# 关于 Airy 光束衍射及自加速性质的研究*

乐阳阳† 肖寒 王子潇 吴敏

(南京大学现代工程与应用科学学院, 南京 210093)

(2012年7月22日收到; 2012年9月4日收到修改稿)

对 Airy 光束的特性做进一步探讨, 一方面对无限宽 Airy 光束的重心问题给出新的理论说明, 另一方面着重对有限宽情形下的 Airy 光束的奇特性质进行探讨. 文中采用反证法给出无衍射的讨论, 同时结合数值模拟给出高斯函数及矩形函数限定下的有限宽 Airy 光束的场分布, 并由此得到其重心位置的轨迹: 重心位置是不变的, 不可能整体自由加速. 最终得到有限宽 Airy 光束既不可能在自由空间加速, 也不可能是无衍射光束.

**关键词**: Airy 光束, 无衍射, 自加速, 数值模拟

**PACS:** 42.25.Fx, 42.25.Dd, 02.60.Cb **DOI:** 10.7498/aps.62.044205

## 1 引 言

Airy 光束具有的无衍射、自加速等特殊性质, 引起了不同学科研究者的关注. 1979 年 Berry 和 Balazs [1] 获得了一维含时薛定谔方程在以 Airy 函数作为初值条件时的严格解, 并把该解所描述的波函数称作 Airy 波包. 他们发现, Airy 波包具有完全无衍射 (无形变)、无外力自加速等奇特的性质, 并证明了该波包解是一维含时薛定谔方程的惟一非平凡无衍射解. 但现实的 Airy 光束必然是有限宽度的, 更具现实意义. 2007 年 Siviloglou 等 [2,3] 研究了某种形式有限宽的 Airy 光束自加速性质. 近年来, Airy 光束在理论性质 [4]、实验制备方法 [5] 以及应用前景 [6−9] 等方面都取得了积极的进展, 并逐渐成为光学领域的一个研究热点 [10,11]. 然而, 目前对 Airy 光束 (特别是有限宽 Airy 光束) 的基本性质仍存在误解. 本文将利用解析和数值计算手段, 对其中的一些基本问题进行讨论和澄清.

## 2 无限宽 Airy 光束

Berry 和 Balazs[1] 在研究 Airy 波包时, 给定的初值条件为

$$\psi(x,0) = \mathrm{Ai}\left(Bx/h^{2/3}\right), \tag{1}$$

结合薛定谔方程求得其严格解为

$$\begin{aligned}\psi(x,t) =& \mathrm{Ai}\left[\frac{B}{h^{2/3}}\left(x-\frac{B^3t^2}{4m^2}\right)\right]\\ &\times\exp\left[\mathrm{i}\frac{B^3t}{2mh}\left(x-\frac{B^3t^2}{6m^2}\right)\right],\end{aligned} \tag{2}$$

其中 $m$ 为粒子质量, $B$ 为任意常数, 而 Ai 是第一类 Airy 函数.

从波包的表达式来看, 其波函数的模平方为

$$|\psi(x,t)|^2 = \mathrm{Ai}^2\left(ax-bt^2\right). \tag{3}$$

随着时间 $t$ 的增长, 波形保持不变, 但整体呈加速运动, 因此表现出无衍射和自加速性质. 无外力自加速显然违背埃伦费斯特定理 [12], Berry 等对此做出解释, 认为主要原因在于 Airy 波包不是平方可积函数, 因此重心无法定义, 从而没有违背埃伦费斯特定理.

本文对此问题做一些更细致的讨论. 形式上可以用一个极限给出 Airy 光束的重心位置. 根据量子力学重心定义:

$$\bar{x} = \frac{\int_{-R}^{R} x\psi(x)\,\psi(x)^*\,\mathrm{d}x}{\int_{-R}^{R}\psi(x)\,\psi(x)^*\,\mathrm{d}x}$$

* 国家自然科学基金 (批准号: 11074120) 和南京大学大学生创新训练计划 (批准号: XZ1110284048) 资助的课题.

† 通讯作者. E-mail: yueyy1991@163.com

 

$$=\frac{\int_{-R}^{R} x\mathrm{Ai}^2(x)\,\mathrm{d}x}{\int_{-R}^{R}\mathrm{Ai}^2(x)\,\mathrm{d}x}, \tag{4}$$

我们发现, 当 $R\to\infty$ 时有 $\bar{x}/R=-1/3$, 并进一步可得 $\bar{x}-\left(-\frac{R}{3}\right)\to 0$. 即在 $R\to\infty$ 时 $[-R,R]$ 范围内的 Airy 光束的重心位置存在精确的解析表达式:

$$\bar{x}=-R/3. \tag{5}$$

因此, 从极限的角度来看, Airy 光束的重心是可以有意义的. 不过, 即使如此仍不能说 Airy 光束违背埃伦费斯特定理. 因为即使 $R\to\infty$, $[-R,R]$ 上的 Airy 光束仍不是孤立系统, 在 $-R$ 处不断有概率流涌入, 从而导致 Airy 光束的重心改变.

为了避免重心的定义仍存在模糊之处, 可从另一方面进行考虑. 根据文献, 当外加势场具有 $V(x,t)=F(t)x$ 形式时, Airy 波包在传播过程中仍然是无衍射的. 此时解的具体形式为 [1]

$$\begin{aligned}\psi(x,t)=&\mathrm{Ai}\left[\frac{B}{h^{2/3}}\left(x-\frac{B^2t^2}{4m^2}-\int_0^{\tau}\frac{\mathrm{d}\tau(t-\tau)F(\tau)}{m}\right)\right]\\&\times\exp[\mathrm{i}\varphi(x,t)].\end{aligned} \tag{6}$$

特别地, 如果令外力 $F(t)=-B^3/2m$, 上式中括号内与 $t$ 有关的两项恰好相互抵消, 解的形式可简化为

$$\psi(x,t)=\mathrm{Ai}\left(\frac{Bx}{h^{2/3}}\right), \tag{7}$$

此时在有外力作用的情况下, 得到的却是一个无加速的解. 那么在给定的外力条件下 Airy 波包反而静止, 这样就很难说它不违背埃伦费斯特定理.

## 3 有限宽 Airy 光束

以上讨论都是针对无限宽 Airy 光束系统, 但现实的 Airy 光束必然是有限宽度的. 所以, 更有现实意义的问题是有限宽度的 Airy 光束的重心是否会自加速. 2007 年, Siviloglou 等 [2] 研究了某种特殊形式的有限宽 Airy 光束的自加速性质. 他们采用的方法是在初值条件中加上了 e 指数形式的衰减因子, 即 $\psi(x,0)=\mathrm{Ai}(x)\exp(ax)$, 其中常数 $a>0$. 由于在 $x$ 轴的负向, $a>0$ 对函数有收敛作用, 而在 $x$ 轴正向 $\mathrm{Ai}(x)$ 比 $\exp(ax)$ 更快地趋向于 0. 因此, 乘上该因子后可以使光束能量局限在有限区域内. 他们得到了局部范围的严格解, 并宣称在实验中观察到了有限宽 Airy 光束的自加速现象. 然而, 我们认为这可能只是一种假象. 严格地讲, 有限宽度的 Airy 光束既不可能无衍射, 也不可能整体自由加速. 事实上, 随后 Besieris 和 Shaarawi[13] 对此问题的进一步研究表明, 该形式的有限宽 Airy 光束的重心位置是一个常数. 其具体形式为

$$\bar{x}=\frac{4a^3-1}{4a}. \tag{8}$$

在以上有限宽 Airy 光束的研究中, 采用的是 $\exp(ax)$ 形式的限定, 此时恰好可获得严格的解析解. 但是实验中更常见的是高斯函数形式的限定, 这样能更有效地获得有限宽度的 Airy 光束. 下面就对高斯函数形式限定的有限宽 Airy 光束的性质进行讨论.

1979 年 Berry 和 Balazs 研究的 Airy 波包满足的是含时薛定谔方程, 不是光学体系. 本文所研究的 Airy 光束满足的是二维傍轴波动方程, 两者在数学形式上完全等价. 二维傍轴波动方程的具体形式为

$$\frac{\partial^2 E}{\partial y^2}-2\mathrm{i}k\frac{\partial E}{\partial z}=0, \tag{9}$$

于是问题变为初值条件为 $E(y,0)=\mathrm{Ai}(y)\exp\left(-\frac{y^2}{y_0^2}\right)$ 的二维傍轴波动方程 (9) 的求解.

首先利用反证法给出此类有限宽 Airy 光束不可能具有无衍射性质. 不失一般性, 可假设解的形式为

$$E(y,z)=\mathrm{Ai}(f_1)\exp(f_2), \tag{10}$$

其中 $f_1$, $f_2$ 是 $y$ 和 $z$ 的函数. 如果该解具有无衍射的特性, 那么 $f_1$ 必须满足无衍射特解 $f_1=ay+f_3(z)$ 的形式 (其中 $f_3$ 仅是 $z$ 的函数)[1], 基于这样的假定, 通过分离变数法的求解可获得 $f_1$, $f_2$ 的表达式:

$$\begin{cases}f_1=y-\dfrac{1}{4k^2}z^2,\\[2mm] f_2=\dfrac{\mathrm{i}}{12k^3}z^3-\dfrac{\mathrm{i}}{2k}yz+C,\end{cases} \tag{11}$$

这里 $C$ 根据求解的过程必须要求是一个常量, 但结合初值条件又可得到 $C$ 是 $y$ 的函数, 两者存在矛盾. 基于这样的矛盾, 可以认定该有限宽 Airy 光束不具备无衍射特性.

另一方面, 高斯函数限定的有限宽 Airy 光束是否具有自加速性质呢? 对于前面 $\exp(ax)$ 限定的情况, 中心位置可以解析求解, 然而对于高斯函数限定的情况则很难进行解析求解. 不过, 如果采用数值模拟的方法则无此困难, 采用数值模拟的方法可

以计算出有限宽 Airy 光束的场分布以及重心位置. 其中, 重心位置可用如下公式计算:

$$\bar{y}(z)=\frac{\int_{-\infty}^{\infty} yE(y,z)E^{*}(y,z)\,\mathrm{d}y}{\int_{-\infty}^{\infty} E(y,z)E^{*}(y,z)\,\mathrm{d}y}. \tag{12}$$

我们采用空间中心差分方法[14], 在 $E(y,0)=\mathrm{Ai}(y)\exp\left(-\frac{y^2}{y_0^2}\right)$ 的初值条件下对方程 (9) 进行数值求解, 得到的场分布如图 1(a) 所示. 在图 1 中可以明显看出, 此种情形下的有限宽 Airy 光束的传播性质, 此外, 可以清楚地看到其重心的轨迹为一条直线 (图中的白线). 换言之, 它的重心位置是不变的, 不可能整体自由加速.

随后, 我们还对矩形窗口调制的的有限宽 Airy 光束的传播性质进行了数值模拟, 即将初值条件设为 $E(y,0)=\mathrm{Ai}(y)\mathrm{rect}\left(\frac{y}{y_0}\right)$, 其中 rect 为矩形函数, 计算结果如图 1(b) 所示. 同样可以看到其重心位置在传播过程中保持不变.

从以上讨论可知, 有限宽 Airy 光束的性质与无限宽的 Airy 光束存在较大区别, 不可能像无限宽 Airy 光束一样具有无衍射和自加速特性.

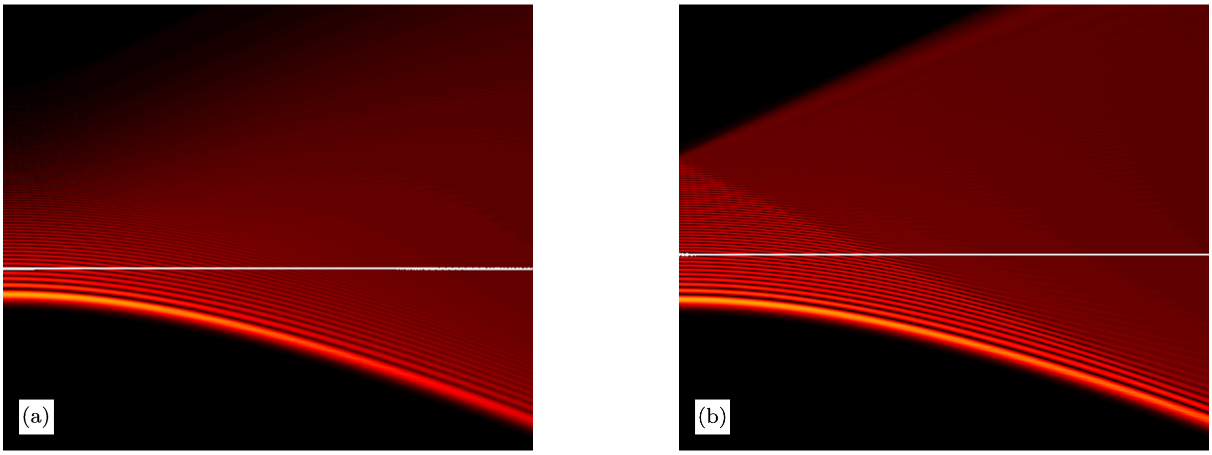


图 1　有限宽 Airy 光束的模拟结果, 其中白线为重心位置　(a) 高斯函数限定; (b) 矩形函数限定

虽然未能给出傍轴波动方程的严格解析解, 但是通过反证和数值模拟已经给相关的性质做出一个大致的说明. 基于此, 可以认定无衍射和自加速特性是无限宽 Airy 光束独有的性质, 对于有限宽 Airy 光束只有在特定情况下才可近似应用无衍射和自加速的特性.

## 4 结 论

综上, 考虑 Airy 光束是否违背埃伦费斯特定理时, 应该计算其重心位置, 而与波包波峰位置无关. 我们认为: 首先, 无限宽 Airy 光束是不遵守埃伦费斯特定理的, 特别是有特定外力作用的情况下. 这是因为无限宽 Airy 光束不是一个孤立的系统, 在无穷远处不断有概率流涌入, 从而导致 Airy 光束的重心改变. 其次, 有限宽的 Airy 光束是必然遵守埃伦费斯特定理的, 因为其重心是不变的. 实验中观测到的自由空间加速只是假象. 任何实际的有限宽 Airy 光束既不可能在自由空间加速, 也不可能是无衍射光束.

感谢南京大学现代工程与应用科学学院张超老师的指导.

[1] Berry M V, Balazs N L 1979 *Am. J. Phys.* **47** 264

[2] Siviloglou G A, Broky J, Dogariu A, Christodoulides D N 2007 *Phys. Rev. Lett.* **99** 213901

[3] Siviloglou G A, Christodoulides D N 2007 *Opt. Lett.* **32** 979

[4] Broky J, Siviloglou G A, Dogariu A, Christodoulides D N 2008 *Opt. Express* **16** 12880

[5] Li L, Li T, Wang S M, Zhang C, Zhu S N 2011 *Phys. Rev. Lett.* **107** 126804

[6] Baumgartl J, Mazilu M, Dholakia K 2008 *Nat. Photon.* **2** 675

[7] Polynkin P, Kolesik M, Moloney J V, Siviloglou G A, Christodoulides D N 2009 *Science* **324** 229

[8] Gu Y L, Gbur G 2010 *Opt. Lett.* **35** 3456

[9] Cheng H, Zang W P, Tian J G 2011 *Acta Opt. Sin.* **31** s100405 (in Chinese) [程化, 臧维平, 田建国 2011 光学学报 **31** s100405]

[10] Kaminer I, Bekenstein R, Nemirovsky J, Segev M 2012 *Phys. Rev. Lett.* **108** 163901

[11] Zheng H P 2012 *High Power Laser and Particle Beams* **24** 65 (in Chinese) [郑红平 2012 强激光与粒子束 **24** 65]

[12] Ehrenfest P 1927 *Z. Physik.* **45** 455

[13] Besieris I M, Shaarawi A M 2007 *Opt. Lett.* **32** 2447

[14] Zhou M S, Ma J C, Zhang C, Qin Y Q 2012 *Opt. Express* **20** 1264

# Research on diffraction and self-acceleration of Airy beam*

Yue Yang-Yang† Xiao Han Wang Zi-Xiao Wu Min

( *Colllege of Engineering and Applied Sciences, Nanjing University, Nanjing* 210093, *China* )

( Received 22 July 2012; revised manuscript received 4 September 2012 )

**Abstract**

In 1979, Berry and Balazs [M V Berry and N L Balazs 1979 *Am. J. Phys.* **47** 264] obtained a strict solution of the Schrödinger equation with Airy function used as the initial condition, and described the wave function represented by such solution as the Airy wave-packets. They discovered that infinite Airy wave-packet has unique properties such as non-spreading and free acceleration, proving that it is the only nontrivial non-spreading solution of the time-dependent Schrödinger equation in one dimension. However, the observing of the finite Airy beam seems to be more meaningful since wave-packets in reality is inevitably band limited. A certain form of finite Airy beam was investigated by Siviloglou et al. in 2007 [Siviloglou G A, Broky J, Dogariu A, Christodoulides D N 2007 *Phys. Rev. Lett.* **99** 213901; Siviloglou G A, Christodoulides D N 2007 *Opt. Lett.* **32** 979]. They noted that the Airy wave packet still exhibits its most exotic feature, i.e., its trend toward free acceleration. While in the present paper we discuss the properties of Airy beam in a few steps further and propose several conclusions. On the one hand, a theoretic explanation is given to solve the matter of the centre of mass of infinite Airy beam. On the other hand, deeper research is conducted on the unique properties of finite Airy beam. Another form of finite Airy beam is discussed by reduction to absurdity, and its field distribution is put forward by numerical simulation. We find that the trajectory of the centroid holds its position, which means that the beam cannot accelerate freely as a whole. Ultimately, we have the conclusion that finite Airy beam can neither freely accelerate nor be non-diffractive.

**Keywords:** Airy beam, non-diffraction, self-acceleration, numerical simulation

**PACS:** 42.25.Fx, 42.25.Dd, 02.60.Cb **DOI:** 10.7498/aps.62.044205

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 11074120) and the Practice Innovation Training Program for the Students of Nanjing University, China (Grant No. XZ1110284048).

† Corresponding author. E-mail: yueyy1991@163.com