

一个新的分数阶混沌系统的翼倍增及滑模同步*

王斌 吴超 朱德兰†

(西北农林科技大学水利与建筑工程学院, 杨凌 712100)

(2013年7月16日收到; 2013年8月18日收到修改稿)

首先, 提出了一个新的分数阶混沌系统, 通过对系统第二个等式的线性项 x 作绝对值运算, 并分析了其唯一的参数 k , 该参数在一定区间内取值时可将混沌吸引子由两个翼的结构变换为四翼的拓扑结构, 从而实现翼倍增. 其次, 分别采用 Matlab 和 Multisim 对新的分数阶系统及其翼倍增系统进行了数值模拟和电路仿真, 电路仿真结果和数值模拟结果相一致. 最后, 基于滑模变结构控制理论和分数阶稳定性定理, 为新的分数阶系统及其翼倍增系统设计了新的分数阶积分滑模控制器实现系统的同步, 仿真结果和理论分析相一致, 证实了所设计滑模控制器的有效性.

关键词: 分数阶, 翼倍增, 滑模控制, 同步

PACS: 05.45.Pq, 05.45.Xt

DOI: 10.7498/aps.62.230506

1 引言

分数阶微积分和整数阶微积分一样, 已有三百年的历史, 但将其应用到物理学和工程领域是最近几十年才兴起的^[1-4], 人们普遍认识到, 借助分数阶微分能够更好的描述系统实际的物理现象. 近些年来, 关于新的分数阶混沌系统的研究引起了相关学者的广泛关注, 已经有大量工作被报道, 例如分数阶 Chen 系统^[5]、分数阶 Chua 电路^[6]、分数阶 Lü 系统^[7]、分数阶 Liu 系统^[8]、分数阶 Lorenz 系统^[9]、一个新的分数阶混沌系统^[10]等.

混沌同步是非线性科学一个非常重要的分支, 近年来已经吸引了许多学者的广泛研究. 混沌同步能够被应用在物理和工程科学的许多方面, 特别是在保密通信领域^[11]. 在通信领域, Arman 等^[12]用简单的混沌掩盖方法证明了分数阶混沌信号能加强通信的安全性. 因此, 分数阶混沌系统的同步控制在保密通信、信号处理和系统控制及其他领域比整数阶混沌系统拥有更突出、更诱人的应用前景和发展前途, 研究关于分数阶混沌系统同步的理论和在保密通信和控制处理方面的实际应用已经受到了极大的关注^[13-18]. 人们已经提出了一些关

于分数阶混沌系统的同步方法, 如驱动响应法^[19]、线性反馈控制^[20]、滑模控制^[21]、自适应同步^[22]、广义同步^[23]和函数投影同步^[24,25]等.

滑模控制具有快的响应性、良好的动态特性和对外界变化的不灵敏性等很多诱人的优点. 本文首先提出了一个新的分数阶混沌系统, 新的三阶混沌系统能够产生二翼混沌吸引子, 通过对第二个等式的其中一项 x 作绝对值运算, 新产生的系统能够产生四翼混沌吸引子, 实现对原系统的翼倍增, 并对翼倍增系统搭建了仿真电路, 证实了该新系统的工程实践意义. 基于滑模变结构控制理论和分数阶稳定性定理, 为该翼倍增系统设计了新的分数阶积分滑模控制器, 仿真结果和理论分析相一致, 证实了所设计滑模控制器的有效性.

2 分数阶微积分

2.1 定义

关于分数阶微分定义有许多不同的形式, 下面我们给出分数阶微积分中普遍应用的两种定义: Caputo 分数阶微分和 Riemann-Liouville 分数阶微分.

* 国家自然科学基金(批准号: 51202200)和“十二五”国家科技支撑计划(批准号: 2011BAD29B02)资助的课题.

† 通讯作者. E-mail: dlzhu@126.com

定义1 分数阶 Riemann-Liouville 积分可以描述如下:

$$J_{t_0}^q f(x) = \frac{1}{\Gamma(q)} \int_{t_0}^t (t-\tau)^{q-1} f(\tau) d\tau, \quad (1)$$

式中, $q \in R^+$; $f: R \rightarrow R$; $J_{t_0}^q$ 表示 q 阶积分算子; $\Gamma(\cdot)$ 表示伽马函数, $\Gamma(q) = \int_0^\infty t^{q-1} e^{-t} dt$.

定义2 分数阶 Riemann-Liouville 微分可以描述如下:

$$D_{t_0}^q f(t) = D_{t_0}^n J_{t_0}^{n-q} f(t) = \begin{cases} \frac{d^n}{dt^n} \left[\frac{1}{\Gamma(n-q)} \int_{t_0}^t (t-\tau)^{n-q-1} f(\tau) d\tau \right], & n-1 < q < n, \\ \frac{d^n}{dt^n} f(t), & q = n, \end{cases} \quad (2)$$

式中, $D_{t_0}^q$ 表示 q 阶刘维耳微分算子.

定义3 Caputo 微分可以描述如下:

$${}^c D_{t_0}^q f(t) = J_{t_0}^{n-q} D_{t_0}^n f(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(n-q)} \int_{t_0}^t (t-\tau)^{n-q-1} f^{(n)}(\tau) d\tau, & n-1 < q < n, \\ \frac{d^n}{dt^n} f(t), & q = n, \end{cases} \quad (3)$$

式中, ${}^c D_{t_0}^q$ 表示 q 阶卡普托微分算子, 可以简称为 D^q .

2.2 分数阶稳定性定理

定理1^[26] 考虑如下分数阶非线性系统:

$$D^q x = Ax, x(0) = x_0 \quad (4)$$

其中, $A \in R^{n \times n}$, $x \in R^n$, $q = [q_1, q_2, \dots, q_i, \dots, q_n]$ ($0 < q_i \leq 1$). 当且仅当矩阵 A 的特征值 λ_i 满足 $|\arg(\lambda_i)| > q\pi/2$ 时, 系统 (4) 渐进稳定. 当且仅当矩阵 A 的特征值 λ_i 满足 $|\arg(\lambda_i)| \geq q\pi/2$ 时, 且其临界特征值 $|\arg(\lambda_i)| = q\pi/2$ 具有几何重数 1 时, 系统 (4) 是稳定的.

定理2^[26] 考虑如下的 n 维线性状态空间形式:

$$\begin{aligned} D^q x &= Ax + Bu, \\ y &= Cx, \\ x(0) &= x_0, \end{aligned} \quad (5)$$

其中, $A \in R^{n \times n}$, $x \in R^n$, $y \in R^n$,

$$q = [q_1, q_2, \dots, q_i, \dots, q_n] \quad (0 < q_i \leq 1).$$

当满足 $|\arg(\text{eig}(A))| > q\pi/2$, 系统 (5) 在有界的输入下, 其输出是有界稳定的.

3 新的翼倍增系统及其电路仿真

3.1 新的翼倍增系统

一个新的三阶分数阶混沌系统如下:

$$\begin{aligned} \frac{d^q x}{dt^q} &= \frac{28}{11}x - yz, \\ \frac{d^q y}{dt^q} &= -7y + xz + kx, \\ \frac{d^q z}{dt^q} &= -4z + xy, \end{aligned} \quad (6)$$

其中 $x, y, z \in R$ 为状态变量, k 为实数, 这里取 $k = 0.5$, q 为分数阶次. 为了研究系统 (6) 的混沌特性, 首先, 很容易得到系统的 Jacobian 矩阵:

$$J_0 = \begin{bmatrix} \frac{28}{11} & -z & -y \\ z+0.5 & -7 & x \\ y & x & -4 \end{bmatrix}.$$

其次, 系统的动力学特性是和特征值有关的, 特征值是由 Jacobian 矩阵在平衡点处取值决定的. 系统 (6) 有 5 个平衡点, 其相应的特征值如表 1 所示.

根据定理 1 可得, 非稳定区域由下面的条件决定:

$$\frac{\pi}{2} \geq \min_i \{ \arg|\lambda_i| \} = \max_i \left\{ \arctan \frac{|\text{Im}(\lambda_i)|}{|\text{Re}(\lambda_i)|} \right\}$$

$$= \arctan \frac{4.9348}{1.0571} \rightarrow q > 0.8657.$$

因此, 系统 (6) 产生混沌的必要条件为 $q >$

0.8657, 本文取 $q = 0.9$, 初始值为 $(x(0), y(0), z(0)) = (2.5, 0, 1)$, 系统 (6) 的相图如图 1 所示, 可以看出系统具有双翼结构和两个混沌吸引子.

表 1 平衡点及其对应的特征值

平衡点	特征值
$E_1(0, 0, 0)$	$\lambda_1 = -7.0000, \lambda_2 = 2.5455, \lambda_3 = -4.0000$
$E_2(-5.6142, 3.1909, -4.4786)$	$\lambda_1 = 1.3674 + 5.0210i, \lambda_2 = 1.3674 - 5.0210i, \lambda_3 = -11.1893$
$E_3(-4.9874, -3.1909, 3.9786)$	$\lambda_1 = 1.0571 + 4.9348i, \lambda_2 = 1.0571 - 4.9348i, \lambda_3 = -10.5687$
$E_4(4.9874, 3.1909, 3.9786)$	$\lambda_1 = 1.0571 + 4.9348i, \lambda_2 = 1.0571 - 4.9348i, \lambda_3 = -10.5687$
$E_5(5.6142, -3.1909, -4.4786)$	$\lambda_1 = 1.3674 + 5.0210i, \lambda_2 = 1.3674 + 5.0210i, \lambda_3 = -11.1893$

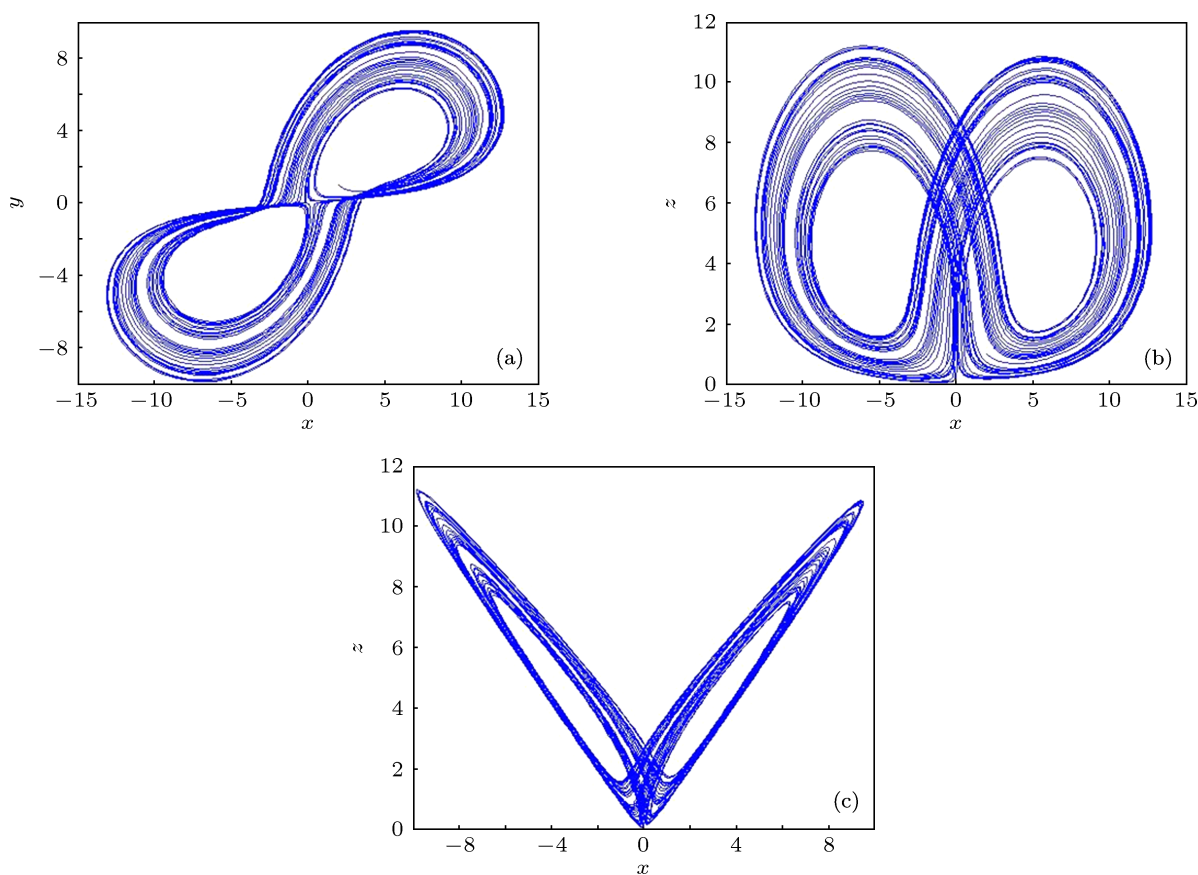


图 1 $k = 0.5$ 时系统 (6) 的相图 (a) $x-y$; (b) $x-z$; (c) $y-z$

将系统 (6) 的第二个式中的线性项 x 用 $|x|$ 代替, 在系统 (6) 的基础上得到一个新的改进系统如下式:

$$\begin{aligned} \frac{d^{0.9}x}{dt^{0.9}} &= \frac{28}{11}x - yz, \\ \frac{d^{0.9}y}{dt^{0.9}} &= -7y + xz + k|x|, \\ \frac{d^{0.9}z}{dt^{0.9}} &= -4z + xy. \end{aligned} \quad (7)$$

当 $-1.2 \leq k \leq 1.2$ 时, 系统 (7) 是系统 (6) 的翼倍增系统. 图 2 表示在 $k = 0.5$ 时, 翼倍增混沌系统 (7) 的相图, 可以看出此时系统具有四翼结构和四个混沌吸引子, 实现了对原系统 (6) 的翼倍增. 通过 k 在区间 $(-1.20, 1.20)$ 内每隔 0.002 取值, 并借助 Matlab 分别仿真系统 (7) 的相轨迹图进行观察总结, 很容易得到除去点 $(-1.16, -0.148, 0, 0.148, 1.16, \text{etc.})$, 系统 (7) 是系统 (6) 的翼倍增系统.

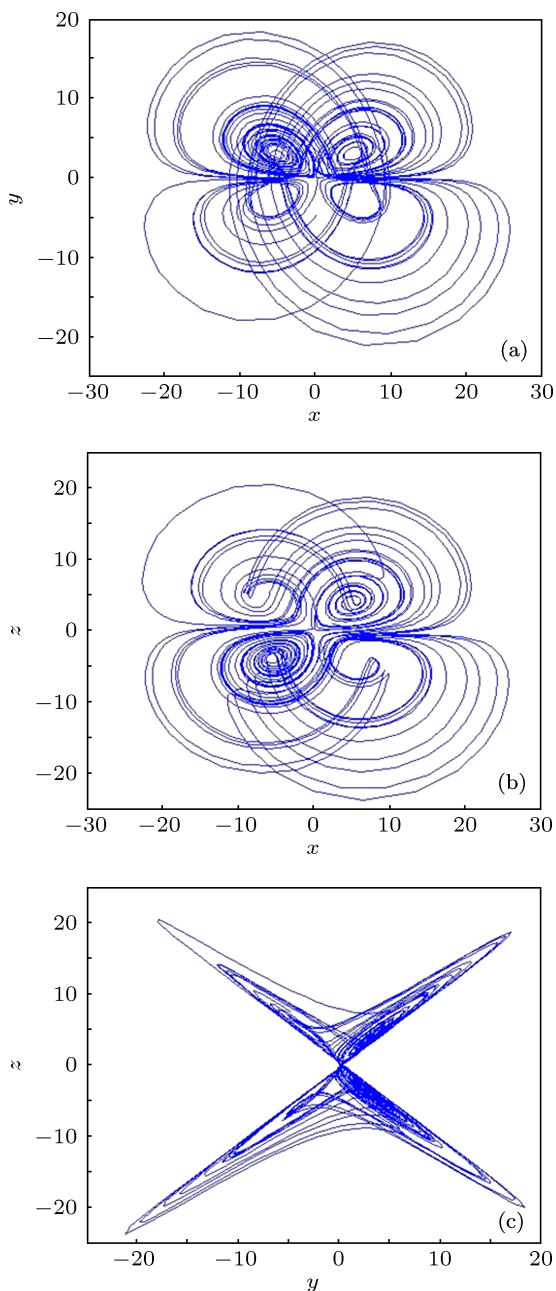


图2 当 $k=0.5$ 时混沌系统 (7) 的相图 (a) $x-y$; (b) $x-z$; (c) $y-z$

3.2 电路仿真

分数阶电路的一般表达式如下:

$$F(s) = \frac{R_1}{sR_1C_1 + 1} + \frac{R_2}{sR_2C_2 + 1} + \dots + \frac{R_n}{sR_nC_n + 1}, \quad (8)$$

其中 n 是基本积分电路的单元数.

根据文献 [27], 在 $\alpha = 0.9$ 时, 等 (8) 式可以写为下式:

$$F(s) = \frac{R_1}{sR_1C_1 + 1} + \frac{R_2}{sR_2C_2 + 1} + \frac{R_3}{sR_3C_3 + 1}, \quad (9)$$

其中

$$R_1 = 62.84 \text{ M}\Omega, \quad R_2 = 250 \text{ k}\Omega, \quad R_3 = 2.5 \text{ k}\Omega,$$

$$C_1 = 1.232 \text{ }\mu\text{F}, \quad C_2 = 1.835 \text{ }\mu\text{F}, \quad C_3 = 1.1 \text{ }\mu\text{F}.$$

(9) 式的单元电路如图 3 所示.

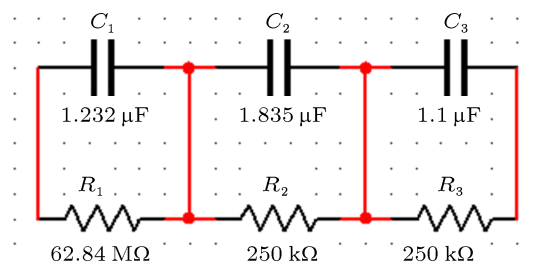


图3 $1/s^{0.9}$ 的单元电路

将系统 (6) 改写为相应的电路方程描述如下:

$$\begin{aligned} \frac{d^{0.9}x}{dt^{0.9}} &= \frac{R_3}{R_2R_4C_0}x - \frac{R_3}{R_1R_4C_0}yz, \\ \frac{d^{0.9}y}{dt^{0.9}} &= -\frac{R_7}{R_8} \frac{R_5}{R_{15}R_6C_0}y + \frac{R_5}{R_{14}R_6C_0}xz \\ &\quad + \frac{R_5}{R_{13}R_6C_0}x, \\ \frac{d^{0.9}z}{dt^{0.9}} &= -\frac{R_{11}}{R_{18}} \frac{R_9}{R_{17}R_{10}C_0}z + \frac{R_9}{R_{16}R_{10}C_0}xy. \end{aligned} \quad (10)$$

系统 (10) 的电路参数如下: $R_1 = 700 \text{ k}\Omega$, $R_2 = 275 \text{ k}\Omega$, $R_3 = 14 \text{ k}\Omega$, $R_4 = R_6 = 20 \text{ k}\Omega$, $R_5 = 7 \text{ k}\Omega$, $R_7 = R_8 = R_{11} = R_{17} = R_{18} = 10 \text{ k}\Omega$, $R_{10} = 25 \text{ k}\Omega$, $R_{13} = 700 \text{ k}\Omega$, $R_{14} = 350 \text{ k}\Omega$, $R_{15} = 50 \text{ k}\Omega$, $R_{16} = 40 \text{ k}\Omega$, C_0 为图 3 所示的 0.9 阶单元电路, 设计的总的电路仿真图如图 4 所示.

同理, 将系统 (7) 改写为相应的电路方程描述如下:

$$\begin{aligned} \frac{d^{0.9}x}{dt^{0.9}} &= \frac{R_3}{R_2R_4C_0}x - \frac{R_3}{R_1R_4C_0}yz, \\ \frac{d^{0.9}y}{dt^{0.9}} &= -\frac{R_7}{R_8} \frac{R_5}{R_{15}R_6C_0}y + \frac{R_5}{R_{14}R_6C_0}xz \\ &\quad + \frac{R_5}{R_{13}R_6C_0}|x|, \\ \frac{d^{0.9}z}{dt^{0.9}} &= -\frac{R_{11}}{R_{18}} \frac{R_9}{R_{17}R_{10}C_0}z + \frac{R_9}{R_{16}R_{10}C_0}xy. \end{aligned} \quad (11)$$

系统 (11) 的电路参数如下:

$$\begin{aligned} R_1 &= 700 \text{ k}\Omega, \quad R_2 = 275 \text{ k}\Omega, \quad R_3 = 14 \text{ k}\Omega, \\ R_4 &= R_6 = R_{32} = 20 \text{ k}\Omega, \quad R_5 = 7 \text{ k}\Omega, \\ R_7 &= R_8 = R_{11} = R_{17} = R_{18} = R_{27} = R_{28} \\ &= R_{29} = R_{30} = R_{31} = 10 \text{ k}\Omega, \\ R_{10} &= 25 \text{ k}\Omega, \quad R_{13} = 700 \text{ k}\Omega, \quad R_{14} = 350 \text{ k}\Omega, \end{aligned}$$

$$R_{15} = 50 \text{ k}\Omega, \quad R_{16} = 40 \text{ k}\Omega,$$

C_0 为图 3 所示的 0.9 阶单元电路, 设计的总的电路仿真图如图 5 所示.

图 6 和图 7 显示了这两个分数阶混沌系统的仿真结果. 从图 6(a)—(c) 和图 1(a)—(c) 的对比中可以得知, 电路仿真的结果与相图符合. 同样的结果, 从图 7(a)—(c) 和图 2(a)—(c) 的对比中可以得知, 电路仿真的结果与相图符合.

这些仿真结果及对比结论显示: 非线性混沌系统 (6) 和非线性混沌系统 (7) 可以容易地通过电路仿真实现. 因此, 电路仿真结果是能够实现的并且是有效的.

4 新翼倍增系统的同步

4.1 滑模控制器的设计

考虑一类含有不确定参数的分数阶混沌系统, 驱动系统和响应系统描述如下:

$$D^\alpha x = (A + \Delta A)x + f(x), \quad (12)$$

$$D^\beta y = (A + \Delta A)y + f(y) + U(x, y), \quad (13)$$

其中, $x, y \in R^n$ 分别是驱动系统与响应系统的 n 维状态向量. $f: R_n \rightarrow R_n$ 是系统的连续函数向量. $U(x, y)$ 是待设计的控制器. α 和 β 是驱动系统和响应系统的分数阶次. A 是驱动系统和响应系统线性部分的参数矩阵. ΔA 表示不确定参数并且满足条件 $\|\Delta A\| \leq \delta \leq M$, 其中 M 是正的常数.

同步的目标是设计一个合适的、有效的控制器 $U(x, y)$, 使得响应系统的轨迹与驱动系统的轨迹实现同步. 为此, 定义同步误差

$$e = y - \chi x, \quad (14)$$

其中 χ 是任意的比例因数, 且 $\chi \in R$. 将控制器 $U(x, y)$ 划分为两个子控制器 $U_I(x, y)$ 和 $U_{II}(x, y)$, 我们的基本目标是获得与响应系统同阶次的误差系统, 子控制器 $U_I(x, y)$ 描述如下:

$$U_I(x, y) = D^\beta(\chi x) - f(x) - (A + \Delta A)\chi x. \quad (15)$$

把子控制器 (15) 代入到系统 (13) 中, 误差动力系统可写为

$$\begin{aligned} D^\beta(e) &= (A + \Delta A)e + f(y) - f(x) + U_{II}(x, y) \\ &= (A + \Delta A)e + F(x, y) + U_{II}(x, y), \end{aligned} \quad (16)$$

其中, $F(x, y) = f(x) + f(y)$.

定义时变的微分积分滑模面 $S = S(e, t)$ 为

$$S(t) = D^{\beta-1}e(t) - \int_0^t (A + K)e(\tau) d\tau, \quad (17)$$

其中, K 是设计的参数矩阵.

在滑动模态下必须满足

$$S(t) = 0, \quad \dot{S}(t) = 0. \quad (18)$$

上式意味着

$$\dot{S}(t) = D^\beta e(t) - (A + K)e(t) = 0. \quad (19)$$

把 (16) 式代入到 (19) 式中, 可以得到

$$\dot{S}(t) = (\Delta A - K)e(t) + F(x, y) + U_{II}(x, y) = 0. \quad (20)$$

为了满足滑动条件, 不连续的开关趋近率设计如下:

$$DS(t) = -p\text{sign}(S) - rS, \quad (21)$$

其中

$$\text{sign}(S) = \begin{cases} +1, & S > 0, \\ 0, & S = 0, \\ -1, & S < 0, \end{cases} \quad (22)$$

其中, $p > 0, r > 0$ 是控制器的增益.

在滑动模态下, 意味着 $D(s) = \dot{S}(t) = 0$, 由 (20) 和 (21) 式可得

$$\begin{aligned} U_{II}(x, y) &= (K - \Delta A)e(t) - F(x, y) \\ &\quad - (rS + p\text{sign}(S)). \end{aligned} \quad (23)$$

设计的总控制策略如下:

$$\begin{aligned} U(x, y) &= U_I(x, y) + U_{II}(x, y) \\ &= D^\beta(\chi x) - (A + \Delta A)\chi x + (K - \Delta A)e(t) \\ &\quad - f(y) - (rS + p\text{sign}(S)). \end{aligned} \quad (24)$$

定理3 当 $p > 0, r > 0$ 时, 通过选择合适的参数矩阵 K , 响应系统 (13) 在设计的滑模控制器 (24) 的驱动下, 误差系统 (16) 将会趋向于零, 即驱动系统与响应系统实现同步.

证明 将 (24) 代入到 (16), 可以得到误差系统

$$D^\beta e = (A + K)e - (rS + p\text{sign}(S)). \quad (25)$$

1) 当 $S(t) = 0$ 时, 误差系统 (25) 可以简化为 $D^\beta e = (A + K)e$. 根据定理 1, 当矩阵 $(A + K)$ 的所有特征值 λ_i 都满足条件 $|\arg(\lambda_i)| > \beta\pi/2$ 时误差系统是渐进稳定的.

2) 当 $S(t) \neq 0$ 时, 即线性分数阶系统 $D^\beta e = (A + K)e$ 有界输入 $(rS + p\text{sign}(S))$ ($S > 0$ 时) 为

$(rS + p)$, $S < 0$ 时为 $(rS - p)$, 根据定理 2, 如果 $|\arg(\text{eig}(A + K))| > q\pi/2$, 误差系统 (25) 在有界输入下, 其输出是有界稳定的.

从 1) 和 2) 可知, 误差系统将渐近趋向于零并最终稳定, 即驱动系统与响应系统实现同步, 结论得证.

4.2 系统 (6) 的同步

根据滑膜控制理论, 驱动系统 (6) 描述为

$$\begin{aligned} \frac{d^{0.9}x_1}{dt^{0.9}} &= \frac{28}{11}x_1 - y_1z_1, \\ \frac{d^{0.9}y_1}{dt^{0.9}} &= -7y_1 + x_1z_1 + kx_1, \\ \frac{d^{0.9}z_1}{dt^{0.9}} &= -4z_1 + x_1y_1. \end{aligned} \quad (26)$$

响应系统可以描述为

$$\begin{aligned} \frac{d^{0.9}x_2}{dt^{0.9}} &= \frac{28}{11}x_2 - y_2z_2 + u_1, \\ \frac{d^{0.9}y_2}{dt^{0.9}} &= -7y_2 + x_2z_2 + kx_2 + u_2, \\ \frac{d^{0.9}z_2}{dt^{0.9}} &= -4z_2 + x_2y_2 + u_3. \end{aligned} \quad (27)$$

取参数 $r = 5, p = 0.2$. 参数矩阵

$$A = \begin{bmatrix} \frac{28}{11} & 0 & 0 \\ k & -7 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix},$$

设计的参数矩阵

$$K = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

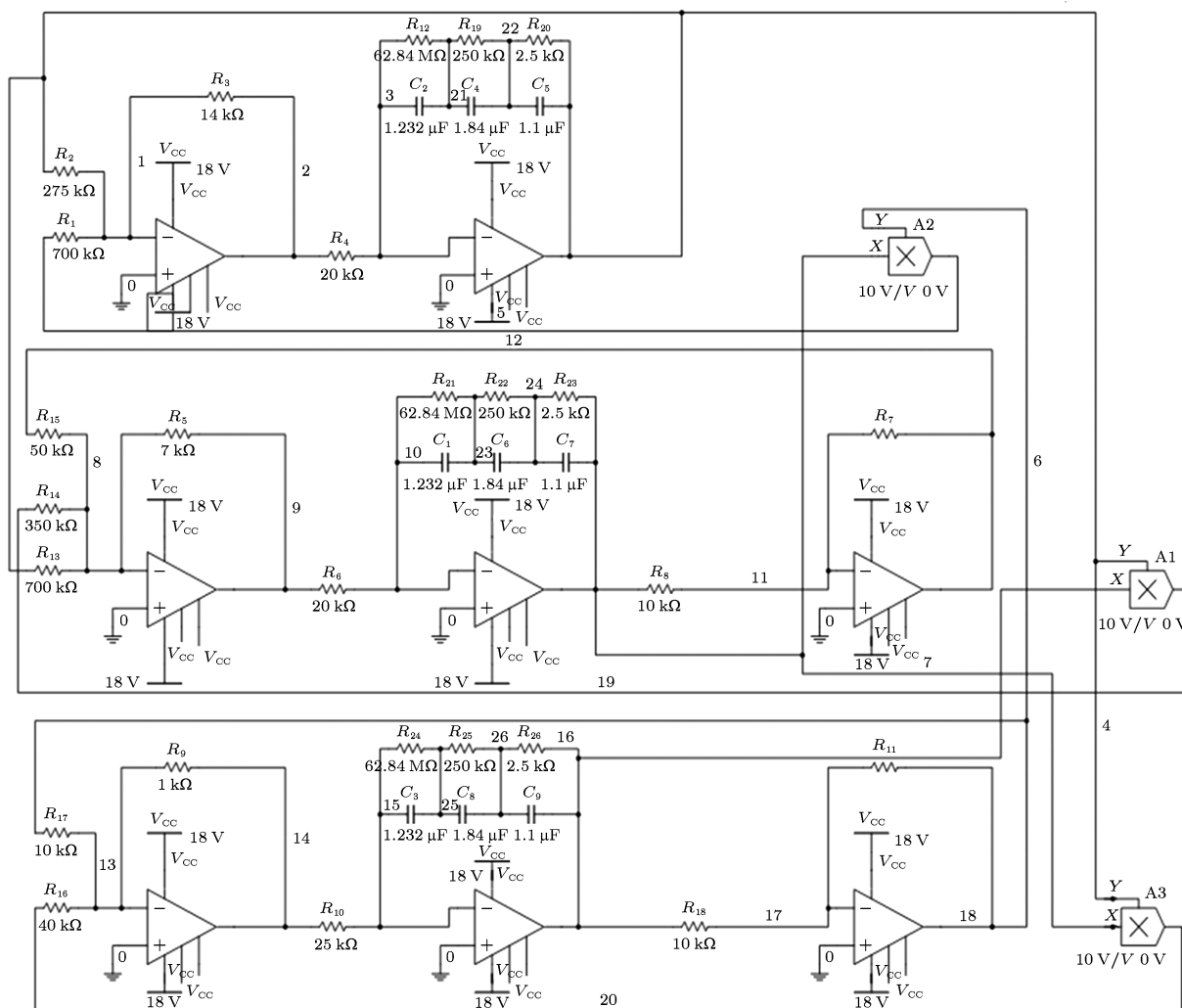


图 4 分数阶混沌系统 (6) 的电路图

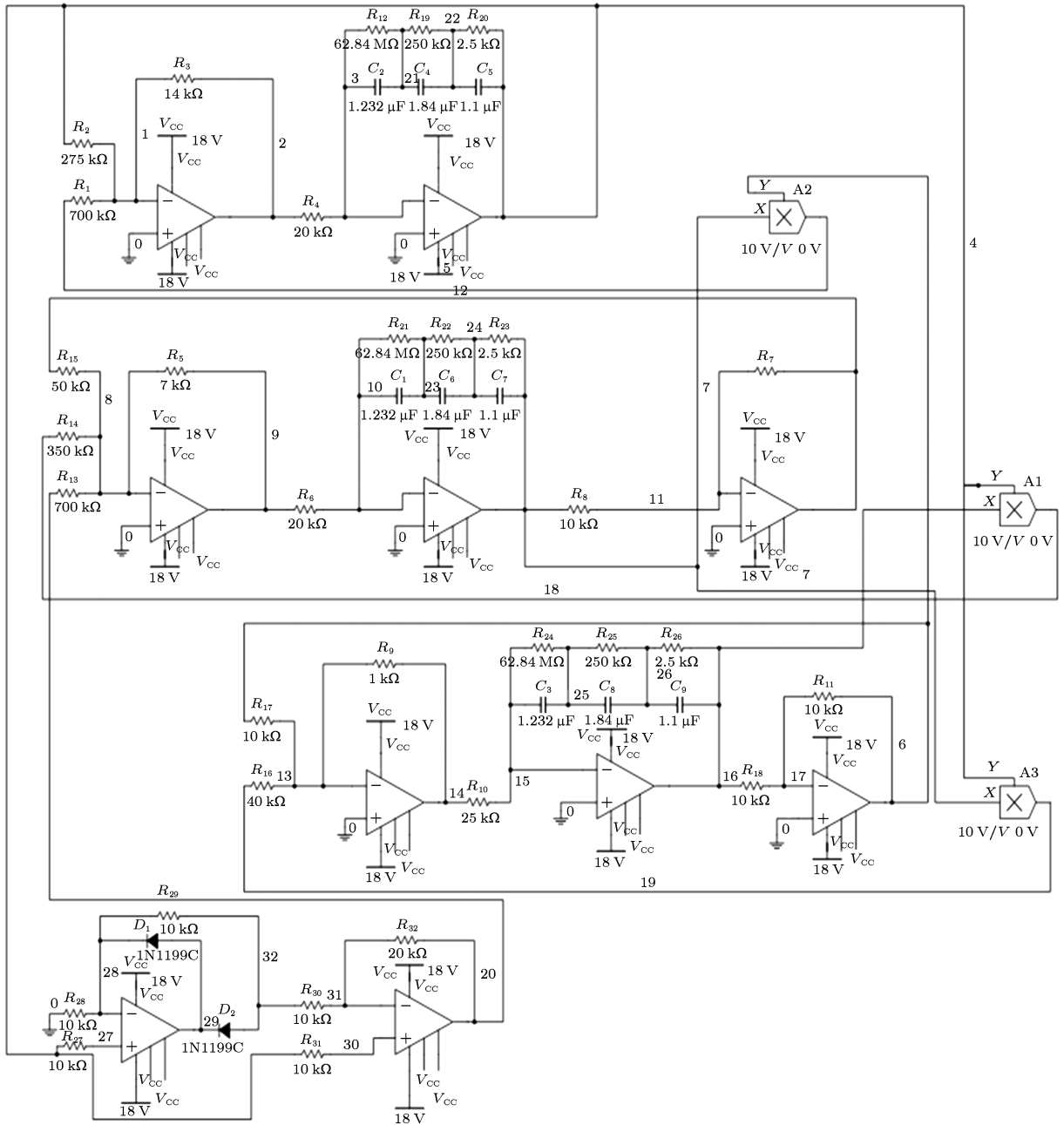


图5 分数阶混沌系统(7)的电路图

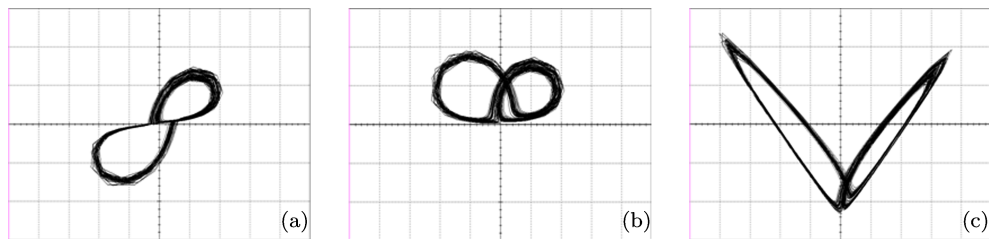


图6 混沌系统(6)的电路仿真效果 (a) x-y; (b) x-z; (c) y-z

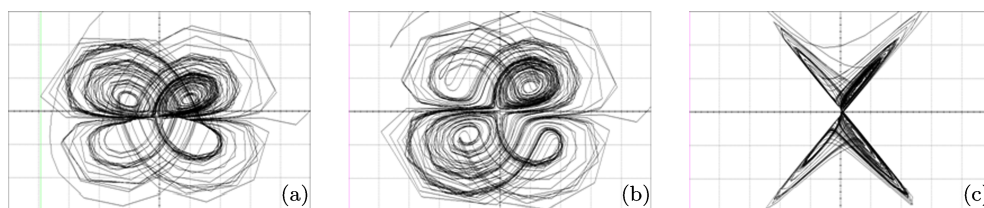


图7 混沌系统(7)的电路仿真效果 (a) x-y; (b) x-z; (c) y-z

可以得到矩阵

$$A + K = \begin{bmatrix} -\frac{5}{11} & 0 & 0 \\ k & -7 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix},$$

矩阵 $(A + K)$ 的特征值是

$$(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (-7, -0.4545, -4),$$

全部满足条件 $|\arg(\text{eig}(A + K))| > 0.9\pi/2$, 根据分数阶系统稳定性定理, 误差系统将会逐渐趋向于零并实现同步。

根据 (24) 且令 $\chi = 1$, 我们可以得到如下的控制器:

$$\begin{aligned} u_1 &= D^{0.9}x_1 - \frac{28}{11}x_1 - 3e_1 + y_1z_1 \\ &\quad - (5S_1 + 0.2\text{sign}(S_1)), \\ u_2 &= D^{0.9}x_2 - (kx_1 - 7y_1) - x_1z_1 \\ &\quad - (5S_2 + 0.2\text{sign}(S_2)), \\ u_3 &= D^{0.9}x_3 + 4z_1 - x_1y_1 - (5S_3 + 0.2\text{sign}(S_3)). \end{aligned} \quad (28)$$

分数阶混沌系统 (6) 同步误差 (e_1, e_2, e_3) 的仿真结果如图 8 所示, 此时的初始条件

$$\begin{aligned} (x_1(0), x_2(0), x_3(0)) &= (2.5, 0, 1), \\ (y_1(0), y_2(0), y_3(0)) &= (5.045, 1, 2), \\ k &= 0.5. \end{aligned} \quad (29)$$

4.3 系统 (7) 的同步

根据滑模控制理论, 驱动系统 (7) 描述为

$$\begin{aligned} \frac{d^{0.9}x_1}{dt^{0.9}} &= \frac{28}{11}x_1 - y_1z_1, \\ \frac{d^{0.9}y_1}{dt^{0.9}} &= -7y_1 + x_1z_1 + k|x_1|, \\ \frac{d^{0.9}z_1}{dt^{0.9}} &= -4z_1 + x_1y_1. \end{aligned} \quad (30)$$

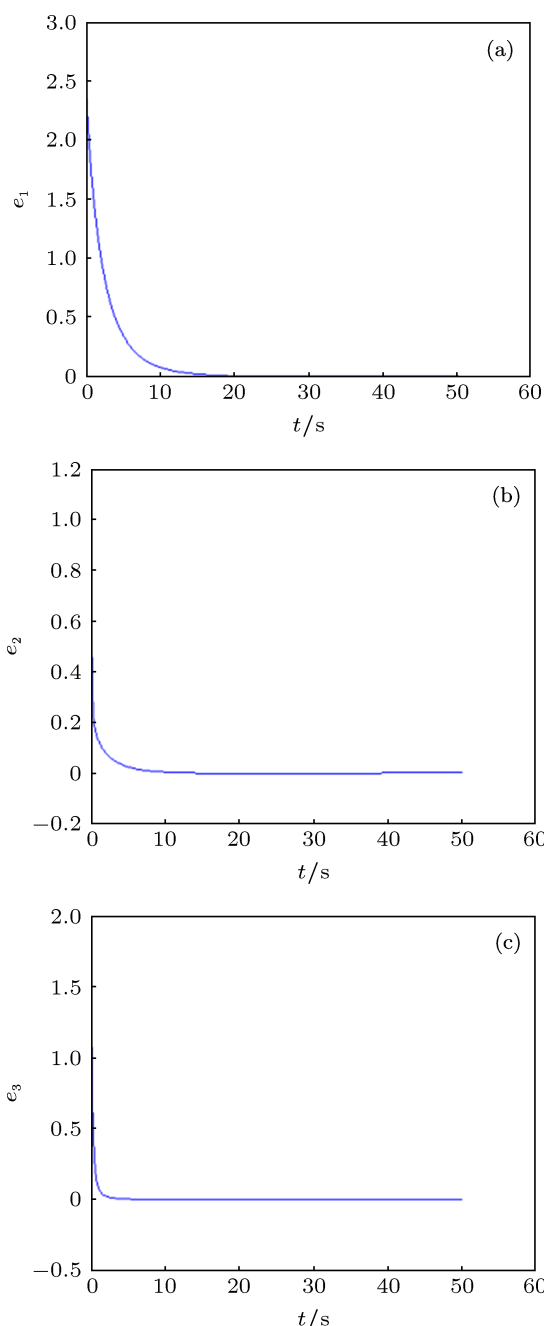


图8 分数阶混沌系统(6)的同步误差 (a) $e_1 = y_1 - x_1$; (b) $e_2 = y_2 - x_2$; (c) $e_3 = y_3 - x_3$

响应系统可以描述为

$$\frac{d^{0.9}x_2}{dt^{0.9}} = \frac{28}{11}x_2 - y_2z_2 + u_1,$$

$$\frac{d^{0.9}y_2}{dt^{0.9}} = -7y_2 + x_2z_2 + k|x_2| + u_2, \quad (31)$$

$$\frac{d^{0.9}z_2}{dt^{0.9}} = -4z_2 + x_2y_2 + u_3.$$

取参数 $r = 5, p = 0.2$. 参数矩阵

$$A = \begin{bmatrix} \frac{28}{11} & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix},$$

设计的参数矩阵

$$K = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

可以得到矩阵

$$A + K = \begin{bmatrix} -\frac{5}{11} & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix},$$

矩阵 $(A + K)$ 的特征值是

$$(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (-7, -4, -0.4545),$$

全部满足条件 $|\arg(\text{eig}(A + K))| > 0.9\pi/2$, 根据分数阶系统稳定性定理, 误差系统将会逐渐趋向于零并实现同步.

根据 (24) 且令 $\chi = 1$, 我们可以得到如下的控制器:

$$\begin{aligned} u_1 &= D^{0.9}x_1 - \frac{28}{11}x_1 - 3e_1 + y_1z_1 \\ &\quad - (5S_1 + 0.2\text{sign}(S_1)), \\ u_2 &= D^{0.9}x_2 + 7y_1 - (x_1z_1 + k|x|) \\ &\quad - (5S_2 + 0.2\text{sign}(S_2)), \\ u_3 &= D^{0.9}x_3 + 4z_1 - x_1y_1 - (5S_3 + 0.2\text{sign}(S_3)). \end{aligned} \quad (32)$$

分数阶混沌系统 (7) 同步误差 (e_1, e_2, e_3) 的仿真结果如图 9 所示, 此时的初始条件

$$\begin{aligned} (x_1(0), x_2(0), x_3(0)) &= (2.5, 0, 1), \\ (y_1(0), y_2(0), y_3(0)) &= (5.045, 1, 3), \\ k &= 0.5. \end{aligned} \quad (33)$$

从图 8 和图 9 可知, 分数阶系统 (6) 和 (7) 在很短的时间内就可实现同步, 说明所设计的滑模控制器的有效性, 仿真结果和理论分析相一致.

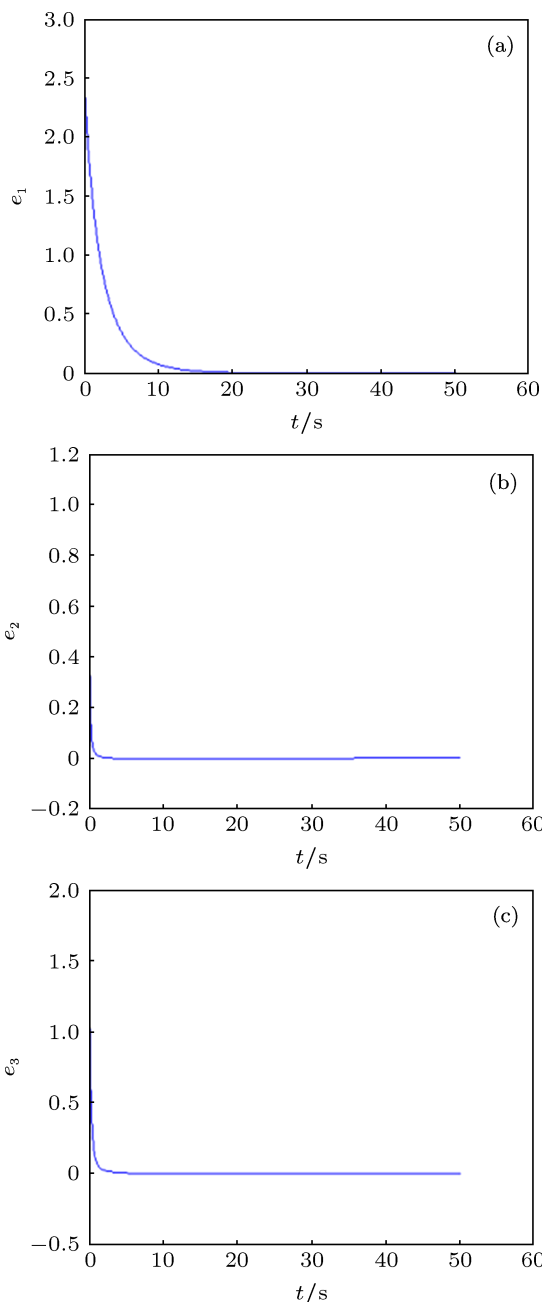


图 9 分数阶混沌系统 (7) 的同步误差 (a) $e_1 = y_1 - x_1$; (b) $e_2 = y_2 - x_2$; (c) $e_3 = y_3 - x_3$

5 结论

本文首先提出了一个新的分数阶混沌系统, 新的三阶混沌系统能够产生二翼混沌吸引子, 通过对第二个等式的其中一项 x 作绝对值运算, 新产生的系统能够产生四翼混沌吸引子, 实现对原系统的翼倍增, 并对翼倍增系统搭建了仿真电路, 证实了该新系统的工程实践意义. 基于滑模变结构控制理论和分数阶稳定性定理, 为该翼倍增系统设计了新的分数阶积分滑模控制器, 仿真结果和理论分析相一致, 证实了所设计滑模控制器的有效性.

- [1] Ross B 1977 *Hist. Math.* **4** 75
 [2] Elwakil S A, Zahran M A 1999 *Chaos, Solitons & Fractals* **10** 1545
 [3] Herrmann R 2010 *Physica A* **389** 4613
 [4] Li C L, Yu S M, Luo X S 2012 *Chin. Phys. B* **21** 100506
 [5] Cafagna D, Grassi G 2008 *Int. J. Bifurc. Chaos* **18** 1845
 [6] Petras I 2010 *IEEE Trans. Circuits Syst. II, Express Briefs* **57** 975
 [7] Lu J G 2006 *Phys. Lett. A* **354** 305
 [8] Xu Z, Liu C X 2008 *Chin. Phys. B* **17** 4033
 [9] Jia H Y, Chen Z Q, Xue W 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 140503 (in Chinese) [贾红艳, 陈增强, 薛薇 2013 物理学报 **62** 140503]
 [10] Chen D Y, Liu C F, Wu C, Liu Y J, Ma X Y, You Y J 2012 *Circuits Syst. Signal Process.* **31** 1599
 [11] Liu F, Ren Y, Shan X M, Qiu Z L 2002 *Chaos, Solitons & Fractals* **13** 723
 [12] Arman K, Kia F, Naser P, Henry L 2009 *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* **14** 863
 [13] Zhou P, Ding R 2012 *Mathematical Problems in Engineering* doi:10.1155/2012/214169
 [14] Chen Z W, Wang J, Pang S J 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 220505 (in Chinese) [陈志旺, 王敬, 庞双杰 2012 物理学报 **61** 220505]
 [15] Zhou P, Cheng Y M, Kuang F 2010 *Chin. Phys. B* **19** 090503
 [16] Zhang R X, Yang S P 2012 *Chin. Phys. B* **21** 030505
 [17] Liu J G 2013 *Chin. Phys. B* **22** 060510
 [18] Zhou P, Ding R, Cao Y X 2012 *Nonlinear Dyn.* **70** 1263
 [19] Li T, Yu J J, Wang Z 2009 *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* **14** 1796
 [20] Wang F Q, Liu C X 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 5055 (in Chinese) [王发强, 刘崇新 2006 物理学报 **55** 5055]
 [21] Huang L L, Qi X 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 080507 (in Chinese) [黄丽莲, 齐雪 2013 物理学报 **62** 080507]
 [22] Zhang R X, Yang S P 2010 *Chin. Phys. B* **19** 020510
 [23] Li G H 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 999 (in Chinese) [李国辉 2004 物理学报 **53** 999]
 [24] Zhou P, Zhu W 2011 *Nonlinear Analysis: Real World Applications* **12** 811
 [25] Huang L L, Ma N 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 160510 (in Chinese) [黄丽莲, 马楠 2012 物理学报 **61** 160510]
 [26] Chen D Y, Zhang R F, Ma X Y, Wang J 2012 *Chin. Phys. B* **21** 120507
 [27] Wang F Q, Liu C X 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 3922 (in Chinese) [王发强, 刘崇新 2006 物理学报 **55** 3922]

A new double-wing fractional-order chaotic system and its synchronization by sliding mode*

Wang Bin Wu Chao Zhu De-Lan[†]

(College of Water Resources and Architectural Engineering, Northwest A & F University, Yangling 712100, China)

(Received 16 July 2013; revised manuscript received 18 August 2013)

Abstract

Firstly, a new fractional-order chaotic system is proposed. When the linear term x in the second formula of the system was replaced by its absolute value, the range of its unique parameter k that makes the wing of the original system doubled is explored in detail. Furthermore, the numerical simulation and the circuit simulation of the original system and its double-wing system are achieved via Matlab and Multisim software respectively. Finally, based on sliding mode control theory and stability theory in fractional calculus, a new sliding mode controller is designed to realize the synchronization of the new system and its double-wing system respectively. Simulation results are provided to illustrate the effectiveness of the proposed scheme.

Keywords: fractional-order, double-wing, sliding mode control, synchronization

PACS: 05.45.Pq, 05.45.Xt

DOI: 10.7498/aps.62.230506

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 51202200), the Twelfth Five-year National Key Technology Research and Development Program of the Ministry of Science and Technology of China (Grant No. 2011BAD29B02).

[†] Corresponding author. E-mail: dlzhu@126.com