

# 不确定混沌系统的径向基函数神经网络 反馈补偿控制\*

曾喆昭<sup>†</sup>

(长沙理工大学电气与信息工程学院, 长沙 410076)

(2012年8月18日收到; 2012年9月3日收到修改稿)

对不确定混沌系统控制问题, 研究了一种基于径向基函数神经网络 (radial basis function neural network, RBFNN) 的反馈补偿控制方法. 该方法首先用 RBFNN 对混沌系统的动力学特性进行学习, 然后用训练好的 RBFNN 模型对混沌系统进行反馈补偿控制. 该方法的特点是不需要被控混沌系统的数学模型, 可以快速跟踪任意给定的参考信号. 数值仿真试验表明了该控制方法不仅具有响应速度快、控制精度高, 而且具有较强的抑制混沌系统参数摄动能力和抗干扰能力.

**关键词:** 混沌控制, 径向基神经网络, 反馈控制, 误差补偿

**PACS:** 05.45.Gg

**DOI:** 10.7498/aps.62.030504

## 1 引言

40 余年来, 混沌系统在信息处理、保密通信、化学工程、生物工程等领域获得了广泛应用<sup>[1-4]</sup>, 引起了国内外学者对混沌控制与同步研究的极大关注. 1990 年, Ott 等<sup>[5]</sup> 提出划时代意义的 OGY 方法以来, 混沌控制与同步一直成为非线性科学中的研究热点, 产生了许多新的混沌控制方法<sup>[6-16]</sup>. 在混沌控制研究方法中, 跟踪控制就是通过对受控系统施加控制, 使它的输出响应跟踪任意给定的参考信号. 如 Hénon 混沌系统对参考信号的跟踪控制<sup>[17]</sup>; Rössler 混沌系统对任意参考信号的跟踪控制<sup>[18]</sup>; 基于追踪控制思想实现混沌系统之间的异结构同步<sup>[19]</sup>; 基于非线性反馈控制方法实现混沌系统的全局变量的追踪控制等<sup>[20,21]</sup>. 但是, 以上研究存在的一个共同缺点是<sup>[15]</sup>: 受控混沌系统在完成对某一参考信号的追踪控制之后又要对另外

一个参考信号进行追踪控制, 因而需要根据相关原理重新设计控制器, 工作量大而且容易出错. 文献 [9] 提出基于径向基函数神经网络 (RBFNN) 的控制方法, 实现了混沌系统的控制. 然而该方法将混沌系统模型分解为线性和非线性两个部分, 并用 RBFNN 学习其非线性部分的特性, 然后在 Lyapunov 设计方法中采用训练好的 RBFNN 进行控制, 因此该方法需要依赖于对象模型. 文献 [22] 提出基于 RBFNN 的智能控制方法, 实现了未知模型混沌系统的控制. 该方法不需要被控对象模型, 具有较强的抑制混沌系统参数摄动能力和抗干扰能力. 但是, 对于  $n$  阶系统, 该方法需要训练  $n$  个 RBFNN 模型, 并依此构造  $n$  个控制器, 因此该控制方法计算量大.

对于  $n$  阶混沌系统, 本文只利用至多  $n-1$  个 RBFNN 模型训练不确定混沌系统, 并利用训练好的  $n-1$  个 RBFNN 模型分别构造  $n-1$  个控制器, 并在控制器中引入了模型误差的补偿. 数值仿真试

\* 国家自然科学基金 (批准号: 61040049) 和湖南省自然科学基金 (批准号: 11JJ6064) 和智能电网运行与控制湖南省重点实验室资助的课题.

<sup>†</sup> 通讯作者. E-mail: hncs6699@yahoo.com.cn; zengzhezha@qq.com

验表明,本控制方法不仅具有响应速度快、控制精度高,而且具有较强的抑制混沌系统参数摄动能力和抗干扰能力.

## 2 基于 RBFNN 的控制方法

RBFNN 是一种局部收敛的神经网络,因而具有很快的收敛速度.理论上已证明它能以任意精度逼近任意连续函数,其网络拓扑结构如图 1 所示.由图 1 可知,RBFNN 是一种三层前向网络,由输入到输出的映射是非线性的,而由隐含层空间到输出空间的映射是线性的,因而大大加快了学习速度并避免局部极小问题.

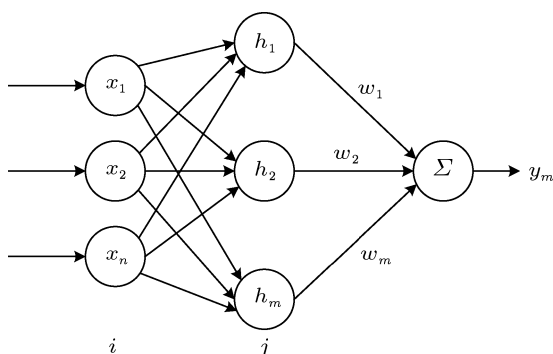


图 1 RBF 神经网络结构

### 2.1 RBFNN 算法分析

在 RBFNN 结构中,  $\mathbf{X} = [x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n]^T$  为神经网络的输入向量. 设 RBFNN 的径向基向量为  $\mathbf{H} = [h_1, h_2, \dots, h_j, \dots, h_m]^T$ , 其中  $h_j$  为高斯基函数:

$$h_j = \exp\left(-\frac{\|\mathbf{X} - \mathbf{C}_j\|^2}{2b_j^2}\right) \quad (j = 1, 2, \dots, m), \quad (1)$$

RBFNN 隐含层第  $j$  个结点的中心向量为  $\mathbf{C}_j = [c_{j1}, c_{j2}, \dots, c_{ji}, \dots, c_{jn}]^T$ , 其中,  $i = 1, 2, \dots, n$ .

设隐含层的基宽向量为  $\mathbf{B} = [b_1, b_2, \dots, b_j, \dots, b_m]^T$ ,  $b_j$  为节点  $j$  的基宽度参数, 且为大于零的数.

设网络的权值向量为  $\mathbf{W} = [w_1, w_2, \dots, w_j, \dots, w_m]^T$ , 则辨识网络的输出为

$$y_{nn}(k) = \sum_{j=1}^m w_j h_j, \quad (2)$$

设误差函数为  $e(k) = y_{out}(k) - y_{nn}(k)$ , 则辨识器的性能指标为

$$J = 0.5e^2(k), \quad (3)$$

其中,  $y_{out}(k)$  为  $k$  时刻不确定混沌系统状态输出. 根据梯度下降法, 输出权值、节点中心和节点基宽度参数的迭代算法如下:

$$w_j(k) = w_j(k-1) + \eta e(k) h_j + \alpha [w_j(k-1) - w_j(k-2)], \quad (4)$$

$$\Delta b_j = e(k) w_j h_j \frac{\|\mathbf{X} - \mathbf{C}_j\|^2}{b_j^3}, \quad (5)$$

$$b_j(k) = b_j(k-1) + \eta \Delta b_j + \alpha [b_j(k-1) - b_j(k-2)], \quad (6)$$

$$\Delta c_{ji} = -e(k) w_j h_j \frac{x_i - c_{ji}}{b_j^2}, \quad (7)$$

$$c_{ji}(k) = c_{ji}(k-1) + \eta \Delta c_{ji} + \alpha [c_{ji}(k-1) - c_{ji}(k-2)], \quad (8)$$

式中,  $\eta$  为学习率,  $\alpha$  为动量因子, 且  $0 < \eta < 1$ ,  $0 < \alpha < 1$ .

### 2.2 基于 RBFNN 的控制方法

考虑如下不确定混沌系统

$$x(k+1) = f(x(k), p) + u(k), \quad (9)$$

其中,  $x \in R^n$  为系统的状态向量,  $p$  为系统参数,  $u$  为控制项. 令 (9) 式中  $u(k) = 0$ , 得

$$x(k+1) = f(x(k), p). \quad (10)$$

利用 RBFNN 学习 (10) 式的输入输出关系, 可以得到其神经网络模型为

$$\hat{x}(k+1) = \hat{f}(x(k), p). \quad (11)$$

根据离散系统状态反馈原理设计控制器:

$$u(k) = -\hat{f}(x(k), p) - k_p e(k) + x(k), \quad (12)$$

其中误差为:  $e(k) = x(k) - x^*(k)$ ,  $x^*(k)$  为期望的控制目标 (参考信号),  $k_p > 0$  为反馈系数 (比例系数).

将 (12) 式代入 (10) 式, 则有

$$x(k+1) = f(x(k), p) - \hat{f}(x(k), p) - k_p e(k) + x(k), \quad (13)$$

如果 RBFNN 能很好地逼近 (10) 式所示系统, 由 (13) 式可得

$$x(k+1) = -k_p e(k) + x(k) \quad (14)$$

或

$$x(k+1) - x(k) = -k_p e(k). \quad (15)$$

为了证明 (12) 式是最优控制律, 下面给出系统稳定性分析.

### 2.3 系统稳定性分析

**定理1** 当且仅当反馈系数  $0 < k_p < 2$  时, (12) 式是最优控制律, 系统 (9) 在任意给定点  $x^*(k)$  是渐近稳定的.

**证明** 取 Lyapunov 函数为:  $V(k) = \frac{1}{2}e^2(k)$ , 则有

$$\Delta V(k) = \frac{1}{2}e^2(k+1) - \frac{1}{2}e^2(k), \quad (16)$$

由于  $e(k+1) = e(k) + \Delta e(k)$ , 代入 (16) 式, 并整理得

$$\Delta V(k) = \Delta e(k) \left[ e(k) + \frac{1}{2}\Delta e(k) \right]. \quad (17)$$

根据 (15) 式, 由  $e(k) = x(k) - x^*(k)$  可得:  $\Delta e(k) = \Delta x(k) - \Delta x^*(k)$ . 因为  $x^*(k)$  是给定的恒定值, 因此,  $\Delta x^*(k) = 0$ , 因而得:

$$\Delta e(k) = \Delta x(k) = x(k+1) - x(k) = -k_p e(k), \quad (18)$$

将 (18) 式代入 (17) 式, 整理得:

$$\Delta V(k) = -e^2(k)k_p \left[ 1 - \frac{1}{2}k_p \right]. \quad (19)$$

由于  $k_p > 0$ ,  $e^2(k) \geq 0$ , 为了保证 (19) 式所示的  $\Delta V(k) \leq 0$ , 必有:  $1 - \frac{1}{2}k_p > 0$  成立, 即  $k_p < 2$ . 考虑到  $k_p > 0$ , 因此有:  $0 < k_p < 2$ . 证毕.

由定理 1 可知, 当  $0 < k_p < 2$  时, 由 (12) 式构造的控制器施加于不确定混沌系统 (9) 时, 系统是渐近稳定的, 而且可以稳定跟踪任意给定的参考信号  $x^*(k)$ .

### 2.4 最优控制器的进一步讨论

尽管国内外学者从理论上已证明 RBF 神经网络能以任意精度逼近任意连续函数<sup>[22]</sup>, 但实际上是不可能的, 仿真结果也表明, 无论如何, 对某些受

控对象而言, 模型误差仍然是客观存在. 因此采用 (12) 式构造的控制器并非最优控制器, 因为其前提已假设 RBFNN 能很好地逼近 (10) 式所示系统. 由于模型误差的存在, 导致系统难以精确控制, 因此必须考虑模型误差的补偿控制方法, 以构造真正意义上的最优控制器  $u^{opt}(k)$ .

设模型误差为:  $e_m(k) = y_{out}(k) - y_{nn}(k)$ , 其中  $y_{out}(k)$  和  $y_{nn}(k)$  分别是第  $k$  时刻的被控对象的状态输出和 RBFNN 输出, 则有经误差补偿后的 RBFNN 输出为

$$y_{nn}^*(k) = y_{nn}(k) + e_m(k), \quad (20)$$

因此最优控制器为

$$u^*(k) = -y_{nn}^*(k) - k_p e(k) + x(k), \quad (21)$$

其中,  $e(k) = x(k) - x^*(k)$ .

## 3 实验仿真

以 Henon 混沌系统为例进行实验仿真. 带控制项的 Henon 混沌系统<sup>[16,22]</sup> 方程为

$$\begin{cases} x_1(k+1) = 1 - ax_1^2(k) + bx_2(k) + u(k), \\ x_2(k+1) = x_1(k), \end{cases} \quad (22)$$

当系统参数  $a = 1.4$ ,  $b = 0.3$ ,  $u(k) = 0$  时系统处于混沌状态, 如图 2 所示. 其不稳定平衡点为 (0.6314, 0.6314).

令 (22) 式的控制项  $u(k) = 0$ , 用 RBFNN 学习 (22) 式, 其中 RBFNN 的拓扑结构为  $2 \times 6 \times 1$ ,  $\eta = 0.2$ ,  $\alpha = 0.04$ ,  $\beta = 0.02$ . 经过 RBFNN 学习后得到 (22) 式的神经网络模型, 即

$$\begin{cases} \hat{x}_1(k+1) = \hat{f}(x_1(k), x_2(k)), \\ \hat{x}_2(k+1) = \hat{x}_1(k). \end{cases} \quad (23)$$

设最优控制器为

$$\begin{aligned} u^*(k) = & -[\hat{f}(x_1(k), x_2(k)) + e_m(k)] \\ & - k_p e(k) + x(k), \end{aligned} \quad (24)$$

其中, 预测模型误差为:  $e_m(k) = x_1(k) - \hat{x}_1(k+1)$ ,  $e(k) = x_1(k) - x_1^*(k)$ .

下列仿真实验中, 取反馈系数  $k_p = 1$ .

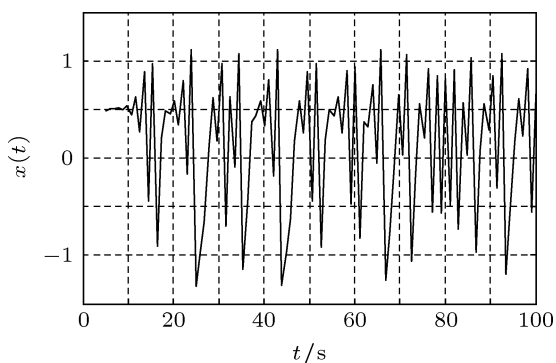


图2 Henon 混沌系统特性

### 3.1 无参数摄动、无测量噪声时混沌系统的跟踪控制

#### 仿真1 混沌系统平衡点跟踪

给定参考信号  $x_1^*(k) = 0.6314$  (不稳定平衡点), 在  $t = 50$  s (第 50 步) 加入 (24) 式所示的最优控制量  $u^*(k)$  于 (22) 式, 系统状态变化曲线如图 3 所示.

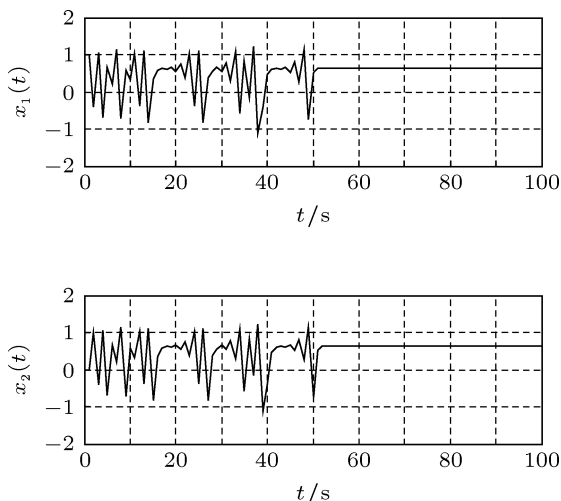


图3 Henon 混沌系统平衡点跟踪

#### 仿真2 混沌系统正弦信号跟踪

给定参考信号  $x_1^*(k) = 0.5 \sin(\pi k/20)$ , 在  $t = 50$  s 施加控制量  $u^*(k)$ , 跟踪结果如图 4 所示. 从图 4 中可以看出, 混沌系统在加入控制量后, 状态跟踪的过程中不再出现混沌现象, 相轨迹跟踪了正弦周期轨道, 有很好的跟踪效果.

### 3.2 不确定性混沌系统跟踪控制

当系统参数摄动、存在外部干扰时, 带控制项的 Henon 混沌系统为<sup>[16]</sup>

$$\begin{cases} x_1(k+1) = 1 - (a + \Delta a)x_1^2(k) \\ \quad + (b + \Delta b)x_2(k) + d_1(k) + u(k) \\ x_2(k+1) = x_1(k) + d_2(k), \end{cases} \quad (25)$$

其中, 不确定性为  $\Delta a = 0.01$ ,  $\Delta b = -0.01$ ; 外部干扰为  $d_1(k) = 0.04 \sin(k)$ ,  $d_2(k) = 0.01 \sin(k)$ . 令控制项  $u(k) = 0$ , 用 RBFNN 学习 (25) 式, 控制器仍然如 (24) 式所示.

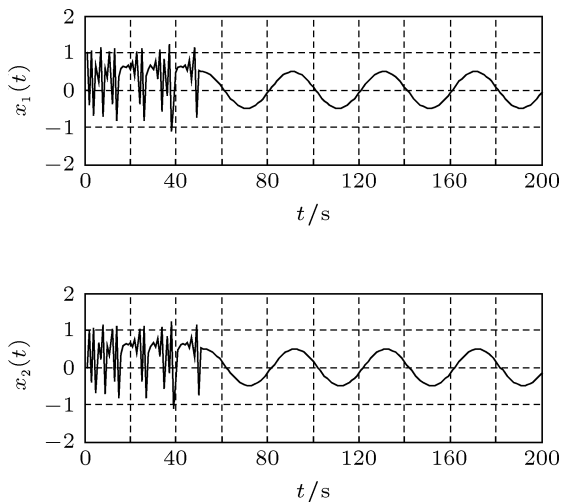


图4 Henon 混沌系统的正弦跟踪跟踪

#### 仿真3 混沌系统平衡点跟踪和正弦信号跟踪

分别给定参考信号  $x_1^*(k) = 0.6314$  和  $x_1^*(k) = 0.5 \sin(\pi k/20)$ , 在  $t = 50$  s 加入最优控制量  $u^*(k)$ , 系统状态变化曲线分别如图 5 和图 6 所示.

## 4 结论

本文研究的基于 RBFNN 的反馈补偿控制方法不需要被控混沌系统的数学模型, 通过 RBF 神经网络辨识未知被控对象, 并考虑模型误差的影响, 构造了最优控制器. 数值仿真试验表明了该控制方法可以使混沌控制系统控制到任意给定的参考信号, 不仅具有响应速度快、控制精度高, 而且具有较强的抑制混沌系统参数摄动能力和抗干扰能力.

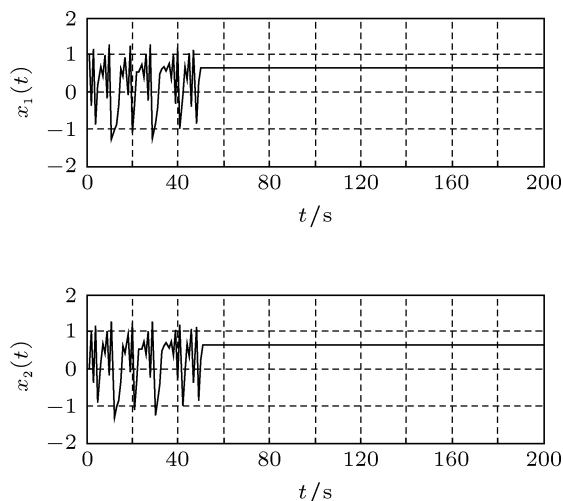


图5 平衡点跟踪

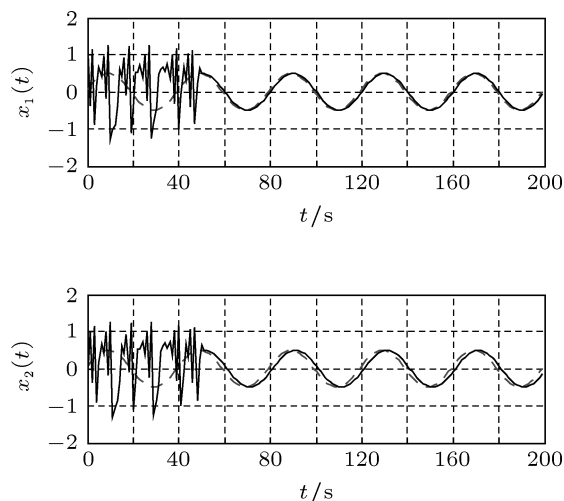


图6 正弦跟踪跟踪

- [1] Colet P, Roy R 1994 *Opt. Lett.* **19** 2056
- [2] Sugawara T, Tachikawa M, Tsukamoto T, Shimizu T 1994 *Phys. Rev. Lett.* **72** 3502
- [3] Lu J A, Wu X Q, Lü J H 2002 *Phys. Lett. A* **305** 365
- [4] Zhu S P, Qian F C, Liu D 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 2250 (in Chinese) [朱少平, 钱富才, 刘丁 2010 物理学报 **59** 2250]
- [5] Ott E, Grebogi C, Yorke A J 1990 *Phys. Rev. Lett.* **64** 1196
- [6] Pyragas K 1992 *Phys. Lett. A* **170** 421
- [7] Pyragas K 1993 *Phys. Lett. A* **180** 99
- [8] Tang G N, Luo X S, Kong L J 2000 *Acta Phys. Sin.* **49** 30 (in Chinese) [唐国宁, 罗晓曙, 孔令江 2000 物理学报 **49** 30]
- [9] Guan X P, Fan Z P, Peng H P, Wang Y Q 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 2108 (in Chinese) [关新平, 范正平, 彭海朋, 王益群 2001 物理学报 **50** 2108]
- [10] Song Y Z, Zhao G Z, Qi D L 2007 *Control Theory and Applications* **24** 795 (in Chinese) [宋运忠, 赵光宙, 齐冬莲 2007 控制理论与应用 **24** 795]
- [11] Gao X, Liu X W 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 84 (in Chinese) [高心, 刘兴文 2007 物理学报 **56** 84]
- [12] Wang F Q, Liu C X 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 5055 (in Chinese) [王发强, 刘崇新 2006 物理学报 **55** 5055]
- [13] Chen G P, Hao J B 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 2914 (in Chinese) [陈光平, 郝加波 2009 物理学报 **58** 2914]
- [14] Wang X F, Xue H J, Si S K, Yao Y T 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 3729 (in Chinese) [王晓锋, 薛红军, 司守奎, 姚跃亭 2009 物理学报 **58** 3729]
- [15] Luo X H, Li H Q, Chen Q H 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 7532 (in Chinese) [罗小华, 李华青, 陈秋华 2009 物理学报 **58** 7532]
- [16] Liu Z H, Zhang Y J, Zhang J, Wu J H 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 019501 (in Chinese) [刘朝华, 张英杰, 章兢, 吴建辉 2011 物理学报 **60** 019501]
- [17] Li L X, Peng H P, Lu H B 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 629 (in Chinese) [李丽香, 彭海朋, 卢辉斌 2001 物理学报 **50** 629]
- [18] Wang X Y, Shi Q J 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 5591 (in Chinese) [王兴元, 石其江 2005 物理学报 **54** 5591]
- [19] Ning D, Lu J A 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 4590 (in Chinese) [宁娣, 陆君安 2005 物理学报 **54** 4590]
- [20] Wu W G, Gu T X 2000 *Acta Phys. Sin.* **49** 1922 (in Chinese) [伍维根, 古天祥 2000 物理学报 **49** 1922]
- [21] Li G H, Xu D M, Zhou S P 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 181 (in Chinese) [李国辉, 徐得名, 周世平 2003 物理学报 **52** 181]
- [22] Liu D, Ren H P, Kong Z Q 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 531 (in Chinese) [刘丁, 任海鹏, 孔志强 2003 物理学报 **52** 531]

# Feedback compensation control on chaotic system with uncertainty based on radial basis function neural network<sup>\*</sup>

Zeng Zhe-Zhao<sup>†</sup>

(College of Electric and Information Engineering, Changsha University of Science and Technology, Changsha 410076, China)

(Received 18 August 2012; revised manuscript received 3 September 2012)

## Abstract

For the problem of controlling uncertain chaotic systems, a method of feedback compensation control based on the radial basis function neural network (RBFNN) is studied. In the proposed method, dynamic properties of chaotic system is first trained by RBFNN, and then feedback compensation control for chaotic system is implemented using trained good RBFNN model. The characteristics of this method is that this method can quickly track any given reference signal with on requirement for any mathematic model of controlled chaos system. The numerical simulation results show that the proposed control method not only has the fast response speed, high control accuracy, but also has a stronger ability to suppress parameter perturbation and to resist interference to chaos system.

**Keywords:** chaotic control, RBF neural network, feedback control, error compensation

**PACS:** 05.45.Gg

**DOI:** 10.7498/aps.62.030504

---

<sup>\*</sup> Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 61040049), the Natural Science Foundation of Hunan Province, China (Grant No. 11JJ6064) and Key Laboratory of Intelligent Power Grid Operation and Control of Hunan Province, China.

<sup>†</sup> Corresponding author. E-mail: hncs6699@yahoo.com.cn; zengzhezha@qq.com