以及势能系数 A 都可能产生微小扰动, 受到扰动后的径向 Klein-Gordon 方程变为

$$
\begin{aligned}
&(\delta f)''+\frac{2}{r}(\delta f)'+2\omega(\delta\omega)f\\
&-m^2\delta f-A\delta f-(\delta A)f+\omega^2\delta f=0, \qquad (24)
\end{aligned}
$$

式中, δf, $\delta\omega$, δA 表示微小扰动量, 下面研究方程 (24) 可能存在的解. 令 $\delta f=\delta u/r$, 并将 (13) 式中的第一种解代入 (24) 式, 那么样在在 0—R 区间上有

$$(\delta u)''+\eta^2\delta u+2\omega(\delta\omega)B\sin\eta r-(\delta A)B\sin\eta r=0, \qquad (25)$$

方程 (25) 的解为

$$\delta u=\frac{2\omega\delta\omega-\delta A}{2\eta^2}r\cos\eta r, \qquad (26)$$

所以得扰动解

$$\delta f=\frac{\delta u}{r}=\frac{2\omega\delta\omega-\delta A}{2\eta^2}\cos\eta r. \qquad (27)$$

因此, 标量场的扰动不仅与振动频率、质量和势能系数有关, 而且与振动频率、势能的扰动和有密切关系.

将 (13) 式中的第二种解代入 (24) 式, 那么在 R—$+\infty$ 上有

$$(\delta u)''-\beta^2\delta u+[2\omega(\delta\omega)-(\delta A')]C_2\,{\rm e}^{-\beta r}=0, \quad (28)$$

方程 (28) 的解为

$$\delta u = \frac{2\omega\delta\omega - \delta A'}{2\beta\eta} r\,\mathrm{e}^{\beta R-\beta r}\sin\eta R, \tag{29}$$

所以得另一个扰动解

$$\begin{aligned}\delta f &= \frac{\delta u}{r}\\ &= \frac{2\omega\delta\omega - \delta A'}{2\beta\eta}\mathrm{e}^{\beta R-\beta r}\sin\eta R.\end{aligned} \tag{30}$$

这时, 标量场的扰动与不仅与振动频率、质量和势能系数有关, 也与振动频率、势能的扰动有关, 还与 Q 球半径有密切关系. 扰动解引起的场能量的变化量为

$$\begin{aligned}\delta E =& 4\pi\int\Big[\Big(\frac{\partial(f+\delta f)}{\partial r}\Big)^2\\ &+\big(\omega^2+m^2+A\big)\big(f+\delta f\big)^2\Big]r^2\,\mathrm{d}r\\ \approx& 8\pi\int\Big[\frac{\partial f}{\partial r}\cdot\frac{\partial\delta f}{\partial r}+\big(\omega^2\\ &+m^2+A\big)f\delta f\Big]r^2\,\mathrm{d}r.\end{aligned} \tag{31}$$

同理, 将两个区间上标量场的扰动解代入 (31) 式, 得到场能量的变化量为

$$\begin{aligned}\delta E_1 =& 8\pi\int_0^R\Big[\frac{1}{\eta r^2}(\eta r\cos\eta r-\sin\eta r)\\ &\times\frac{\delta A-2\omega\delta\omega}{2}\eta\sin\eta r+\big(\omega^2+m^2+A\big)\\ &\times\frac{1}{r}\sin\eta r\frac{2\omega\delta\omega-\delta A}{2\eta^3}\cos\eta r\Big]r^2\,\mathrm{d}r\\ =&\frac{\pi}{2\eta^5}(2\omega\delta\omega-\delta A)\\ &\times[4\eta^3R+2(\eta^2+\omega^2)\sin2\eta R\\ &-4(m^2+A)\eta R\cos2\eta R],\end{aligned} \tag{32}$$

以及

$$\begin{aligned}\delta E_2 =& 8\pi\int_R^{+\infty}\Big[\frac{C_2}{r^2}(-\beta r-1)\,\mathrm{e}^{-\beta r}\frac{2\omega\delta\omega-\delta A'}{2\beta}\\ &\times C_2(-\beta)\,\mathrm{e}^{-\beta r}+(\omega^2+m^2+A)\\ &\times\frac{C_2}{r}\,\mathrm{e}^{-\beta r}\frac{2\omega\delta\omega-\delta A'}{2\beta}C_2\,\mathrm{e}^{-\beta r}\Big]r^2\,\mathrm{d}r\\ =&\pi\frac{(2\omega\delta\omega-\delta A')}{\eta^2\beta^3}[(2\beta R+1)\\ &\times(2m^2+A+A')+2\beta^2]\sin^2\eta R,\end{aligned} \tag{33}$$

所以, 整个区间上的场能量变化量为

$$\begin{aligned}\delta E =& \delta E_1+\delta E_2\\ =&\frac{\pi}{\eta^5}(2\omega\delta\omega-\delta A)[2\eta^3R+(\eta^2+\omega^2)\\ &\times\sin2\eta R-2(m^2+A)\eta R\cos2\eta R]\\ &+\frac{\pi}{\beta^5}(2\omega\delta\omega-\delta A')[(2\beta R+1)\\ &\times(2m^2+A+A')+2\beta^2]\sin^2\eta R.\end{aligned} \tag{34}$$

由 (34) 式可以得出, 双层 Q 球中标量场振动频率和势能系数都可以产生扰动, 这些扰动将使 Q 球能量发生微小的变化. 其中, 能量的变化不仅与振动频率、质量和势能系数有关, 而且与振动频率、势能的扰动有关, 还与 Q 球半径有密切关系. 与扰动前双层 Q 球解的情况类似, 扰动变化量也随半径呈周期性振荡, 将双层 Q 球的临界半径代入, 可进一步计算出稳定状态时扰动引起的场能量的改变量, 这里不再详细讨论.

5 结 论

本文首先推导了球坐标下的 Klein-Gordon 方程, 当势能取为 $V = A\varphi\varphi^*$ 的形式时, 获得了两个双层 Q 球解, 并进一步对双层 Q 球解能量的精确表达式及近似表达式进行了仔细的分析. 结果发现, 在 0—R 的区间上取第一种解 $f(r) = (1/\eta r)\sin\eta r$, 在 R—$+\infty$ 区间上取第二种解 $f(r) = (C_3/r)\,\mathrm{e}^{-\beta r}$, 这时双层 Q 球解时具有能量稳定性质, 其能量随 Q 球半径振荡增大, 并且有多个能量稳定点; 当 Q 球的半径很小时, Q 球不具有能量稳定性, 这是本文所获得的 Q 球解的一种新的物理特点.

其次, 本文还计算了 Klein-Gordon 方程扰动引起的双层 Q 球的场能量变化量. 结果表明, 当 Q 球中标量场、振动频率和势能系数产生扰动时, 那么这些扰动将使 Q 球能量发生微小的变化. 这里, 能量的变化不仅与振动频率、质量和势能系数有关, 而且与振动频率、势能的扰动有关, 还与 Q 球半径有密切关系. 同时发现, 扰动变化量也随半径呈周期性振荡, 这与扰动前所对应的物理量的情况类似. 这些扰动将引起 Q 球的能级的改变, Q 球能量稳定时的能级改变与各种扰动有密切关系. 扰动引起的能量改变越大, 那么跃迁辐射所产生的能量越大, 所以扰动后的 Q 球也会释放出一些微观粒子, 不过其辐射的能量强度与各种扰动有关, 这些物理效应可能在暗物质的实验探测中得到进一步的证实.

[1] Coleman S 1985 *Nucl. Phys.* B **262** 263
[2] Kusenko A, Shaposhnikov M 1998 *Phys. Lett.* B **418** 46
[3] MacKenzie R B, Paranjape M B 2001 *JHEP.* **0108** 3
[4] Kusenko A, Shaposhnikov M , Tinyakov P G 1998 *Pisma Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **167** 229
[5] Verbin Y 2007 *Phys. Rev.* D **76** 085018
[6] Kleihaus B, Kunz J, List M, Schaffer I 2008 *Phys. Rev.* D **77** 064025
[7] Kusenko A, Mazumdar A 2008 *Phys. Rev. Lett.* **101** 211301
[8] Shiromizu T 1998 *Phys. Rev.* D **58** 107301
[9] Arodz H, Lis J 2009 *Phys. Rev.* D **79** 045002
[10] Palti E, Saffin P M ,Copeland E J 2004 *Phys. Rev.* D **70** 083520
[11] Bakari D, Dekhissi H, Derkaoui J, Giacomelli G, Mandrioli G, Ouchrif M, Patrizii L, Popa V 2001 *Astropart. Phys.* **15** 137
[12] Clark S 2006 *Nucl. Phys.* B **756** 38
[13] Sahnoun Z 2009 *Radiat. Mea.* **44** 894
[14] Ouchrif M 2000 *Nucl. Phys. Proc. Suppl.* **85** 231
[15] Zhou Q, Lü B B, Tian Q 2010 *Chin. Phys.* B **19** 066301
[16] Chetouani L, Chargui Y, Trabelsi A 2010 *Chin. Phys.* B **19** 020305
[17] Liu L, Pei S Y 2006 *Acta Phys Sin.* **55** 4980 (in Chinese) [刘辽, 裴寿镛 2006 物理学报 **55** 4980]
[18] Chen J H, Wang Y J 2010 *Chin. Phys.* B **19** 010401
[19] Lü J B, Wu Y B, Xu L X, Wang Y T 2011 *Chin. Phys.* B **20** 079801
[20] Li Ji G, Yan J, Zou B X, Su W J 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 050301 (in Chinese) [李季根, 颜骏, 邹伯夏, 苏文杰 2011 物理学报 **60** 050301]
[21] Su W J ,Yan J 2012 *Can. J. Phys.* **90** 1279
[22] Zou B X, Yan J, Li J G 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 7602 (in Chinese) [邹伯夏, 颜骏, 李季根 2010 物理学报 **59** 7602]
[23] Zou B X, Yan J, Li J G , Su W J 2011 *Gen. Rel. Grav.* **43** 305

Study of energy stability and perturbation in the Q-ball solutions of Klein-Gordon equation*

Yan Jun†

(*Department of Physics, Sichuan Normal University, Chengdu* 610066*, China*)

(Received 30 July 2013; revised manuscript received 30 August 2013)

Abstract

The two-layer Q-ball solutions in the complex scalar field model are studied in this paper, and the Q-ball charge and energy are calculated in an analytical form. Meantime, the energy stability is analyzed, and the perturbative expression of Q-ball is obtained by means of Klein-Gordon equation. Moreover, the physical effect of Q-ball dark matter is also discussed.

Keywords: Klein-Gordon equation, Q-ball solutions, energy stability and perturbation, dark matter

PACS: 03.65.Ge, 03.65.Pm, 95.35.+d **DOI:** 10.7498/aps.62.230301

* Project supported by the Natural Science Foundation of the Sichuan Education Committee, China (Grant No. 11ZA100).

† Corresponding author. E-mail: yanjun5@sina.com