

# 固 - 固无限周期声子晶体中 SH 波全反射隧穿的谐振理论\*

刘启能<sup>1)†</sup> 刘沁<sup>2)</sup>

1) (重庆工商大学计算机科学与信息工程学院, 重庆 400067)

2) (重庆工商大学设计艺术学院, 重庆 400067)

(2012年7月29日收到; 2012年9月7日收到修改稿)

利用边界条件推导出 SH 波在一维固 - 固声子晶体中的转移矩阵, 得出一维固 - 固无限周期声子晶体中 SH 波的色散关系. 通过建立一维固 - 固无限周期声子晶体的谐振腔模型并利用共振条件得出 SH 波的全反射隧穿的波长公式. 利用波长公式研究了 SH 波全反射隧穿的波长变化规律, 其结果与色散法一致. 解释了一维固 - 固无限周期声子晶体中 SH 波的全反射隧穿效应产生的原因.

**关键词:** 声子晶体, SH 波, 全反射隧穿, 谐振理论

**PACS:** 43.35.+d

**DOI:** 10.7498/aps.62.044301

## 1 引言

声子晶体是继光子晶体后的另一类人造带隙材料, 利用声子晶体的密度和弹性常数在空间的周期性变化, 使得声波在其中传播时会产生带隙结构, 出现一些特殊的传输性质. 利用这些特殊的传输性质能够有效地控制声波的传播<sup>[1-9]</sup>, 因此声子晶体成为近年来声学前沿领域内研究的热点问题. 一维声子晶体由于结构简单, 同时也具备其他高维声子晶体的性质, 因此成为人们研究较多的一类声子晶体结构.

在介质中传播的弹性波分为纵波 (又称 P 波) 和横波 (又称 S 波) 两种形式<sup>[10]</sup>. 对于 P 波因其偏振方向与传播方向平行而容易确定. 对于 S 波因其偏振方向与传播方向垂直而不易确定, 因此进一步将 S 波分为 SV 波 (即偏振方向平行于入射面的横波) 和 SH 波 (即偏振方向垂直于入射面的横波). 在文献 [11] 中推导出 P 波和 SV 波垂直入射一维声子晶体的转移矩阵, 并研究了 P 波和 SV 波垂直入射一维声子晶体的禁带特征. 文献 [12] 推导出了 P 波

和 SV 波斜入射一维声子晶体的转移矩阵, 并研究了 P 波和 SV 波斜入射一维声子晶体的禁带特征. 文献 [13] 利用 P 波的转移矩阵研究了 P 波在一维固 - 液声子晶体的全反射隧穿效应, 得出了其全反射隧穿效应的特征. 但是在文献 [11—13] 中没有涉及 SH 波的相关问题. 对于 SH 波这种典型的横波在一维声子晶体的转移矩阵及其全反射隧穿效应都是一个值得研究的重要问题. 本文将推导 SH 波在一维固 - 固无限周期声子晶体中的转移矩阵, 得出 SH 波在一维固 - 固无限周期声子晶体中的色散关系. 并建立一维固 - 固无限周期声子晶体的谐振模型, 得出 SH 波在一维固 - 固无限周期声子晶体中的全反射隧穿效应的波长公式, 并对谐振理论和色散法的结果进行比较研究, 解释 SH 波产生全反射隧穿效应的原因.

## 2 模型与理论

设计这样一种一维固 - 固无限周期声子晶体  $(AB)^N$ , A 层为玻璃 (密度为  $\rho_1$ , 厚度为  $d_1$ ), B 层为

\* 重庆市教委科技项目 (批准号: KJ100717) 资助的课题.

† 通讯作者. E-mail: liuqineng@yahoo.com.cn

有机玻璃(密度为  $\rho_2$ , 厚度为  $d_2$ ),  $N$  为无限大. 玻璃和有机玻璃的密度、波速分别为  $\rho_1 = 2230 \text{ kg/m}^3$ ,  $c_1 = 3430 \text{ m/s}$ ,  $\rho_2 = 1180 \text{ kg/m}^3$ ,  $c_2 = 1120 \text{ m/s}$ . 设入射空间的介质也是有机玻璃, 即  $\rho_0 = \rho_2$ ,  $c_0 = c_2$ . 取中心波长  $\lambda_0 = 100 \text{ mm}$ ,  $d_1 = d_2 = \lambda_0/4$ . 设归一化波长  $\Lambda = \lambda/\lambda_0$ ,  $\lambda$  为入射波波长.

SH 波在该一维声子晶体中的转移矩阵由两个“基本单元”的转移矩阵组成, 即 SH 波通过界面的转移矩阵和 SH 波通过同一介质层的转移矩阵. 两个“基本单元”的转移矩阵推导如下.

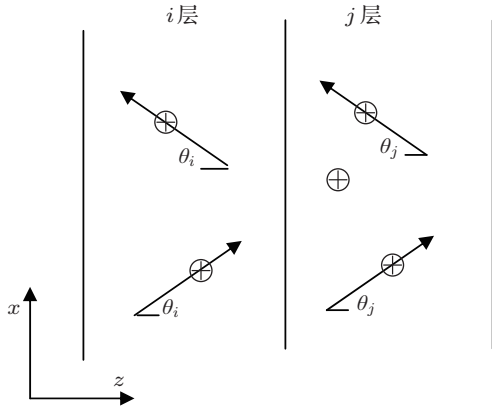


图 1 界面两侧的 SH 波

设 SH 波在一维声子晶体中的  $xoz$  平面内传播, 如图 1 所示. 在介质  $i$  层内有沿  $z$  轴正方向传播的 SH 波和沿  $z$  轴负方向传播的 SH 波, 它们的位移分别为

$$A_i = A_i^+ e^{i(k_i z \cos \theta_i + k_i x \sin(\theta_i - \omega t))},$$

$$B_i = B_i^- e^{i(-k_i z \cos \theta_i + k_i x \sin(\theta_i - \omega t))}.$$

其中  $\omega$  为 SH 波的圆频率,  $k = \omega/c$  为波矢,  $c$  为 SH 波的波速,  $\theta$  为传播方向与  $z$  轴的夹角. 引入二维位移波矢  $U_i$  来描述上述两个位移波:

$$U_i = \{A_i, B_i\}, \quad (1)$$

位移波矢  $U_i$  通过一个“系统”后转变为位移波矢  $U_j$ ,  $U_i$  和  $U_j$  的耦合关系可以表示为

$$U_i = M_{ij} U_j, \quad (2)$$

$M_{ij}$  称为“系统”的转移矩阵. 对于 SH 波其位移始终垂直于  $xoz$  平面, 只有  $y$  分量, 即  $U_y = U$ ,  $U_x = 0$ ,  $U_z = 0$ , 在图 1 中用  $\otimes$  表示其偏振方向. 因此当 SH 波通过介质  $i$  和介质  $j$  的界面时, 其转移矩阵可以根据在界面两侧位移的  $y$  分量  $U_y$  连续以及应力的

$y$  分量  $\sigma_{zy}$  连续推出<sup>[14]</sup>. 应力  $\sigma_{zy}$  满足

$$\sigma_{zy} = \mu \left( \frac{\partial U_y}{\partial z} + \frac{\partial U_z}{\partial y} \right), \quad (3)$$

其中  $\mu$  为拉梅常数, 它与波速  $c$  和介质密度  $\rho$  的关系为

$$\mu = \rho c^2. \quad (4)$$

由位移和应力的  $y$  分量在介质  $i$  和介质  $j$  的界面两侧连续有下面两个方程:

$$A_i + B_i = A_j + B_j,$$

$$i\mu_i k_i A_i \cos \theta_i - i\mu_i k_i B_i \cos \theta_i$$

$$= i\mu_j k_j A_j \cos \theta_j - i\mu_j k_j B_j \cos \theta_j, \quad (5)$$

将 (5) 式整理为二维位移波矢  $U_i$  和  $U_j$  的矩阵关系为

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i\mu_i k_i \cos \theta_i & -i\mu_i k_i \cos \theta_i \end{bmatrix} U_i$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i\mu_j k_j \cos \theta_j & -i\mu_j k_j \cos \theta_j \end{bmatrix} U_j. \quad (6)$$

令

$$M_i = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i\mu_i k_i \cos \theta_i & -i\mu_i k_i \cos \theta_i \end{bmatrix},$$

$$M_j = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i\mu_j k_j \cos \theta_j & -i\mu_j k_j \cos \theta_j \end{bmatrix}, \quad (7)$$

(6) 式表示为

$$U_i = (M_i^{-1} M_j) U_j = M_{ij} U_j. \quad (8)$$

位移波矢在界面处的转移矩阵  $M_{ij}$  为

$$M_{ij} = M_i^{-1} M_j. \quad (9)$$

当位移波矢通过厚度为  $d_i$  的第  $i$  层介质时, 位相变化为  $k_i d_i \cos \theta_i$ <sup>[15]</sup>, 其转移矩阵  $G_i$  容易得到:

$$G_i = \begin{bmatrix} e^{-ik_i d_i \cos \theta_i} & 0 \\ 0 & e^{ik_i d_i \cos \theta_i} \end{bmatrix}. \quad (10)$$

该一维固 - 固无限周期声子晶体一个基本周期单元的转移矩阵  $m$  为

$$m = \begin{vmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{vmatrix} = G_1 M_{12} G_2 M_{21}. \quad (11)$$

SH 波在该一维固 - 固无限周期声子晶体的色散关系为<sup>[16]</sup>

$$\cos(Kd) = (m_{11} + m_{22})/2. \quad (12)$$

当  $|\cos(Kd)| > 1$  时,  $K$  为复数, 布洛赫波为衰减波, SH 波出现禁带. 当  $|\cos(Kd)| \leq 1$  时,  $K$  为实数, 布洛赫波为非衰减波, SH 波出现导带. 其色散函数

$$F = 1 - |\cos(Kd)| = 1 - |(m_{11} + m_{22})/2|. \quad (13)$$

利用 (13) 式绘出色散函数  $F$  的图像, 在  $F$  的图像中,  $F < 0$  对应禁带,  $F \geq 0$  对应导带.

### 3 隧穿效应

波从波速小 ( $c_0$ ) 的介质入射到波速大 ( $c_1$ ) 的介质的分界面时会发生全反射现象, 当 SH 波从有机玻璃中入射到该声子晶体时, 其全反射角为  $\theta_m = \arcsin c_0/c_1 = 0.333 \text{ rad}$ . SH 波以大于全反射角入射该一维声子晶体时能否出现全反射隧穿现象呢? 计算出 SH 波以入射角  $\theta_0 = 0.55 \text{ rad}$  入射该一维固-固无限周期声子晶体其色散函数  $F$  随归一化波长  $\Lambda$  的响应曲线, 如图 2 所示. 由图 2 可看出, SH 波大于全反射角入射该一维固-固无限周期声子晶体时出现了三个隧穿导带, 三个隧穿导带的归一化波长中心分别在  $\Lambda = 0.45, 0.22, 0.14$  处. 这表明 SH 波也会产生全反射隧穿效应, 其全反射隧穿效应具有以下特征: 全反射隧穿效应是由多级导带组成, 归一化波长最大的隧穿导带称为一级隧穿导带, 随着归一化波长的减小分别称为二级隧穿导带、三级隧穿导带、…….

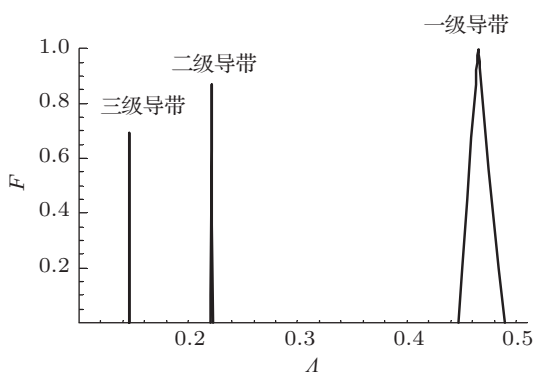


图 2 色散函数随归一化波长响应曲线 ( $\theta_0 = 0.55 \text{ rad}$ )

### 4 谐振理论

SH 波产生全反射隧穿效应的原因可以通过建立谐振腔模型给予解释: 一维无限周期声子晶体由无限多个如图 3 的谐振腔组成, 腔内介质的波速  $c_2$  小于腔壁介质的波速  $c_1$ . 当 SH 波以大于全反射角的角度在腔内传播时会在腔内往复地全反射, 这时

$\rho_2$  层就成为一个势垒很高的势井, 即形成一个谐振腔. 当 SH 波以大于全反射角入射该声子晶体时, 由于  $c_0 < c_1$ , SH 波会在从  $\rho_0$  入射到  $\rho_1$  的界面上发生全反射, 但 SH 波并不是完全不能进入  $\rho_1$  中, SH 波能够以倏逝波的形式进入  $\rho_1$  约一个波长的深度 [15]. 而该声子晶体中  $\rho_1$  的厚度  $d_1$  约为 0.25 个波长, 因此 SH 波能够穿过  $\rho_1$  进入  $\rho_2$  中. 满足下列驻波条件的 SH 波才能在谐振腔发生共振而存在:

$$2d_2 \cos \theta_0 = j\lambda \quad (j = 1, 2, 3, \dots). \quad (14)$$

满足 (14) 式波长的 SH 波会在谐振腔中产生共振, 并且满足 (14) 式的 SH 波在谐振腔内相邻两次往复反射所产生的透射波会发生相长干涉. 因此, 这些波长的 SH 波就能够穿过高势垒产生一维无限周期声子晶体的全反射隧穿效应. 由 (14) 式可得全反射隧穿导带的归一化波长满足的解析公式:

$$\Lambda_j = 2d_2 \cos \theta_0 / j\lambda_0 \quad (j = 1, 2, 3, \dots). \quad (15)$$

由 (15) 式可看出当介质材料一定时, 全反射隧穿导带的归一化波长由  $j, d_2, \theta_0$  三个参量确定. 其中自然数变量  $j$  用来确定全反射隧穿导带的级数, 称为隧穿导带级数,  $j = 1$  对应一级隧穿导带,  $j = 2$  对应二级隧穿导带, ……由 (15) 式看出归一化波长  $\Lambda_j$  随着级数  $j$  成反比变化. 这个结论正好对图 2 中由色散法得出的全反射隧穿效应的特征给出了满意的解释. 将  $d_2 = \lambda_0/4, \theta_0 = 0.55 \text{ rad}$ , 代入 (15) 式计算出一级、二级、三级隧穿导带的归一化波长分别为  $\Lambda_1 = 0.42, \Lambda_2 = 0.21, \Lambda_3 = 0.14$ , 这些数值与图 2 中的色散法的结果符合. (15) 式中  $d_2$  是谐振腔的厚度,  $\theta_0$  是入射角. 波在谐振腔中往返一次的波程为  $2d_2 \cos \theta_0$ , 即波在谐振腔中往返一次的波程由  $\theta_0$  和  $d_2$  共同决定. 下面进一步对  $\theta_0, d_2$  两个参量对全反射隧穿导带归一化波长的影响进行研究.

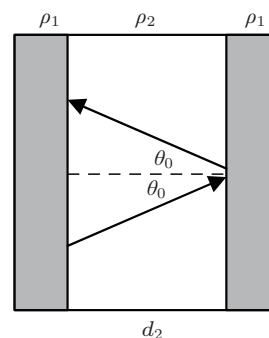


图 3 谐振腔模型

### 4.1 入射角对波长的影响

固定  $d_2 = \lambda_0/4$ , 由 (15) 式计算出入射角对一级、二级、三级隧穿导带的归一化波长的影响关系为

$$\begin{aligned} \Lambda_1 &= \cos \theta_0/2, \\ \Lambda_2 &= \cos \theta_0/4, \\ \Lambda_3 &= \cos \theta_0/6. \end{aligned} \quad (16)$$

由 (16) 式绘出归一化波长随入射角的响应曲线, 如图 4 所示. 利用色散法绘出归一化波长随入射角的响应曲线, 如图 5 所示. 图 5 中黑色部分为禁带区域, 三条白色带分别为一级、二级、三级隧穿导带. 从图 4 和图 5 中可得:

1) (16) 式给出一级、二级、三级隧穿导带的归一化波长都随入射角的余弦成正比变化, 即归一化频率随入射角的增加而减小, 这一个结论与色散法的结果 (图 5 中的图像) 完全符合;

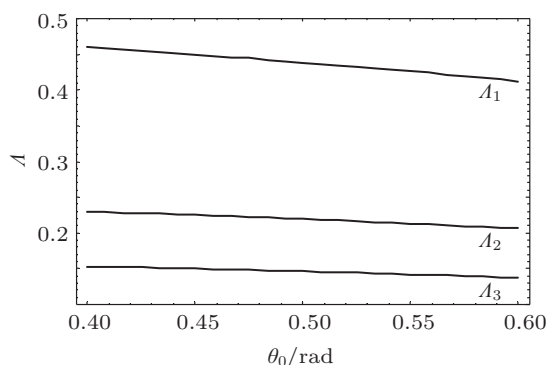


图 4 波长随入射角的响应曲线 (谐振理论)

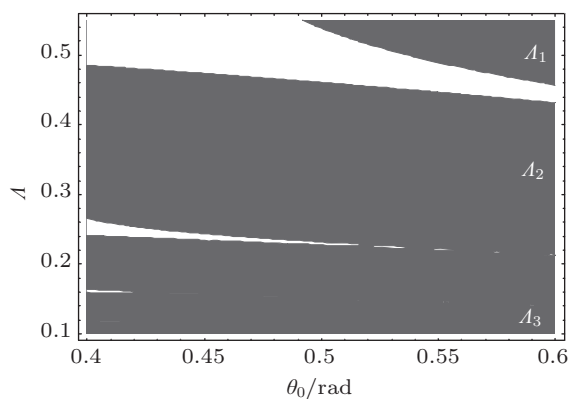


图 5 波长随入射角的响应曲线 (色散法)

2) 在  $\theta_0 = 0.6 \text{ rad}$  处, 由 (16) 式计算出一级、二级、三级隧穿导带的归一化波长分别为  $\Lambda_1 = 0.41$ ,

$\Lambda_2 = 0.21$ ,  $\Lambda_3 = 0.14$ , 而在图 5 中  $\theta_0 = 0.6 \text{ rad}$  处一级、二级、三级隧穿导带的归一化波长中心分别为  $\Lambda_1 = 0.46$ ,  $\Lambda_2 = 0.22$ ,  $\Lambda_3 = 0.14$ , 这表明谐振理论的结果与色散法的结果也符合较好.

### 4.2 腔厚度对波长的影响

为了研究方便, 令  $d_2 = X\lambda_0$ ,  $X$  为无量纲的参变量, 腔厚度的变化通过  $X$  的变化实现. 由 (15) 式得出腔厚度对隧穿导带的归一化波长的影响关系为

$$\Lambda_j = 2X \cos \theta_0/j \quad (j = 1, 2, 3, \dots). \quad (17)$$

由 (17) 式计算出 SH 波以  $\theta_0 = 0.42 \text{ rad}$  入射时其一级、二级、三级隧穿导带的归一化波长为

$$\begin{aligned} \Lambda_1 &= 2X \cos 0.42, \\ \Lambda_2 &= 2X \cos(0.42/2), \\ \Lambda_3 &= 2X \cos(0.42/3). \end{aligned} \quad (18)$$

由 (18) 式绘出归一化波长随腔厚度的响应曲线, 如图 6 所示. 由色散法计算出归一化波长随腔厚度的响应曲线, 如图 7 所示. 图 7 中黑色部分为禁带区域, 三条白色带分别为一级、二级、三级隧穿导带. 从图 6 和图 7 可得:

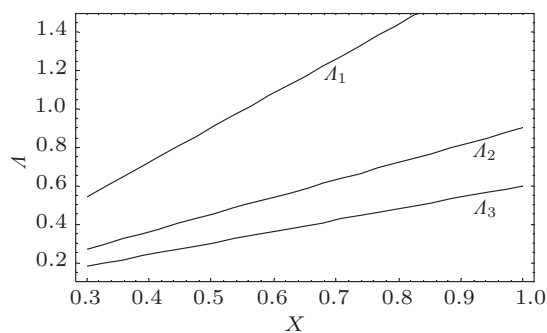


图 6 波长随腔厚度的响应曲线 (谐振理论)

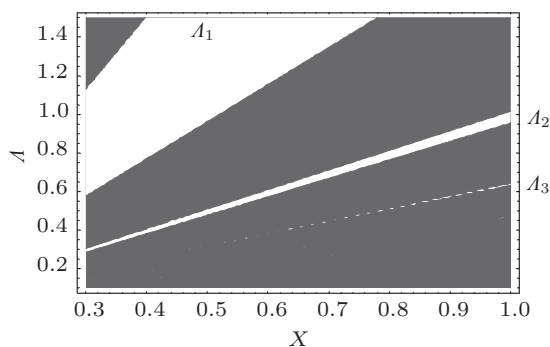


图 7 波长随腔厚度的响应曲线 (色散法)

1) (18) 式给出一级、二级、三级隧穿导带的归一化波长都随腔厚度成正比变化, 这一结论与色散法的结果 (图 7 中的图像) 完全符合;

2) 由 (18) 式计算出一级、二级、三级隧穿导带在  $X = 0.3$  处其归一化波长分别为  $\Lambda_1 = 0.55$ ,  $\Lambda_2 = 0.27$ ,  $\Lambda_3 = 0.18$ , 而图 7 图像中在三处一级、二级、三级隧穿导带的归一化波长中心分别为  $\Lambda_1 = 0.8$ ,  $\Lambda_2 = 0.28$ ,  $\Lambda_3 = 0.19$ , 除一级隧穿导带谐振理论的结果与色散法的结果有一定差别外, 二级、三级隧穿导带两种方法的结果符合得很好.

从前面谐振理论和色散法的比较结果中可以看出, 尽管两者整体上是一致的, 但是也存在一定的差别. 其主要差别是: 谐振理论给出的是隧穿导带的波长中心的解析变化规律, 由它绘出的图像只能反映隧穿导带的波长中心的变化曲线. 而色散法绘出的图像是隧穿导带的波长变化图像, 它不仅反映出隧穿导带的波长中心的变化规律, 而且还能够反映出隧穿导带的波长宽度的变化规律. 产生这种差别的主要原因是: 谐振理论是以一个谐振腔为研究对象得出的结果, 而色散法是以无限多个谐振腔

为研究对象得出的结果. 这样就出现了两种方法结果上的一些差别.

## 5 结论

利用边界条件推导出 SH 波在一维固 - 固声子晶体中的转移矩阵, 得出一维固 - 固无限周期声子晶体中 SH 波的色散关系. 通过建立一维固 - 固无限周期声子晶体的谐振腔模型, 利用共振条件推导出 - 固无限周期声子晶体全反射隧穿导带的波长满足的解析公式, 利用波长的解析公式对全反射隧穿导带的波长随导带级数、入射角和腔厚度的变化规律进行了研究, 圆满地解释了一维无限周期声子晶体的全反射隧穿效应的变化规律. 从理论上解释了一维固 - 固无限周期声子晶体中 SH 波的全反射隧穿效应产生的原因. 并与色散法的计算结果进行了比较, 结果发现两种方法得出的结论是符合的. 这种符合表明本文推导出的 SH 波的转移矩阵、色散关系以及谐振理论都是正确的.

- [1] Pi G L, Zhen Y 2001 *Phys. Rev. E* **63** 066611
- [2] Jesen J S 2003 *J. Sound Vib.* **266** 1053
- [3] Wang G, Yu D L, Wen J H 2004 *Phys. Lett. A* **327** 512
- [4] Mar T H 2004 *Appl. Phys. Lett.* **84** 3364
- [5] Hou Z L, Fu X J, Liu Y Y 2005 *Phys. Rev. B* **71** 024304
- [6] Benchabanel S, Khelif A, Choujaul A 2006 *Europhys. Lett.* **72** 570
- [7] Wen J H, Wang G, Liu Y H 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 3384 (in Chinese) [温激鸿, 王刚, 刘耀宗 2004 物理学报 **53** 3384]
- [8] Liu Q N 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 1934 (in Chinese) [刘启能 2011 物理学报 **60** 1934]
- [9] Liu Q N 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 044302 (in Chinese) [刘启能 2011 物理学报 **60** 044302]
- [10] Wen X S, Wen J H, Yu D L 2009 *Phononic Crystal* (National Defense Industry Press) p25 (in Chinese) [温熙森, 温激鸿, 郁殿龙 2009 声子晶体 (国防工业出版社) 第 25 页]
- [11] Liu Q N 2008 *J. Synthetic Crys.* **37** 179 (in Chinese) [刘启能 2008 人工晶体学报 **37** 179]
- [12] Liu Q N 2009 *Chin. J. Appl. Mech.* **26** 164 (in Chinese) [刘启能 2009 应用力学学报 **26** 164]
- [13] Liu Q N 2012 *J. Vibration Shock* **31** 173 (in Chinese) [刘启能 2012 振动与冲击 **31** 173]
- [14] Luo S 2004 *Ultrasonic Waves in Solid Media* (Beijing: Science Press) p43 (in Chinese) [罗斯 2004 固体中的超声波 (北京: 科学出版社) 第 43 页]
- [15] Ji J R 2007 *Higher Optical Directory* (Beijing: Science Press) p74 (in Chinese) [季家谔 2007 高等光学教程 (北京: 科学出版社) 第 74 页]
- [16] Liu Q N 2009 *J. Synthetic Crys.* **38** 112 (in Chinese) [刘启能 2009 人工晶体学报 **38** 112]

# Resonance theory of SH wave total reflection tunnel effect in 1D solid-solid infinite cycle phononic crystal\*

Liu Qi-Neng<sup>1)†</sup> Liu Qin<sup>2)</sup>

1) (*College of Computer Science and Information Engineering, Chongqing Technology and Business University, Chongqing 400067, China*)

2) (*Design and Art Institute, Chongqing Technology and Business University, Chongqing 400067, China*)

( Received 29 July 2012; revised manuscript received 7 September 2012 )

## Abstract

Using the boundary conditions the SH wave transfer matrix is derived in one-dimensional (1D) solid-solid photonic crystal, and the dispersion relation of the SH wave is obtained. The resonator model 1D infinite cycle photonic crystal is established, and the wavelength formula of SH wave total reflection tunnel effect is investigated using the resonance condition of resonator. The physical mechanism of SH wave total reflection tunnel effect in the 1D solid-solid infinite cycle phononic crystal is explained.

**Keywords:** phononic crystal, SH wave, total reflection tunnel, resonance theory

**PACS:** 43.35.+d

**DOI:** 10.7498/aps.62.044301

---

\* Project supported by the Science and Technology Project of the Education Commission of Chongqing, China (Grant No. KJ100717).

† Corresponding author. E-mail: liuqineng@yahoo.com.cn