

## 耦合分数阶布朗马达在非对称势中的输运\*

王飞<sup>1)2)</sup> 邓翠<sup>1)</sup> 屠浙<sup>1)</sup> 马洪<sup>1)†</sup>

1) (四川大学数学学院, 成都 610064)

2) (电子信息控制重点实验室, 成都 610036)

(2012年7月17日收到; 2012年9月20日收到修改稿)

讨论了分数阶 Frenkel-Kontorova 模型的物理意义, 并应用该模型刻画了耦合粒子链在记忆性介质中的输运现象, 研究了各参数对粒子链运动状态的影响. 数值仿真结果表明: 系统的记忆性对粒子链的运动有显著影响, 尤其出现了在非记忆性情况下所不具有的反向流. 同时发现粒子链的平均流速会随耦合强度、分数阶的阶数变化而产生广义共振; 此外, 平均流速还会随噪声强度的变化出现广义随机共振现象.

**关键词:** 分数阶 Frenkel-Kontorova 模型, 记忆性介质, 随机共振, 定向输运反向流

**PACS:** 05.10.Gg, 45.10.Hj

**DOI:** 10.7498/aps.62.040501

## 1 引言

关于布朗马达<sup>[1]</sup> 问题的研究, 最初是源于热力学中有关第二类永动机问题的争论, 以及希望对一些复杂的运输机制给出合理解释. 以往的研究大多集中于对单个布朗马达运输机制的分析<sup>[2,3]</sup>, 但在许多情况下粒子之间的相互作用是不可避免的, 甚至有时起着决定性作用. 最近二十年, 在对耦合布朗马达的研究中, 发现耦合能够促使粒子链有更快的平均流速<sup>[4,5]</sup>, 而驱动力频率对粒子链的运动方向也有显著影响<sup>[6]</sup>, 并且在对称周期势下粒子链也能产生定向输运<sup>[7,8]</sup> 等. 随着分子操纵技术的发展, 耦合布朗马达的定向输运问题开始受到化学和生物学等不同学科领域的密切关注<sup>[9,10]</sup>. 在化学方面, 应用 Frenkel-Kontorova (FK) 模型研究了链状分子十六烷的输运现象<sup>[11]</sup>; 在生物学的分子马达研究中, 发现许多稍大的分子马达实际具有复杂的内部结构, 即具有如双头和多头肌动蛋白马达这样的多自由度特殊结构, 多个这样的分子马达相互作用时就会产生复杂的输运现象<sup>[12,13]</sup>. 但目前关于耦合布朗马达输运现象的研究仍大多局限于整数阶动力系统<sup>[1-13]</sup>.

越来越多的研究表明, 粒子在黏性介质中的运动具有“记忆性”, 这是整数阶动力系统难以刻画的, 而近年迅速发展起来的分数阶随机微分方程理论, 则特别适合于描述具有记忆、遗传和路径依赖性的物理、化学和生物学现象<sup>[14,15]</sup>, 为研究耦合布朗马达在具有“记忆性”黏性介质中的输运现象提供了崭新的数学工具.

本文应用分数阶 FK 模型研究粒子链在黏性介质中的定向输运现象. 通过数值模拟, 观察到整数阶动力系统情况下所没有的定向输运反向流; 此外, 还讨论了阶数、耦合强度和噪声强度分别对粒子链的平均流速的影响, 发现当固定噪声强度时, 粒子链的平均流速随耦合强度、阶数的变化会产生广义共振; 而当阶数固定时, 粒子链的平均流速则会随噪声强度的变化出现广义随机共振现象.

## 2 模型建立

## 2.1 经典的 FK 模型

考虑经典的 FK 模型<sup>[16,17]</sup>, 如图 1 所示, 周期长为  $l$  的棘齿势  $V(x)$ , 在外力  $y_i(t)$  和噪声的驱动

\* 国家自然科学基金 (批准号: 11171238) 资助的课题.

† 通讯作者. E-mail: mahong@scu.edu.cn

下, 忽略惯性效应, 系统运动方程为

$$\gamma \dot{x}_i = k(x_{i+1} - 2x_i + x_{i-1}) - \frac{\partial V(x_i)}{\partial x_i} + y_i(t) + \sqrt{2D}\xi_i(t) \quad (i = 1, 2, \dots, N), \quad (1)$$

其中  $k$  为耦合强度,  $D$  为噪声强度, 设粒子间自由长度为  $a$ , 不显含于上式,  $\gamma$  为阻尼系数, 为方便通常设  $\gamma = 1$ ,  $\xi_i(t)$  为高斯白噪声:  $\langle \xi_i(t) \rangle = 0$ ,  $\langle \xi_i(t)\xi_j(t') \rangle = \delta_{ij}\delta(t-t')$ .

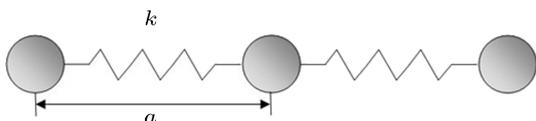


图1 FK模型原理图

### 2.2 分数阶 FK 模型

对于上述方程 (1), 方程左端阻尼项可以改写为  $\gamma \dot{x}_i = \gamma \int_0^t \delta(t-\tau)\dot{x}_i(\tau)d\tau$ , 这表明在非黏性均匀介质中运动的布朗粒子受到的阻尼力只与粒子当前时刻的速度有关; 而在黏性介质中, 粒子受到的阻尼力通常具有记忆性<sup>[18]</sup>, 即作用在粒子上的阻尼力不仅依赖于当前时刻的速度, 还与过去时刻的速度有关, 并以加权的方式表现为阻尼核函数  $\gamma(t)$ <sup>[19,20]</sup>, 此时的 FK 方程为

$$\int_0^t \gamma(t-\tau)\dot{x}_i(\tau)d\tau = k(x_{i+1} - 2x_i + x_{i-1}) - \frac{\partial V(x_i)}{\partial x_i} + y_i(t) + \sqrt{2D}\xi_i(t) \quad (i = 1, 2, \dots, N). \quad (2)$$

然而在很多物理和生化环境中, 黏性介质对速度通常具有幂律记忆性: 距当前时刻越近, 记忆性越强; 距当前时刻越远, 记忆性越差. 描述这种褪色记忆性的阻尼核函数  $\gamma(t)$  为<sup>[21]</sup>

$$\gamma(t) = \frac{\gamma_0}{\Gamma(1-\alpha)} |t|^{-\alpha} \quad (0 < \alpha < 1), \quad (3)$$

为方便通常设  $\gamma_0 = 1$ .

由图 2 可以看出,  $\gamma(t)$  随着时间  $t$  的增加按  $t$  的幂次逐渐衰减,  $\alpha$  越大  $\gamma(t)$  衰减越快,  $\alpha$  越小  $\gamma(t)$  衰减越慢.

把 (3) 式带入 (2) 式得到

$$\frac{\gamma_0}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{-\alpha} \dot{x}_i(\tau) d\tau = k(x_{i+1} - 2x_i + x_{i-1}) - \frac{\partial V(x_i)}{\partial x_i} + y_i(t)$$

$$+ \sqrt{2D}\xi_i(t) \quad (i = 1, 2, \dots, N). \quad (4)$$

根据 Caputo 分数阶微积分的定义<sup>[22,23]</sup>, 上式可以写为

$${}_0^C D_t^\alpha x_i(t) = k(x_{i+1} - 2x_i + x_{i-1}) - \frac{\partial V(x_i)}{\partial x_i} + y_i(t) + \sqrt{2D}\xi_i(t) \quad (i = 1, 2, \dots, N; \quad 0 < \alpha < 1), \quad (5)$$

称 (5) 式为分数阶 FK 模型.

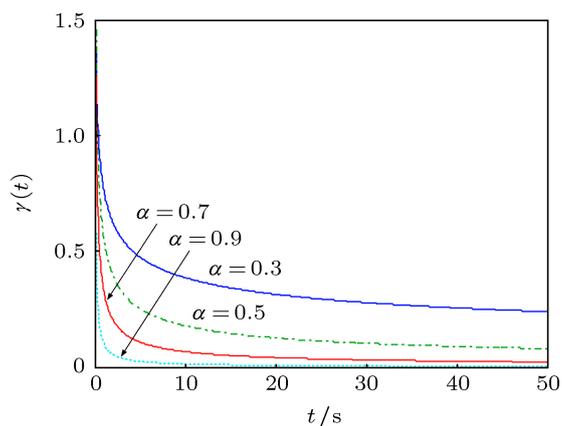


图2 分数阶阻尼核函数  $\gamma(t)$

### 2.3 模型说明

这里所关心的重点是耦合系统粒子链的平均流速<sup>[5]</sup>, 定义如下:

$$v = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \int_0^T \dot{x}_i(t) dt, \quad (6)$$

其中  $N$  是系统中的粒子数,  $T$  为总时间. 平均流速是一个宏观物理量, 反映了粒子运动的一个整体趋势.

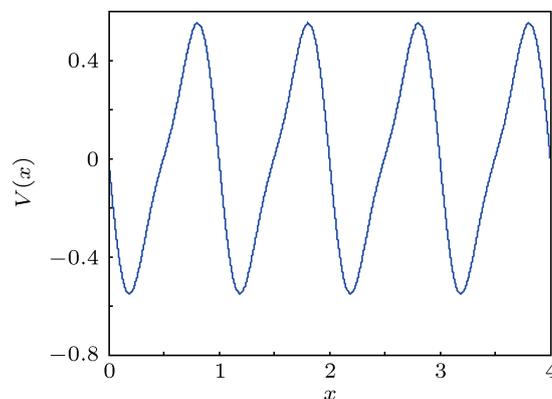


图3 势函数  $V(x)$  示意图

我们选用一个周期  $l = 1$  的棘轮势, 形式为

$$V(x) = -\frac{1}{2} \sin(2\pi x) - \frac{1}{8} \sin(4\pi x), \quad (7)$$

$V(x)$  的示意图如图 3.

对外力  $y_i(t)$ , 要求满足  $\langle y_i(t) \rangle = 0$ , 即外力无偏置. 这里主要考虑  $y_i(t)$  为对称的周期力

$$y(t) = A \sin(\omega t), \quad (8)$$

其中  $A$  为周期力幅度,  $\omega$  为周期力的角频率.

### 3 数值模拟

当粒子间没有相互作用, 即  $k = 0$  时, 系统转化为外力作用下的单粒子在棘轮势中的运动; 当粒子间相互作用趋于无穷大, 即  $k \rightarrow \infty$  时, 所有粒子都被刚性束缚在一起, 系统的动力学行为相当于单个粒子在有效势

$$V_{\text{eff}}(x) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N V(x + ia) \quad (9)$$

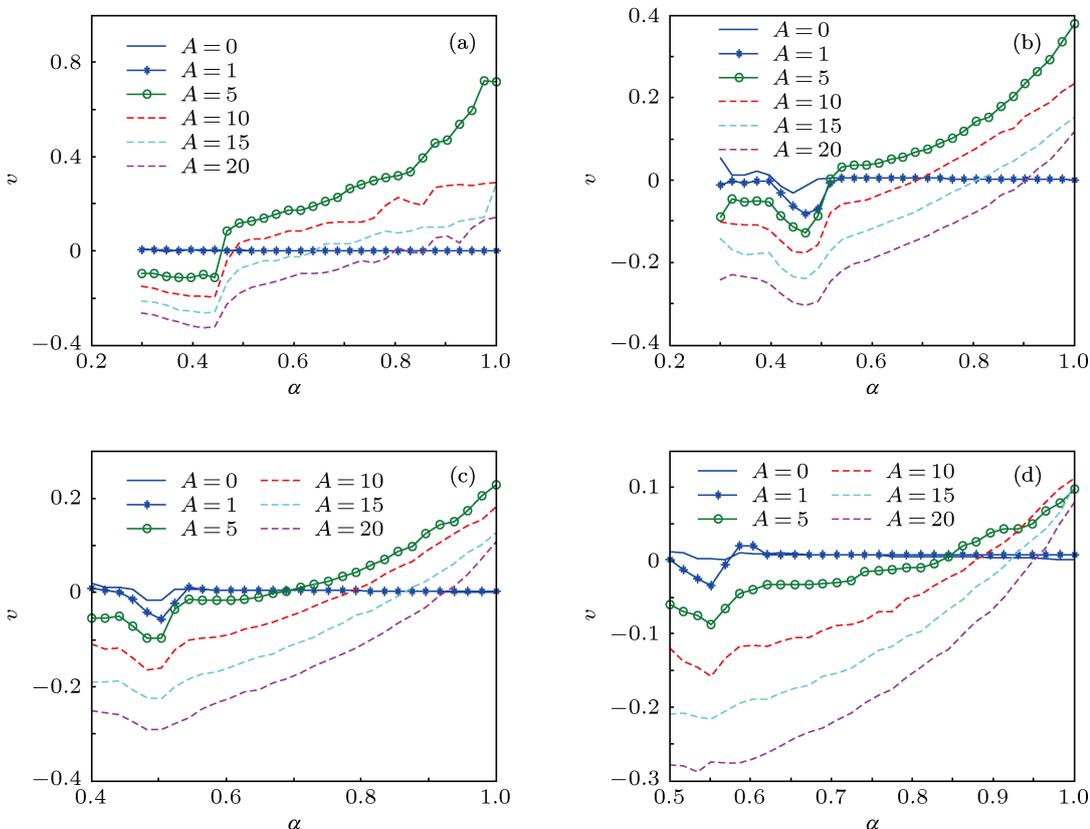


图 4 不同耦合强度和周期力幅度下, 粒子链平均流速  $v$  与阶数  $\alpha$  的关系 (a)  $k = 0$ ; (b)  $k = 3$ ; (c)  $k = 5$ ; (d)  $k = 10$

中的运动 [5]. 本文排除上述极端情况, 主要考虑对于有限大小的耦合强度  $k$ , 粒子间的相互作用所引起的复杂定向输运行为.

为了模拟方程 (5) 所刻画的粒子运动, 我们采用分数阶差分法 [22]. 采样步长  $\Delta t = 0.005$  s, 仿真时间取 50 s, 粒子数  $N = 10$ , 角频率  $\omega = 1$ , 噪声强度  $D = 0.1$ , 采用周期边界.

需要指出的是, 粒子  $x_i$  在时刻  $t$  受到的阻尼力为  $\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{-\alpha} \dot{x}_i(\tau) d\tau$ , 即  $t$  时刻的阻尼力是时段  $[0, t]$  内的速度关于阻尼核  $\gamma(t)$  的加权平均. 当阶数  $\alpha \rightarrow 1$  时, 即系统的记忆性变差, 核函数  $\gamma(t)$  的衰减加快, 这意味着历史速度对当前阻尼力贡献减少, 阻尼力变弱, 导致粒子具有更快的输运速度; 而当阶数  $\alpha$  降低时, 即系统的记忆性增强, 历史速度对当前阻尼力贡献增强, 阻尼力也随之增强, 致使定向输运的速度减缓, 甚至当这种记忆性增强到某一程度时, 促使粒子反向越过势垒, 形成定向输运反向流.

对不同强度的周期力和不同大小的耦合强度, 图 4 给出了平均流速  $v$  与阶数  $\alpha$  的关系.

在周期力强度较弱时 ( $A = 0, 1$ ), 小周期力不足以使得单个粒子越过势垒, 粒子只能在势阱中徘徊. 当粒子间不存在相互作用, 即  $k = 0$  时, 众粒子的运动不能相互协调, 各粒子在时刻  $t$  所受阻尼力的方向也不尽相同, 即使较小的阶数  $\alpha$  导致历史速度对当前阻尼力贡献较强, 也不足以使得单个粒子越过势垒形成定向运输; 但若粒子间存在相互作用, 即  $k > 0$  时, 耦合使得粒子间的运动相互协调, 各粒子在时刻  $t$  所受阻尼力也就具有较大的同向分量, 加之小周期力和噪声的作用, 这样当阶数足够小时, 粒子链将形成定向运输反向流.

在受到较强的周期力时, 周期力能促使单个粒子越过势垒. 我们观察到, 若阶数  $\alpha \rightarrow 1$  时, 系统的记忆性变差, 有正的定向流出现; 但当  $\alpha \rightarrow \alpha_0$  ( $\alpha_0$  为  $v(\alpha)$  与横坐标交点对应的阶数, 参见图 4) 时, 系统的记忆性增强导致粒子运动的阻尼力增强, 平均流速  $v$  将减小并趋于 0; 随着阶数  $\alpha$  继续减小, 将会出现定向运输反向流, 并在负方向上出现一个共振峰值. 对于不同的周期力强度, 发现在  $A = 5$  的时

候, 对应着较大的正向平均流速, 说明系统在阶数和耦合强度固定时, 存在一个使粒子链平均流速极大的  $A$ . 并且对于具有较大正向平均流速的  $A$ , 要使系统出现定向运输反向流的阻尼力也应较大, 因此对阻尼力有实质贡献的历史时间需要更长, 也就是对应于更小的  $\alpha_0$ ; 而当周期力幅度  $A$  相同时, 随着耦合强度  $k$  的增加,  $\alpha_0$  也增加.

对不同的阶数  $\alpha$ , 图 5 给出了周期力幅度  $A = 2.3$  时, 平均流速  $v$  与耦合强度  $k$  的关系. 当  $\alpha = 1$  和  $0.8$  时, 可以明显观察到正向上的共振曲线, 即在某一优化耦合强度下系统存在正向极大平均流速. 随着阶数下降到  $0.5$ , 系统记忆性增强, 系统产生了反向流, 并随  $k$  增加, 在负向上出现了共振曲线, 即在  $k \approx 3$  时, 粒子链存在负向极大平均流速. 这组曲线表明: 太弱的耦合不能使得粒子之间形成统一的跃迁; 太强的耦合, 所有粒子束缚在一起, 同样限制了粒子链的运输; 适当的耦合强度可以使粒子链的运输速度达到极值.

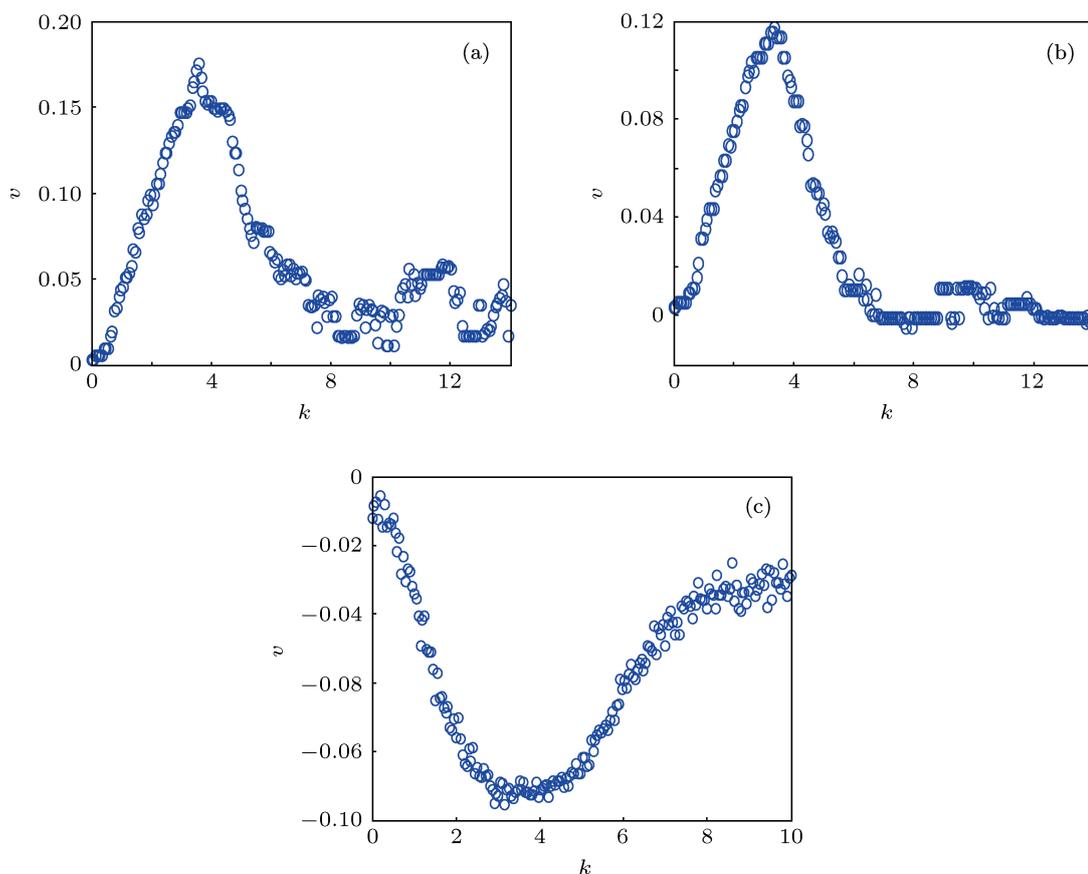


图 5 不同阶数下, 粒子链平均流速  $v$  与耦合强度  $k$  的关系 (a)  $\alpha = 1.0$ ; (b)  $\alpha = 0.8$ ; (c)  $\alpha = 0.5$

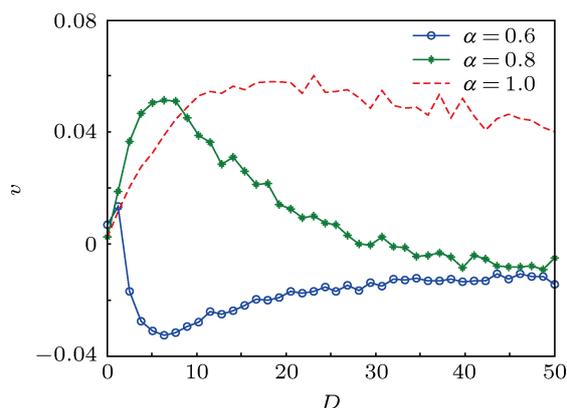


图 6 阶数固定情况下, 运输速度  $v$  与噪声强度  $D$  关系

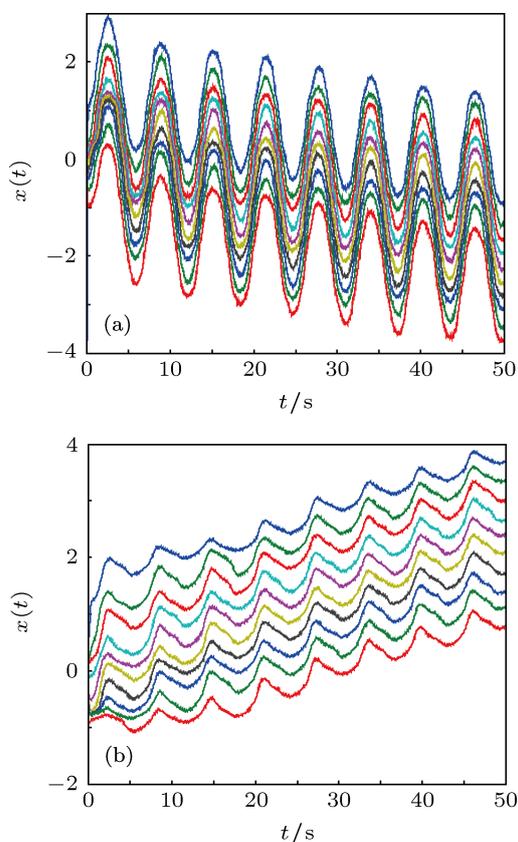


图 7 不同阶数下, 各粒子平均位移随时间的演化 (a)  $\alpha = 0.6$ ; (b)  $\alpha = 0.8$

固定  $A = 1.6, k = 3$ , 图 6 展示了平均流速  $v$  与噪声强度  $D$  的关系. 我们发现当阶数为 1 时, 系统不具有记忆性, 平均流速  $v$  在正向上产生了广义随机共振现象. 当  $\alpha = 0.8$  时, 系统记忆性较弱, 观察到了与整数阶情况相同的现象, 但在噪声强度较弱的时候 ( $D < 8$ ), 平均流速明显快于整数阶情况, 这主要是由于在具有记忆性的系统中, 历史速度对当前阻尼力有贡献, 而历史速度受到历史噪声的影响, 因此历史噪声间接地对当前速度做出贡献, 所以较之整数阶情况, 达到极大平均流速所需要的噪声强度明显下降. 而当阶数减少到 0.6 时, 系统记忆性再增强, 平均流速  $v$  随噪声强度  $D$  的增加在负向上产生了广义随机共振现象.

固定噪声强度  $D = 5$ , 图 7 给出  $\alpha$  分别为 0.6 及 0.8 时, 各粒子平均位移  $\langle x_i(t) \rangle$  的时间演化. 可以明显地看出, 当  $\alpha = 0.6$  时粒子整体向负方向运动, 而  $\alpha = 0.8$  时粒子整体向正方向运动. 这同样证实了前文的结论: 分数阶的阶数, 即系统的记忆性, 对粒子链的运动方向有显著影响.

## 4 结论

本文主要研究了粒子链在阶数和其他参数相互作用下的复杂输运现象. 得到以下结论: 1) 系统的记忆性即系统的阶数对粒子链的运动状态有显著影响, 在固定其他参数时, 调节阶数将导致粒子链出现定向输运反向流, 并在某一阶数产生随机共振; 2) 不同阶数的噪声 - 平均流速曲线  $v(D)$  表明, 分数阶系统出现极大平均流速所需的噪声强度较之整数阶系统更小; 并且在小噪声状态下, 平均流速明显快于整数阶系统; 3) 当阶数固定时, 耦合强度 - 平均流速曲线  $v(k)$  表明, 平均流速会随耦合强度的变化出现广义共振, 当阶数较大即系统记忆性较弱时, 出现正向粒子流的广义共振, 而当阶数较小即系统记忆性较强时, 则出现反向粒子流的广义共振.

[1] Hänggi P, Marchesoni F 2009 *Rev. Mod. Phys.* **81** 387  
 [2] Qian M, Wang Y, Zhang X J 2003 *Chin. Phys. Lett.* **20** 810  
 [3] Ai B Q, He Y F 2010 *J. Chem. Phys.* **132** 094504  
 [4] Wang H Y, Bao J D 2004 *Physica A* **337** 13  
 [5] Csahók Z, Family F, Vicsek T 1997 *Phys. Rev. E* **55** 5179  
 [6] Ai B Q, He Y F, Zhong W R 2011 *Phys. Rev. E* **83** 051106  
 [7] Kumar K V, Ramaswamy S, Rao M 2008 *Phys. Rev. E* **77** 020102

[8] Gehlen S V, Evstigneev M, Reimann P 2009 *Phys. Rev. E* **79** 031114  
 [9] Fendrik A J, Romanelli L 2012 *Phys. Rev. E* **85** 041149  
 [10] Zheng Z G 2004 *Spatiotemporal Dynamics and Collective Behaviors in Coupled Nonlinear Systems* (Beijing: Higher Education Press) p279 (in Chinese) [郑志刚 2004 耦合非线性系统的时空动力学与合作行为 (北京: 高等教育出版社) 第 279 页]  
 [11] Vadakkepatt A, Dong Y L, Lichter S, Martini A 2011 *Phys. Rev. E* **84**

- 066311
- [12] Nishikawa M, Takagi H, Shibata T, Iwane A H, Yanagida T 2008 *Phys. Rev. Lett.* **101** 128103
- [13] Campàs O, Kafri Y, Zeldovich K B, Casademunt J, Joanny J F 2006 *Phys. Rev. Lett.* **97** 038101
- [14] Liu F, Anh V V, Turner I, Zhuang P 2003 *J. Appl. Math. Comp.* **13** 233
- [15] de Andrade M F, Lenzi E K, Evangelista L R, Mendes R S, Malacarne L C 2005 *Phys. Lett. A* **347** 160
- [16] Braun O M, Kivshar Y S 2004 *The Frenkel-Kontorova Model: Concepts, Methods and Application* (New York: Springer)
- [17] Han X Q, Jiang H, Shi Y R, Liu Y X, Sun J H, Chen J M, Duan W S 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 116801 (in Chinese) [韩秀琴, 姜虹, 石玉仁, 刘妍秀, 孙建华, 陈建敏, 段文山 2011 物理学报 **60** 116801]
- [18] Bao J D 2009 *Random Simulation Method of Classical and Quantum Dissipation System* (Beijing: Science Press) p80 (in Chinese) [包景东 2009 经典和量子耗散系统的随机模拟方法 (北京: 科学出版社) 第 80 页]
- [19] Oldham K B, Spanier J 1974 *The Fractional Calculus* (New York: Academic Press)
- [20] Kou S C, Xie X S 2004 *Phys. Rev. Lett.* **93** 180603
- [21] Gao S L, Zhong S C, Wei K, Ma H 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 100502 (in Chinese) [高仕龙, 钟苏川, 韦鹏, 马洪 2012 物理学报 **61** 100502]
- [22] Podlubny I 1999 *Fractional Differential Equations* (San Diego, CA: Academic Press)
- [23] Samko S G, Kilbas A A, Marichev O I 1993 *Fractional Integrals and Derivatives Theory and Applications* (New York: Gordon and Breach Science Publisher)

## Transport of fractional coupled Brownian motor in asymmetric periodic potential\*

Wang Fei<sup>1)2)</sup> Deng Cui<sup>1)</sup> Tu Zhe<sup>1)</sup> Ma Hong<sup>1)†</sup>

1) (College of Mathematics, Sichuan University, Chengdu 610065, China)

2) (Science and Technology on Electronic Information Control Laboratory, Chengdu 610036, China)

(Received 17 July 2012; revised manuscript received 20 September 2012)

### Abstract

In this paper, we first discuss the physical meaning of the fractional Frenkel-Kontorova model and depict the transport phenomenon of elastically coupled particles in a memorable medium, then give the effects of various parameters on the motion of coupled particles. According to the numerical value, the memory effect of system has a significant influence on the motion of coupled particles, in addition, the current reversal which does not exist in a non-memorable system appears, this is an abnormal phenomenon. What is more in this research we find that there appears the generalized resonance in the system mean velocity as the spring constant and the fractional order are varied, and the generalized stochastic resonance will appear with noise intensity changing.

**Keywords:** fractional Frenkel-Kontorova model, memorable medium, stochastic resonance, current reversal

**PACS:** 05.10.Gg, 45.10.Hj

**DOI:** 10.7498/aps.62.040501

\* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 11171238).

† Corresponding author. E-mail: mahong@scu.edu.cn