

## 一种混沌映射的相空间去噪方法\*

吕善翔 冯久超†

(华南理工大学, 电子与信息学院, 广州 510641)

(2013年8月8日收到; 2013年8月27日收到修改稿)

对于混沌映射来说, 它们的频谱比混沌流的频谱更广阔, 与噪声频谱的重叠率更高, 所以混沌流的去噪方法对它们并不适用. 在半盲分析法的框架下, 混沌系统的参数估计问题终将归结为最小二乘估计问题. 本文从最小二乘拟合的角度出发估计混沌映射的演化参数, 进而通过相空间重构以及投影操作, 实现对观测信号的噪声抑制. 实验结果表明, 该算法的去噪效果优于扩展卡尔曼滤波器 (extended Kalman filter, EKF) 和无先导卡尔曼滤波器 (unscneted Kalman filter, UKF), 并且能够较大程度地将信号源的混沌特征量还原.

**关键词:** 混沌, 噪声抑制, 相空间重构, 投影

**PACS:** 05.45.-a, 05.40.Ca

**DOI:** 10.7498/aps.62.230503

## 1 引言

混沌现象是指发生在确定性系统中的貌似随机的不规则运动, 它在非线性系统中普遍存在, 是非线性动力系统的固有特性. 混沌系统可以由完全确定的方程描述, 无需附加任何随机因数, 但系统仍会表现出类似随机性的行为. 从混沌系统产生的混沌信号具有功率谱宽带性和似噪声性, 其广泛存在于气象, 水文, 医学, 以及电子等众多领域. 由于实际观测的混沌信号中都不同程度的含有噪声, 而噪声的存在严重影响了关联维数, Kolmogorov 熵和 Lyapunov 指数等混沌特征量的计算, 给进一步的混沌数据分析和研究<sup>[1,2]</sup>带来了困难. 另一方面, 因为其混沌信号的频带具有与噪声频带相似的特征, 传统的频谱分析方法和线性滤波方法并不适用于混沌信号<sup>[3]</sup>, 所以研究混沌信号的去噪方法具有重要的理论意义和实用价值<sup>[4,5]</sup>.

当前, 对混沌信号的去噪方法可以分为两大类: 盲分析法和半盲分析法. 1) 盲分析法意味着接收端不知道信源的任何先验知识. 这类方法包括小波收缩算法 (wavelet shrinkage, WS)<sup>[6,7]</sup>, 局部拟合算

法<sup>[8,9]</sup>, 经验模态分解 (empirical mode decomposition, EMD) 算法<sup>[10]</sup>, 以及局部投影算法 (local projection, LP)<sup>[11,12]</sup>. 其中, WS 算法将原信号在多个层次展开为粗纹理部分和细纹理部分之后, 动态地给每个细纹理部分确定一个域值, 然后将该域值之上的系数归零, 不同的 WS 算法表现在对域值的选择方案不同; 局部拟合算法是以部分重叠的方式对观测信号分段, 在利用低阶多项式对每个片段拟合之后再再用金字塔的形式将重叠部分还原, 它类似于分段的低通滤波算法; EMD 算法可以看成 WS 算法的一种扩展形式, 它的扩展之处在于能够根据信号特性通过迭代的方式自适应地获取基函数和分解层次. 上述三种算法本质上都是低通滤波算法, 只适用于混沌流信号 (例如, Lorenz 信号, Rossler 信号等). 对于 LP 算法来说, 它需要将观测信号按照设定球半径来分群并且使用 SVD 确定信号子空间, 然而球半径参数不易选取, 群落的大小对算法性能影响很大, 选取信号子空间向量个数的阈值不易确定, 并且整个算法的去噪的效果仅在信噪比很大时较好; 因此, LP 算法很难推广应用. 2) 半盲分析法是指接收端知道或部分知道源混沌系统的动力学特性, 这些方法主要包括: 扩展卡尔曼滤波

\* 国家自然科学基金 (批准号: 60872123)、国家-广东省自然科学基金联合基金 (批准号: U0835001)、广东省高层次人才项目基金 (批准号: N9101070) 和中央高校基本业务费 (批准号: 2012ZM0025) 资助的课题.

† 通讯作者. E-mail: fengjc@scut.edu.cn

(extended Kalman filter, EKF) 算法<sup>[13,14]</sup>, 无先导卡尔曼滤波 (unscented Kalman filter, UKF) 算法<sup>[15]</sup> 以及容积卡尔曼滤波 (cubature Kalman filter, CKF) 算法<sup>[16,17]</sup>. 其中, EKF 是将状态方程和测量方程线性化后使用卡尔曼滤波算法, 而这步线性化操作使得算法的计算复杂度更高 (因为要计算雅可比矩阵) 并且估计精度降低<sup>[13]</sup>. UKF 的基本思想是使用无先导变换方法, 以一组确定的取样点来获取信号的均值和方差, 然后利用系统方程直接求解变换后的随机向量的均值的协方差的估计值, 它的滤波性能优于 EKF 且时间复杂度与 EKF 接近. CKF 采用一组等权值的容积点集解决贝叶斯滤波的积分问题, 即使用容积数值积分原则计算非线性变换后的随机变量的均值和协方差; 尽管 CKF 的非线性逼近性能比 EKF 和 UKF 更好, 不过文献<sup>[17]</sup>表明, CKF 的去噪效果与 UKF 几乎一致. 值得注意的是, 上述几种卡尔曼滤波算法对信号输出信噪比的提高都不够理想.

本文的目的是在不知混沌映射的演化参数的前提下实现对观测序列最大程度的噪声抑制. 在半盲分析法的框架下, 混沌系统的参数估计问题最终归结为最小二乘估计问题, 进而在拟合出混沌系统最可能出现的相空间轨迹之后, 将观测数据相空间重构并使它们往估计的流形上投影就可以实现一种全局意义上的去噪. 本文剩余部分的逻辑结构如下: 首先引入所提算法的基本原理, 随之给出本文算法的具体步骤并分析其特点. 最后通过计算机仿真实验对算法的有效性进行验证和分析并得出结论.

## 2 算法原理

混沌映射和混沌流的一个区别是它们分别通过离散时间和连续时间对物理系统进行建模. 假设所研究的混沌映射为  $F: M \rightarrow M$ , 其中,  $M \in \mathbb{R}^{d_A}$ ,  $d_A$  是映射的空间维. 因而服从映射规则  $F$  的向量  $s(n)$  可表述为

$$s(n) = F(s(n-1), a), \quad (1)$$

其中  $s(n)$  表示在时刻  $n$  的向量,  $a = [a_0, \dots, a_M]$  是该映射的演化参数, 本文假设它是未知量.

现考虑从该物理系统中测量一组标量数据  $s(n)$ , 这些观测值往往混合着高斯白噪声信号  $\eta(n)$ . 从而被噪声污染的观测值  $y(n)$  表述为

$$y(n) = s(n) + \eta(n),$$

$$n = 1, 2, 3, \dots, N. \quad (2)$$

将方程 (2) 的一维映射表达式记为  $f_y(s)$ , 如果不利用对  $a$  的最大后验估计值来构造信号子空间, 函数  $f_y(s)$  可以用多项式  $p_n(s)$  来逼近到任意精确, 这由维尔斯特拉斯 (Weierstrass) 给出的下述定理<sup>[18]</sup> 所保证.

**定理1** 设  $s \in \mathbb{R}[a, b]$ , 对任意给定的  $\varepsilon > 0$ , 总存在一个代数多项式  $p_n(s)$ , 使得

$$\sup_{a \leq s \leq b} |f_y(s) - p_n(s)| < \varepsilon. \quad (3)$$

伯恩斯坦 (Bernstein) 给出了对该定理的构造性证明, 也即为通过构造 Bernstein 多项式

$$B_n(f_y(s), s) = \sum_{k=0}^n C_n^k f_y\left(\frac{k}{n}\right) s^k (1-s)^{n-k}, \quad (4)$$

取  $p_n(s) = B_n(f_y(s), s)$  可以证明  $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n(s) = f_y(s)$  成立<sup>[18]</sup>. 一方面, 在实际计算时我们希望以较低的 Bernstein 多项式次数来逼近  $f_y(s)$  从而实现噪声抑制以及减少计算工作量. 另一方面, 混沌映射的观察值  $y(n)$  的  $n \rightarrow y(n)$  关系不是渐变的, 这限制了直接使用主成分分析方法对观察方程 (2) 降噪的可能性<sup>[19]</sup>. 因此, 利用 (1) 的估计表达式来构造 (2) 的信号子空间是理想的选择. 这里涉及到的一个问题是: 对 (1) 和 (2) 的估计都不可避免地有误差, 在估计的过程中该如何控制它们之间的误差传播方式? 与卡尔曼系列算法<sup>[13-17]</sup> 不同的是, 本文采用整体估计的形式先对方程 (1) 求出所有的先验估计值  $\bar{s}(n)$ , 再结合方程 (2) 的所有观察值进行最大后验概率估计得出  $\hat{s}(n)$ , 其误差传播方式如图 1 所示.

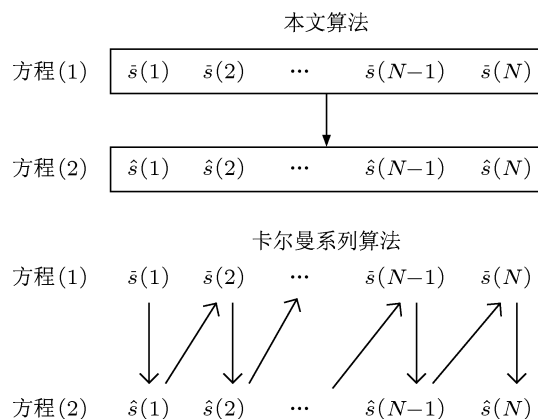


图 1 本文算法的误差传播方式与卡尔曼系列算法的区别

对  $\bar{s}(n)$  整体的估计可以归结为: 给定  $n$  个数据向量  $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n$ , 希望找出  $M+1$  个常数  $a_0, a_1, \dots, a_M$ , 使得用线性组合  $\bar{s}(n) = \sum_{i=0}^{M+1} a_i \phi_i$  拟合未知随机变量  $s(n)$  时, 拟合误差向量的均方值最小.

因此, 通过最佳线性均方估计方法可以求出  $a_0, a_1, \dots, a_M$ . 接下来, 尽管状态方程 (1) 的初值未知, 仍然可以利用  $\mathbf{a}$  遍历该非线性流形  $M$  所有可能出现的相空间轨迹点, 从而建立一个光滑的相空间流形. 由于观测数据的分布也满足一个粗糙的流形, 且该粗糙流形与建立的光滑流形之间存在同胚平滑的非线性变换, 所以只要使得在相空间定义的观测数据与修正数据的误差函数达到最小, 就可求出一个修正的相空间流形. 最后, 把修正的流形还原成一维时间序列就可以求出降噪之后的数据.

### 3 算法描述

对应上一节所述的算法原理, 由方程 (1) 和 (2) 定义的问题可以通过下述 3 个步骤实现噪声抑制.

#### 步骤1 估计演化参数.

将 (1) 所描述的向量方程组合并为一个自变量的多时延形式

$$s(n) = f(s(n-1), \mathbf{a}), \quad (5)$$

其中  $\mathbf{s}(n-1)$  是由  $s(n-1)$  及后向的  $M-1$  个时延

值组成的向量. 接下来, 假设  $s(n) \in \text{Span}\{\phi_0(s(n-1)), \dots, \phi_M(s(n-1))\}$ , 里面每个  $\phi_i(s(n-1))$  都是一个多元函数表达式 (也可以退化为一元函数表达式), 则有

$$s(n) = \sum_{i=0}^M a_i \phi_i(s(n-1)), \quad (6)$$

注意到  $\mathbf{s}(n-1)$  的时间尺度可取值范围是  $(n-1) \in [M+1, N]$ . 由于  $y(n) = s(n) + \eta(n)$ , 在最佳平方逼近意义下对  $\mathbf{a}$  的估计意味着要使

$$\delta = \sum_{n=M+1}^N \left[ y(n) - \sum_{i=0}^M a_i \phi_i(s(n-1)) \right]^2 \rightarrow \min, \quad (7)$$

这是一个求多元函数的极小值问题; 令

$$\frac{\partial \delta}{\partial a_i} = 2 \sum_{n=M+1}^N \left[ y(n) - \sum_{i=0}^M a_i \phi_i(s(n-1)) \right] (-\phi_i(s(n-1))) = 0, \quad (8)$$

因为  $M \ll N$ , 方程 (8) 展开产生的独立方程的个数远远多于未知数个数, 于是引入矩阵

$$\mathbf{A} \triangleq \begin{bmatrix} \phi_0(\mathbf{s}(M+1)) & \phi_1(\mathbf{s}(M+1)) & \dots & \phi_M(\mathbf{s}(M+1)) \\ \phi_0(\mathbf{s}(M+2)) & \phi_1(\mathbf{s}(M+2)) & \dots & \phi_M(\mathbf{s}(M+2)) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \phi_0(\mathbf{s}(N)) & \phi_1(\mathbf{s}(N)) & \dots & \phi_M(\mathbf{s}(N)) \end{bmatrix}, \quad (9)$$

从而方程 (8) 的解为

$$\mathbf{a} = (\mathbf{A}\mathbf{A}^T)^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{y}. \quad (10)$$

其中  $\mathbf{y} = [y(M+1), \dots, y(N)]^T$ . 综上所述, 只要利用方程 (5) 写出  $\phi_i(s(n-1))$  的具体表达式, 并将观测所得数据  $y(n)$  代入其中构造出矩阵  $\mathbf{A}$ , 就能通过式子 (10) 得出参数  $\mathbf{a}$  的最小二乘拟合值.

#### 步骤2 将观测序列投影到估计的相空间.

以时间延迟重构的方法<sup>[20]</sup>对  $y(n)$  通过后向时延的方式进行相空间重构, 可以得到其在欧几里得空间  $\mathbf{R}^d$  的状态向量为

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(n) = & [y(n), y(n-\Delta), y(n-2\Delta), \\ & \dots, y(n-(d-1)\Delta)]^T, \\ & n = 1 + (d-1)\Delta, \dots, N. \end{aligned} \quad (11)$$

其中  $d$  是嵌入维数,  $\Delta$  是时延. 本文主要研究离散混沌信号, 所以令  $\Delta = 1$ ; 此处, 嵌入维数  $d$  可以取

值为所研究的混沌映射的空间维加 1.

由于  $F: M \rightarrow M$  在统计意义上是光滑的, 这里利用演化参数  $\mathbf{a}$  来估计真实混沌映射的相空间轨迹, 估计的轨迹  $M''$  可以结合方程 (5) 计算得出: 记  $\mathbf{v}''(i) = [\mathbf{v}''_1(i), \mathbf{v}''_2(i), \dots, \mathbf{v}''_d(i)]^T$  是估计轨迹的相空间向量, 以  $\mathbf{v}''_1(i), \dots, \mathbf{v}''_{d-1}(i)$  为自变量, 代入方程 (5) 可得出因变量  $\mathbf{v}''_d(i)$ . 其中, 自变量  $\mathbf{v}''_1(i), \dots, \mathbf{v}''_{d-1}(i) \in \left[ \min(y(n)) : \frac{\max(y(n)) - \min(y(n))}{N'} : \max(y(n)) \right]$ ,  $N'$  称为估计精度.  $N'$  的取值下限是使得  $\frac{\max(y(n)) - \min(y(n))}{N'} < R_1$ ,  $R_1$  是噪声强度.

在得到观测值的状态向量  $\mathbf{v}(n)$  和估计的相空间轨迹  $M''$  之后, 将投影得到的向量记为  $\mathbf{v}'(n)$ , 那么它是  $\mathbf{v}(n)$  与流形  $M''$  的所有轨迹点的欧氏距离最小的一点, 并且  $\mathbf{v}(n) - \mathbf{v}'(n)$  与切空间  $T_{\mathbf{v}'(n)} M''$

正交. 对  $\mathbf{v}'(n)$  的求解可以通过以下方程得出:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}'(n) = \arg \min_{\mathbf{v}''(i)} \{ \|\mathbf{v}(n) - \mathbf{v}''(i)\| \}, \\ i \in [1, (N')^{d-1} \prod_{i=1}^{d-1} N'], \\ n \in [d, N]. \end{aligned} \quad (12)$$

**步骤3** 将修正的相空间序列还原为一维时间序列.

在投影操作之后得到的相空间序列为  $\mathbf{v}'(n)$ ,  $n \in [d, N]$ . 显然, 当相空间重构的嵌入维数大于 1 时,  $\mathbf{v}'(n)$  与  $\mathbf{v}'(n+1)$  里面对应的时间序列是有重叠的. 同样地, 此处使用最小平方误差准则来求解还原的一维时间序列  $\hat{s}(n)$ , 这意味着要使得

$$\varepsilon = \sum_{n=d}^N \sum_{i=1}^d \{ \mathbf{v}'_i(n) - \hat{s}(n-i+1) \}^2 \rightarrow \min, \quad (13)$$

其中  $\mathbf{v}'_i(n)$  是向量  $\mathbf{v}'(n)$  的第  $i$  个元素. 记  $\hat{s}(n)$  在 (13) 式中的出现次数为  $P$ ,  $P \in [1, d]$ , 那么  $\hat{s}(n)$  对应的误差函数为

$$J_n = \sum_{i=1}^P \{ \mathbf{v}'_i(n+i-1) - \hat{s}(n) \}^2. \quad (14)$$

(14) 式等效于一个  $C$  均值聚类的问题模型<sup>[21]</sup>,  $\hat{s}(n)$  是其聚类中心. 令  $\frac{\partial J_n}{\partial \hat{s}(n)} = 0$  可以求得

$$\begin{aligned} \hat{s}(n) = \frac{1}{P} \sum_{i=1}^P \mathbf{v}'_i(n+i-1), \\ n \in [1, N]. \end{aligned} \quad (15)$$

到此,  $\hat{s}(n)$  给出了对于观测到的时间序列  $y(n)$  的去噪结果.

## 4 算法分析与比较

既然本文算法首先估计混沌映射的演化参数, 那么构造拟合轨迹的过程是否可以通过赋予初值并进行迭代的方式进行? 答案是否定的, 因为混沌映射对初值和演化参数很敏感, 而每次估得的  $\mathbf{a}$  都是有误差的 (特别地, 当噪声较大时估得的  $\mathbf{a}$  不能产生混沌), 所以即使迭代出来的轨迹点个数  $N_x \gg N$ , 它们所构造的轨迹仍然具有非常大的误差. 类似地, 利用估计的相空间演化表达式来直接求解投影点也是不可行的. 记误差函数为  $\delta_{\mathbf{v}(n)} = \|f(\mathbf{v}'(i)) - \mathbf{v}(n)\|^2$ , 它是一个二次型表达式, 因此直接利用牛顿法, 令  $\frac{\partial \delta_{\mathbf{v}(n)}}{\partial \mathbf{v}'(i)} = 0$  可得

$f(\mathbf{v}'(i)) = \mathbf{v}(n)$ . 对于大部分的混沌映射来说, 这是一个多元多次方程组, 不易求解. 综上, 方程 (12) 所用的求  $\mathbf{v}'(n)$  的方法是相对较为容易的.

本文的去噪方法属于批处理方法, 这样做的好处是可以利用足够多的统计信息来实现最优估计. 相对地, EKF 和 UKF 是在线估计方法, 受限于每一步所使用的极小统计信息, 它们的有效实施要依赖更多的先验知识. 具体来说, EKF 及 UKF 都要显式地用到观测方程的噪声协方差数值, 然而对于实际观测的数据来说, 这个物理量是未知的. 另外, EKF 和 UKF 里面的一些参数都要经过仔细调整以达到最优效果: 比如 EKF 状态方程的噪声协方差, 以及 UKF 里面构造无先导矩阵的缩放参数. 总的来说, 本文算法的参数设置更简单, 并且对先验知识的依赖更少.

## 5 实验验证

为了验证本文所提算法的有效性, 此处分别考察其对 Logistic 映射和 Hénon 映射的降噪性能, 以及原始信号的混沌特征量是否能够得到还原. 在实验中, 算法的去噪效果一方面可以从相图直观地反映, 另一方面也可以通过计算输入和输出信噪比 (SNR, Signal to Noise Ratio) 来定量分析,  $\text{SNR}_{\text{in}}$  和  $\text{SNR}_{\text{out}}$  的定义分别为

$$\text{SNR}_{\text{in}} = 10 \lg \frac{\sum_{n=1}^N s^2(n)}{\sum_{n=1}^N \eta^2(n)}, \quad (16)$$

$$\text{SNR}_{\text{out}} = 10 \lg \frac{\sum_{n=1}^N s^2(n)}{\sum_{n=1}^N (\hat{s}(n) - s(n))^2}, \quad (17)$$

其中,  $\text{SNR}_{\text{in}}$  是人工控制产生, 每次实验结果都是运行 500 次蒙特卡洛仿真之后得出.

### 5.1 对信噪比的影响

#### 例子1

Logistic 映射的经典表达式是<sup>22</sup>:  $s(n) = k_0 s(n-1)(1-s(n-1))$ ; 当参数  $k_0 \in [3.57, 4]$  时, 该映射具有奇异吸引子. 这个例子里取  $k_0 = 3.9$ , 并迭代产生长度为  $N = 2000$  的  $s(n)$ . 设置  $\text{SNR}_{\text{in}} = 20 \text{ dB}$ , 得到  $y(n)$  的相图如图 2 所示. 令  $\phi_0(s(n-1)) = 1$ ,  $\phi_1(s(n-1)) = y(n-1)$ ,  $\phi_2(s(n-1)) = y^2(n-1)$ ,  $N' = 100$ ,  $d = 2$ , 然后应用本文算法进行去噪, 可得  $\text{SNR}_{\text{out}} = 24.17 \text{ dB}$ , 对应  $\hat{s}(n)$  的相图如图 3 所示. 图 3 表明, 去噪之后的相空间轨迹更加集中在抛物线附近.

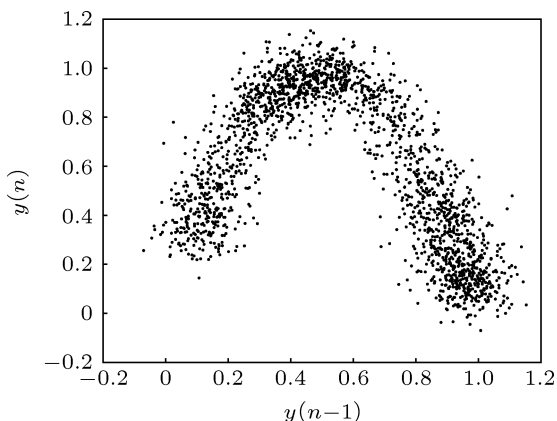


图2 观测序列  $y(n)$  的相图

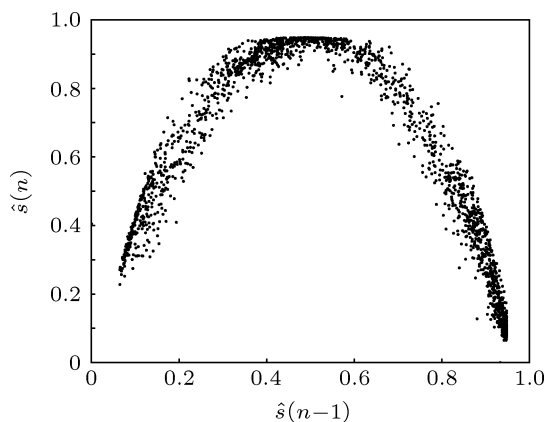


图3 还原序列  $\hat{s}(n)$  的相图

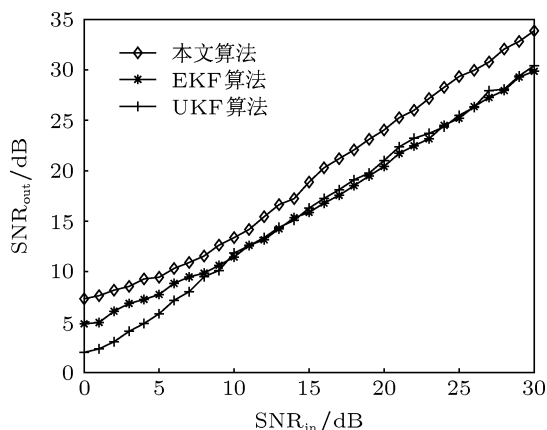


图4 对 Logistic 信源的去噪效果比较

更加具体地, 我们研究在不同的输入信噪比 ( $\text{SNR}_{\text{in}}$ ) 的情况下, 本文算法能得到的输出信噪比 ( $\text{SNR}_{\text{out}}$ ), 并且将它与文献 [13,17] 用到的 EKF 和 UKF 算法进行比较. 注意到文献 [13,17] 定义的 MSE 与本文定义的  $\text{SNR}_{\text{out}}$  的关系为  $\text{MSE} = 10 \lg E[s^2(n)] - \text{SNR}_{\text{out}}$ , 并且其输入信噪比是去除均值之后的信噪比. 从图 4 可以看出, EKF

算法的性能在  $\text{SNR}_{\text{in}} = 0\text{--}10 \text{ dB}$  时略好于 UKF, 而本文算法与 EKF 算法相比, 输出信噪比整体提升了 1.52—4.13 dB. 对于观测数据来说, 本文算法能将 Logistic 信源的输出信噪比提高 3.32—7.38 dB.

例子2

Hénon 映射的方程是<sup>23</sup>:  $s_1(n) = s_2(n-1) + 1 - k_2 s_1^2(n-1)$ ,  $s_2(n) = k_1 s_1(n-1)$ . 将参数  $k_1$  和  $k_2$  分别取为 0.3 和 1.4, 产生长度为  $N = 2000$  的二维序列, 并且以  $s_1(n)$  为信号源  $s(n)$ . 在应用本文算法进行求解的时候, 将各个参数分别设为  $\phi_0(s(n-1)) = 1$ ,  $\phi_1(s(n-1)) = y^2(n-1)$ ,  $\phi_2(s(n-1)) = y(n-2)$ ,  $N' = 60$ ,  $d = 3$ .

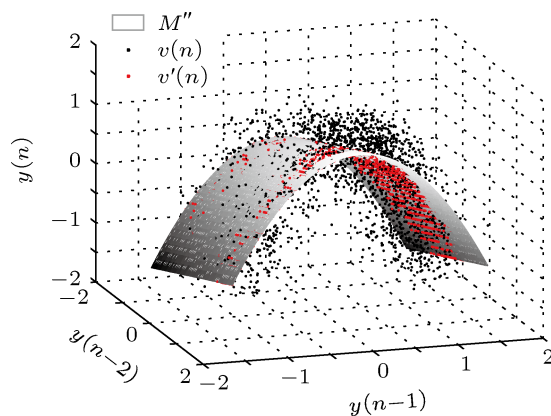


图5 Hénon 信号投影的效果图

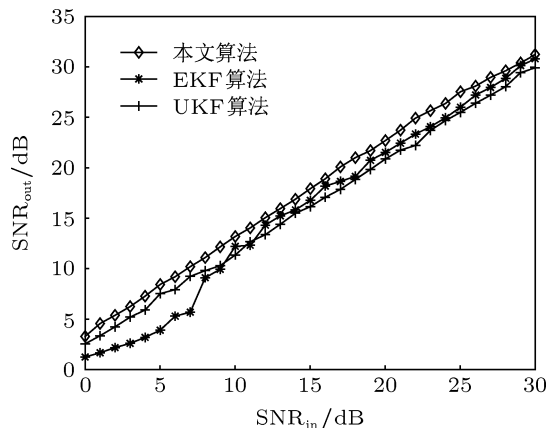


图6 对 Hénon 信源的去噪效果比较

控制  $\text{SNR}_{\text{in}} = 10 \text{ dB}$ , 当噪声污染的点往估计的相空间轨迹  $M''$  上投影时, 其效果如图 5 所示. 在图 5 中, 拟合的相空间轨迹  $M''$  是一个抛物面, 而投影操作使得每个偏离点  $v(n)$  都映射到离它最近的抛物面上的点  $v'(n)$ . 这时恢复信号的  $\text{SNR}_{\text{out}} = 13.06 \text{ dB}$ .

同样地, 对于 Hénon 信号源, 我们将本文算法的效果与 EKF 和 UKF 进行比较, 如图 6 所示. 从图

6 看出, 本文算法的效果在  $\text{SNR}_{\text{in}} = 0\text{--}30\text{ dB}$  时都比 EKF 和 UKF 好 (比 UKF 提高了 0.73—2.72 dB). 整体来说, 本文算法能将 Hénon 信源的输出信噪比提高 1.26—3.55 dB.

小结 比较上述两个例子的实验结果, 可以看到本文算法对 Logistic 映射的  $\text{SNR}_{\text{out}}$  比 Hénon 映射提高得更多, 这个结果的理论解释如下: Logistic 映射在相空间的迭代表达式可以写为

$$f_1(\mathbf{s}(n)) = f_1(\mathbf{s}(n-1)) + \mathbf{J}_{n-1}(\mathbf{s}(n) - \mathbf{s}(n-1)) + \frac{1}{2}(\mathbf{s}(n) - \mathbf{s}(n-1))^T \mathbf{H}_{n-1}(\mathbf{s}(n) - \mathbf{s}(n-1)),$$

其中  $\mathbf{J}_{n-1}$  和  $\mathbf{H}_{n-1}$  分别是  $f_1$  在  $\mathbf{s}(n-1)$  的雅可比和海森矩阵, 步骤 1 里面对  $\mathbf{a}$  的估计表现为对  $\mathbf{J}_{n-1}$  和  $\mathbf{H}_{n-1}$  的估计. 相对地, Hénon 映射的迭代表达式可记为

$$f_2(\mathbf{s}(n)) = f_2(\mathbf{s}(n-1)) + b\mathbf{m}\mathbf{J}_{n-1}(\mathbf{s}(n) - \mathbf{s}(n-1)) + \frac{1}{2}(\mathbf{s}(n) - \mathbf{s}(n-1))^T \mathbf{H}_{n-1}(\mathbf{s}(n) - \mathbf{s}(n-1)) + O(\|\mathbf{s}(n) - \mathbf{s}(n-1)\|^2),$$

其中  $O(\cdot)$  表示高阶无穷小. 显然, 对  $f_2$  的估计要比  $f_1$  多一个  $O(\cdot)$  项, 因此在相同的观察数据长度下, 对  $f_1$  的估计更精确, 从而其去噪效果更好. 顺便指出的是, LP 算法<sup>[11,12]</sup>的本质是在上述表达式里面只保留一阶近似项, 比如

$$f_1(\mathbf{s}(n)) \approx f_1(\mathbf{s}(n-1)) + \mathbf{J}_{n-1}(\mathbf{s}(n) - \mathbf{s}(n-1)),$$

该估计式的有效使用需要将观察数据的段落分得很小, 然而, 当  $\text{SNR}_{\text{in}}$  稍小的时候, 这种局部线性拟合操作就会失效. 另外, 局部拟合算法<sup>[8,9]</sup>等效于把  $\mathbf{J}$  和  $\mathbf{H}$  局部固定, 因为对于混沌流来说,  $\mathbf{J}_n \approx \mathbf{J}_{n-1}$ ,  $\mathbf{H}_n \approx \mathbf{H}_{n-1}$ ; 不过, 这种近似在混沌映射里面并不成立.

### 5.2 对混沌特征量的影响

对于混沌信号的去噪问题, 我们不仅要在信噪比方面评价算法的有效性, 还要考察其 Lyapunov 指数 (Lyapunov exponent, LE) 和 Kolmogorov 熵等混沌特征量. 由于 Kolmogorov 熵的数值等于所有正的 LE 之和, 而我们所研究的低维离散混沌映射都不是超混沌信号, 因此在这个例子里只考察 LE.

LE 满足关系式:  $d(t) = d(0)e^{\lambda t}$ , 其中  $\lambda$  是 LE 的数值. 此处采用 Rosenstain 的小数据量法<sup>[24]</sup>来计算, 则  $d_i(0) = \min\|\mathbf{v}(i) - \mathbf{v}(j)\|, \forall j$ , 其中  $\mathbf{v}(i)$  是选择的初始参考点 (来自方程 (9) 的相空间重构),  $d_i(0)$  是对应的初始距离. 由于  $\ln d_i(t) \approx \ln d_i(0) + \lambda t$ ,  $\ln d_i(t)$  与  $t$  在一定划范围内满足线性关系, 求其斜率就可得到  $\mathbf{v}(i)$  对应的一个  $\lambda$ . 因为所有  $\mathbf{v}(i)$  对应的斜率平均之后可得最小均方差意义上的  $\lambda$ , 假设  $\ln d_i(t)$  在算术平均之后记为  $\ln d(t)$ , 则有  $\ln d(t) \approx \ln d(0) + \lambda t$ .

对于纯净的 Logistic 信号  $s(n)$ , 此处控制  $\text{SNR}_{\text{in}} = 10\text{ dB}$  得到观测数据  $y(n)$  (在其他信噪比下的分析类似). 使用例子 1 的算法参数来消除噪声之后可得  $\hat{s}(n)$ .  $s(n)$ ,  $y(n)$  和  $\hat{s}(n)$  的步长  $t - \ln d(t)$  关系曲线如图 7 所示. 从图 7 可以看到,  $\hat{s}(n)$  的  $\ln d(t)$  在任何步长值都比噪声数据更靠近  $s(n)$  的  $\ln d(t)$ ; 当使用  $0 \leq t \leq 8$  这段区域来估计  $\lambda$  的时候, 由  $s(n)$ ,  $y(n)$  和  $\hat{s}(n)$  求得的  $\lambda$  分别为 0.4942, 0.2874, 0.4547. 上述结果表明, 即使在噪声污染很严重的时候本文算法仍然能够将观测数据的 LE 还原.

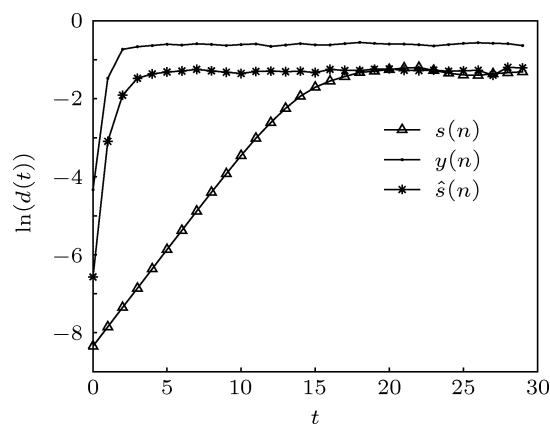


图 7 Logistic 信号的原始数据, 污染数据以及去噪数据的  $t - \ln d(t)$  曲线

## 6 结论

本文研究了混沌映射的去噪问题, 提出了一种利用最小二乘方法来求解混沌映射表达式和利用相空间重构以及投影操作来将观察数据的吸引子流形光滑化处理的去噪方法. 该方法的优点包括以下两个方面. 其一, 它对每一个数据点的估计都利用到了整体的统计信息, 因而它能最大程度地削弱噪声干扰. 其二, 区别于偏离点到构造流形的欧氏距离不同, 本文算法对相空间里面的不同数据点会有不同的修正量, 所以这种非线性的修正方法理论

上不仅适用于高斯噪声,对有色噪声也是适用的.文中实验结果表明所提算法的去噪性能优于 EKF 和 UKF 算法,尽管在实验比较中 EKF 和 UKF 的计算过程都显式地用到了观测数据的噪声协方差数

值.最后,实验部分对 Logistic 映射求解 LE 的例子还表明本文算法能够将观测数据的混沌特征量有效地还原.

- 
- [1] Han M, Xu M L 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 120510 (in Chinese) [韩敏, 许美玲 2013 物理学报 **62** 120510]
- [2] Niu H, Zhang G S 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 130502 (in Chinese) [牛弘, 张国山 2013 物理学报 **62** 130502]
- [3] Feng J C 2012 *Chaotic Signals and Information Processing* (Beijing: Tsinghua Univ. Press) pp 32–35 (in Chinese) [冯久超 2012 混沌信号与信息处理 (清华大学出版社) 第 32–35 页]
- [4] Li R H, Chen W S 2013 *Chin. Phys. B* **22** 040503
- [5] Hossein G, Amir H, Azita A 2013 *Chin. Phys. B* **22** 010503
- [6] Constantine W L B, Reinhall P G 2001 *Int. J. Bifurcation Chaos* **11** 483
- [7] Han M, Liu Y H, Xi J H, Guo W 2007 *IEEE Signal Process. Lett.* **14** 62
- [8] Gao J B, Sultan H, Hu J, Tung W W 2010 *IEEE Signal Process. Lett.* **17** 237
- [9] Tung W W, Gao J B, Hu J, Yang L 2011 *Phys. Rev. E* **83** 046210
- [10] Wang W B, Zhang X D, Wang X L 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 050201 (in Chinese) [王文波, 张晓东, 汪祥莉 2013 物理学报 **62** 050201]
- [11] Cawley R, Hsu G H 1992 *Phys. Rev. A* **46** 3057
- [12] Wang F P, Wang Z J, Guo J B 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 474 (in Chinese) [汪芙平, 王赞基, 郭静波 2002 物理学报 **51** 474]
- [13] Feng J C 2005 *Chinese Phys. Lett.* **22** 1851
- [14] Feng J C, Tse C K 2001 *Phys. Rev. E* **63** 026202
- [15] Wu Y, Hu D, Wu M, Hu X 2005 *IEEE Signal Process. Lett.* **12** 357
- [16] Arasaratnam I, Haykin S, Hurd T R 2010 *IEEE Tran. Signal Process.* **58** 4977
- [17] Wang S Y, Long Z J, Wang J, Guo J 2011 *2011 4th International Congress on Image and Signal Processing Shanghai* Oct.15–17, 2011 p2303
- [18] Gerald C F, Wheatley P O 2004 *Applied Numerical Analysis, seventh edition* (New York: Pearson Addition Wesley) pp 266–270
- [19] Johnson M T, Povinelli R J 2005 *Physica D* **201** 306
- [20] Takens F 1981 *Lecture Notes in Mathematics* (Berlin: Springer) pp 366–381
- [21] Wu K L, Yang M S 2002 *Pattern Recognition* **35** 2267
- [22] Phatak S C, Rao S S 1995 *Phys. Rev. E* **51** 3670
- [23] Gallas J A C 1993 *Phys. Rev. Lett.* **70** 2714
- [24] Rosenstein M T, Collins J J, De L, Carlo J 1993 *Physica D: Nonlinear Phenomena* **65** 117

# A phase space denoising method for chaotic maps<sup>\*</sup>

Lü Shan-Xiang Feng Jiu-Chao<sup>†</sup>

(School of Electronic and Information Engineering, South China University of Technology, Guangzhou 510641, China)

(Received 8 August 2013; revised manuscript received 27 August 2013)

## Abstract

The spectra of chaotic maps are much wider than those of chaotic flows, and their overlapped regions with Gaussian white noise are much larger, thus the denoising method for chaotic flows is unsuitable for chaotic maps. Within a semi-blind analysing framework, the parameter estimating problem for chaotic systems can be boiled down to a least square evaluating procedure. In this paper we start with estimating the evolution parameters of chaotic maps by using a least square fitting method. After that, phase space reconstruction and projection operation are employed to get noise suppression for the observed data. The simulation results indicate that the proposed algorithm surpasses the extended Kalman filter (EKF) and the unscented Kalman filter (UKF) in denoising, as well as maintaining the characteristic quantities of chaotic maps.

**Keywords:** chaos, denoising, phase space reconstruction, projection

**PACS:** 05.45.-a, 05.40.Ca

**DOI:** 10.7498/aps.62.230503

---

<sup>\*</sup> Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 60872123), the Joint Fund of the National Natural Science Foundation and the Natural Science Foundation of Guangdong Province, China (Grant No. U0835001), the Fund for Higher-level Talent in Guangdong Province (Grant No. N9101070), and the Fundamental Research Fund for the Central Universities of China (Grant No. 2012ZM0025).

<sup>†</sup> Corresponding author. E-mail: fengjc@scut.edu.cn