

# 噪声交叉关联强度的时间周期调制对线性过阻尼系统的随机共振的影响\*

田艳 黄丽 罗懋康<sup>†</sup>

(四川大学数学学院, 成都 610065)

(2012年9月15日收到; 2012年10月23日收到修改稿)

针对由加性、乘性噪声和周期信号共同作用的线性过阻尼系统, 在噪声交叉关联强度受到时间周期调制的情况下, 利用随机平均法推导了系统响应的信噪比的解析表达式. 研究发现这类系统比噪声间互不相关或噪声交叉关联强度为常数的线性系统具有更丰富的动力学特性, 系统响应的信噪比随交叉关联调制频率的变化出现周期振荡型随机共振, 噪声的交叉关联参数导致随机共振现象的多样化. 噪声交叉关联强度的时间周期调制的引入有利于提高对微弱周期信号检测的灵敏度和实现对周期信号的频率估计.

**关键词:** 随机共振, 周期振荡型共振, 噪声交叉关联强度, 信噪比

**PACS:** 05.40.-a, 05.40.Ca, 02.50.-r

**DOI:** 10.7498/aps.62.050502

## 1 引言

随机共振概念是由 Benzi 等<sup>[1]</sup> 在上世纪 80 年代为解释古气象冰川问题而首次提出的. 随机共振是在一定条件下噪声、信号和系统的协作现象. 随机共振理论的提出使人们意识到噪声对动力学系统的积极的调控作用. 广义的随机共振是指系统响应的某些函数(如矩、自相关函数、功率谱或信噪比等)随系统的某些特征参数(如激励振幅、频率或噪声的强度、相关率等)非单调变化的现象<sup>[2]</sup>. 随机共振是随机动力学系统中一种较为普遍的现象, 在激光物理、生物物理、化学物理等诸多领域有广泛的应用, 因此引起了人们的普遍关注和浓厚兴趣.

同一系统中可能存在不同形式的噪声, 在随机共振现象的早期研究中, 常假设噪声间是互不相关的. 自从 Fulinski 等于 1991 年提出激光系统中的量子噪声和抽运噪声存在交叉关联, 并将交叉关联噪声引入双稳系统, 发现噪声交叉关联的存在会改变

系统的动力学行为<sup>[3]</sup>, 噪声的交叉关联便引起广泛关注. 由噪声的交叉关联导致的非平衡相变和重入现象被发现<sup>[4-6]</sup>; 噪声交叉关联的存在对动力学系统平均首通时间的影响被积极探索<sup>[7-12]</sup>; 大量学者也将噪声交叉色关联或噪声交叉白关联引入各种线性、非线性系统, 讨论噪声交叉关联对随机共振现象的影响<sup>[13-22]</sup>. 但是以上文献主要考虑的是噪声交叉关联强度是常数的情形, 而对噪声交叉关联强度随时间变化的系统的随机共振现象报告较少. 而在激光系统中, 量子噪声和抽运噪声的交叉关联强度就存在着被时间周期调制的情况, 如 Chen 等讨论的噪声交叉关联强度受到时间周期调制时单模激光系统的随机共振现象<sup>[23-26]</sup>. 事实上, 在具有循环、脉冲等周期性工作状态的电子、激光乃至量子系统中, 系统内部热噪声与输入、输出噪声之间的交叉关联便是时间周期调制的关系. 在这种情况下, 对时间周期调制下的噪声交叉关联的研究便具有现实和客观的物理、技术需求和意义. 当噪声交叉关联强度受到时间周期调制时, Tessone 等也研究了非线性系统中的随机共振现象<sup>[27,28]</sup>.

\* 国家自然科学基金(批准号: 11171238)资助的课题.

<sup>†</sup> 通讯作者. E-mail: makaluo@scu.edu.cn

本文将噪声交叉关联强度的时间周期调制引入线性系统, 针对由加性白噪声、乘性色噪声和周期信号共同作用的线性过阻尼系统, 推导了系统响应的信噪比的解析表达式, 分析了这类系统所具有的丰富的动力学特性, 发现系统存在广义随机共振现象, 系统响应的信噪比 SNR 随噪声交叉关联调制频率的变化表现出周期振荡型共振, 并且噪声交叉关联调制初相位和调制系数对系统的随机共振现象有着非常大的影响. 我们可以通过调节噪声交叉关联强度的参数, 对线性过阻尼系统的随机共振进行有效的控制, 为随机共振在微弱周期信号检测方面的应用提供指导意义, 同时开拓随机共振在周期信号频率估计方面的应用.

## 2 系统模型

考虑由加性白噪声、乘性色噪声和周期信号共同作用的线性过阻尼系统. 该系统可以由以下随机微分方程描述:

$$\dot{x} = -\omega_0^2 x - \xi(t)x + R \cos(\Omega t) + \eta(t), \quad (1)$$

其中  $\omega_0$  为系统的固有频率,  $R$  和  $\Omega$  分别是驱动周期信号的振幅和频率.  $\eta(t)$  是加性高斯白噪声,  $\xi(t)$  是具有非零相关时间的乘性色噪声,  $\eta(t)$  和  $\xi(t)$  是交叉白关联的, 并且它们的交叉关联强度还受到时间周期调制, 满足如下统计性质:

$$\begin{aligned} \langle \xi(t) \rangle &= 0, \\ \langle \xi(t)\xi(s) \rangle &= D_\xi \lambda_\xi \exp(-\lambda_\xi |t-s|), \\ \langle \eta(t) \rangle &= 0, \\ \langle \eta(t)\eta(s) \rangle &= 2D_\eta \delta(t-s), \\ \langle \xi(t)\eta(s) \rangle &= 2k(t)\sqrt{D_\xi D_\eta} \delta(t-s), \end{aligned} \quad (2)$$

其中,  $D_\xi$  为色噪声强度,  $\lambda_\xi$  为色噪声的相关率,  $D_\eta$  为白噪声强度,  $k(t)$  为噪声交叉关联强度, 满足  $|k(t)| \leq 1$ .  $k(t)$  是时间周期函数, 即  $k(t) = k_0 \cos(\Theta t + \phi)$ ,  $k_0$  为交叉关联调制系数,  $\Theta$  为交叉关联调制频率,  $\phi$  为交叉关联调制初相位, 为方便, 不妨令  $\phi \in [0, \pi)$ ,  $k_0 \in [-1, 1]$ . 本文假设  $\xi(t)$  为双态随机过程, 并且  $\xi(t)$  在  $\{A_1, -B_1\}$  中取值,  $A_1, B_1$  均为正数. 不妨设  $A_1$  到  $-B_1$  的转换概率为  $p_1$ , 逆转换概率为  $q_1$ ,  $\xi(t)$  的非对称性用  $\Lambda_\xi$  表示. 于是有

$$\lambda_\xi = p_1 + q_1, \quad D_\xi \lambda_\xi = A_1 B_1, \quad \Lambda_\xi = A_1 - B_1. \quad (3)$$

## 3 系统响应的信噪比

### 3.1 系统响应的一阶矩

对方程 (1) 两边取平均并利用关系式 (2), 可以得到系统响应的一阶矩满足的微分方程

$$\frac{d\langle x(t) \rangle}{dt} = -\omega_0^2 \langle x(t) \rangle - \langle \xi(t)x(t) \rangle + R \cos(\Omega t). \quad (4)$$

将 (1) 式两边乘以  $\xi(t)$  并取平均得到

$$\begin{aligned} \left\langle \xi(t) \frac{dx(t)}{dt} \right\rangle &= -\omega_0^2 \langle \xi(t)x(t) \rangle - \langle \xi^2(t)x(t) \rangle \\ &\quad + \langle \xi(t)\eta(t) \rangle. \end{aligned} \quad (5)$$

由 Shapiro-Loginov 公式<sup>[29]</sup> 可得

$$\frac{d\langle \xi(t)x(t) \rangle}{dt} = \left\langle \xi(t) \frac{dx(t)}{dt} \right\rangle - \lambda_\xi \langle \xi(t)x(t) \rangle. \quad (6)$$

将 (5) 式代入 (6) 式, 并利用 (2) 式有

$$\begin{aligned} \frac{d\langle \xi(t)x(t) \rangle}{dt} &= -(\omega_0^2 + \lambda_\xi) \langle \xi(t)x(t) \rangle - \langle \xi^2(t)x(t) \rangle \\ &\quad + 2k_0 \sqrt{D_\xi D_\eta} \cos(\Theta t + \phi). \end{aligned} \quad (7)$$

(7) 式中包含高阶的相关函数  $\langle \xi^2(t)\eta(t) \rangle$ , 由于  $\xi(t)$  是双态噪声, 故如下的降阶公式成立:

$$\langle \xi^2(t)x(t) \rangle = b \langle \xi(t)x(t) \rangle + c \langle x(t) \rangle, \quad (8)$$

其中,  $b = \Lambda_\xi$ ,  $c = \lambda_\xi D_\xi$ .

将 (8) 式代入 (7) 式并化简, 结合 (4) 式, 通过整理, 可以得到  $\langle x(t) \rangle$ ,  $\langle \xi(t)x(t) \rangle$  所满足的线性微分方程组

$$\begin{aligned} \frac{d\langle x(t) \rangle}{dt} &= d_1 \langle x(t) \rangle - \langle \xi(t)x(t) \rangle + R \cos(\Omega t), \\ \frac{d\langle \xi(t)x(t) \rangle}{dt} &= -c \langle x(t) \rangle \end{aligned} \quad (9)$$

$$+ d_2 \langle \xi(t)x(t) \rangle + d_3 \cos(\Theta t + \phi),$$

其中,  $d_1 = -\omega_0^2$ ,  $d_2 = -(\omega_0^2 + \lambda_\xi + b)$ ,  $d_3 = 2k_0 \sqrt{D_\xi D_\eta}$ .

求解方程组 (9), 并令  $t \rightarrow \infty$ , 可以得到  $\langle x(t) \rangle$ ,  $\langle \xi(t)x(t) \rangle$  的渐近表达式

$$\begin{aligned} \langle x(t) \rangle &= m_1 \sin(\Omega t) + m_2 \cos(\Omega t) \\ &\quad + m_3 \sin(\Theta t) + m_4 \cos(\Theta t), \\ \langle \xi(t)x(t) \rangle &= m_5 \sin(\Omega t) + m_6 \cos(\Omega t) \\ &\quad + m_7 \sin(\Theta t) + m_8 \cos(\Theta t), \end{aligned} \quad (10)$$

其中, 系数  $m_i$ , ( $i = 1, 2, \dots, 8$ ) 分别由下式确定:

$$\begin{aligned}
 m_1 &= \frac{R\Omega(\Omega^2 + d_2^2 + c)}{\Omega^4 + (d_1^2 + d_2^2 + 2c)\Omega^2 + (d_1d_2 - c)^2}, \\
 m_2 &= \frac{Rd_2(c - d_1d_2) - Rd_1\Omega^2}{\Omega^4 + (d_1^2 + d_2^2 + 2c)\Omega^2 + (d_1d_2 - c)^2}, \\
 m_3 &= \frac{d_3[(d_1 + d_2)\Theta \cos \phi + (d_1d_2 - c - \Theta^2) \sin \phi]}{\Theta^4 + (d_1^2 + d_2^2 + 2c)\Theta^2 + (d_1d_2 - c)^2}, \\
 m_4 &= \frac{d_3[(d_1 + d_2)\Theta \sin \phi - (d_1d_2 - c - \Theta^2) \cos \phi]}{\Theta^4 + (d_1^2 + d_2^2 + 2c)\Theta^2 + (d_1d_2 - c)^2}, \\
 m_5 &= \frac{R\Omega c(d_1 + d_2)}{\Omega^4 + (d_1^2 + d_2^2 + 2c)\Omega^2 + (d_1d_2 - c)^2}, \\
 m_6 &= \frac{Rc(\Omega^2 - d_1d_2 + c)}{\Omega^4 + (d_1^2 + d_2^2 + 2c)\Omega^2 + (d_1d_2 - c)^2}, \\
 m_7 &= \frac{d_3\Theta \cos \phi(\Theta^2 + d_1^2 + c) + d_3 \sin \phi[\Theta^2 d_2 + d_1(d_1d_2 - c)]}{\Theta^4 + (d_1^2 + d_2^2 + 2c)\Theta^2 + (d_1d_2 - c)^2}, \\
 m_8 &= \frac{d_3\Theta \sin \phi(\Theta^2 + d_1^2 + c) - d_3 \cos \phi[\Theta^2 d_2 + d_1(d_1d_2 - c)]}{\Theta^4 + (d_1^2 + d_2^2 + 2c)\Theta^2 + (d_1d_2 - c)^2}.
 \end{aligned}$$

### 3.2 系统响应的二阶矩

下面采用类似的方法来得到  $\langle x^2(t) \rangle$  的表达式. 首先建立  $\langle x^2(t) \rangle$ ,  $\langle \xi(t)x^2(t) \rangle$  所满足的线性微分方程组

$$\begin{aligned}
 \frac{d\langle x^2(t) \rangle}{dt} &= -2\omega_0^2 \langle x^2(t) \rangle - 2\langle \xi(t)x^2(t) \rangle \\
 &\quad + 2R\cos(\Omega t) \langle x(t) \rangle + 2\langle x(t)\eta(t) \rangle, \\
 \frac{d\langle \xi(t)x^2(t) \rangle}{dt} &= -(2\omega_0^2 + \lambda_\xi + 2b) \langle \xi(t)x^2(t) \rangle \\
 &\quad - 2c \langle x^2(t) \rangle + 2R\cos(\Omega t) \langle \xi(t)x(t) \rangle \\
 &\quad + 2\langle \xi(t)x(t)\eta(t) \rangle, \tag{11}
 \end{aligned}$$

在方程组 (11) 中存在着耦合项  $\langle x(t)\eta(t) \rangle$  和  $\langle \xi(t)x(t)\eta(t) \rangle$ , 因此需要对其进行解耦. Fulinski 认为高斯白噪声是对称的双态噪声的极限状态<sup>[30]</sup>.  $\eta(t)$  是对称的双态随机过程, 并且  $\eta(t)$  在  $\{A, -A\}$  中取值, 其中  $A$  为正数, 令  $A$  到  $-A$  的转换概率为  $p_2$ , 逆转换概率为  $q_2$ ,  $\eta(t)$  的非对称性  $\Lambda_\eta = 0$ . 当  $A \rightarrow \infty$ ,  $p_2 = q_2 = p \rightarrow \infty$  时,  $\eta(t)$  是高斯白噪声, 其相关率  $\lambda_\eta = p_2 + q_2 = 2p \rightarrow \infty$ . Fulinski 对高斯白噪声的解释与高斯白噪声的 Stratonovich 解释<sup>[31]</sup> 是一致的. 从而可建立  $\langle x(t)\eta(t) \rangle$ ,  $\langle \xi(t)x(t)\eta(t) \rangle$  满足

的线性微分方程组

$$\begin{aligned}
 \frac{d\langle x(t)\eta(t) \rangle}{dt} &= -(\omega_0^2 + \lambda_\eta) \langle x(t)\eta(t) \rangle \\
 &\quad - \langle \xi(t)x(t)\eta(t) \rangle + 2D_\eta, \\
 \frac{d\langle \xi(t)x(t)\eta(t) \rangle}{dt} &= -(\omega_0^2 + \lambda_\xi + \lambda_\eta + b) \langle \xi(t)x(t)\eta(t) \rangle \\
 &\quad - c \langle x(t)\eta(t) \rangle + 2k_0R\sqrt{D_\xi D_\eta} \cos(\Omega t) \cos(\Theta t + \phi). \tag{12}
 \end{aligned}$$

通过求解方程组 (12), 并令  $t \rightarrow \infty$ , 可得: 当  $\lambda_\eta \rightarrow \infty$  时, 有

$$\langle x(t)\eta(t) \rangle = 0, \quad \langle \xi(t)x(t)\eta(t) \rangle = 0. \tag{13}$$

将 (13) 式代入方程组 (11), 并求解方程组 (11), 令  $t \rightarrow \infty$ , 可得  $\langle x^2(t) \rangle$  的渐近表达式为

$$\begin{aligned}
 \langle x^2(t) \rangle &= m_9 \sin(2\Omega t) + m_{10} \cos(2\Omega t) \\
 &\quad + m_{11} \sin(\Omega + \Theta)t + m_{12} \cos(\Omega + \Theta)t \\
 &\quad + m_{13} \sin(\Omega - \Theta)t + m_{14} \cos(\Omega - \Theta)t + m_{15}, \tag{14}
 \end{aligned}$$

其中

$$m_9 = \frac{4R}{\beta_2 - \beta_1} \left[ \frac{2(\beta_2 - 2d_1)(2m_2\Omega - m_1\beta_1) + 2m_6\Omega - \beta_1 m_5}{2(\beta_1^2 + 4\Omega^2)} \right]$$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{4R}{\beta_2 - \beta_1} \left[ \frac{2(\beta_1 - 2d_1)(2m_2\Omega - m_1\beta_2) + 2m_6\Omega - \beta_2m_5}{2(\beta_2^2 + 4\Omega^2)} \right], \\
 m_{10} = & \frac{4R}{\beta_2 - \beta_1} \left[ \frac{2(\beta_1 - 2d_1)(2m_1\Omega + m_2\beta_2) + 2m_5\Omega + \beta_2m_6}{2(\beta_2^2 + 4\Omega^2)} \right] \\
 & -\frac{4R}{\beta_2 - \beta_1} \left[ \frac{2(\beta_2 - 2d_1)(2m_1\Omega + m_2\beta_1) + 2m_5\Omega + \beta_1m_6}{2(\beta_1^2 + 4\Omega^2)} \right], \\
 m_{11} = & \frac{4R}{\beta_2 - \beta_1} \left\{ \frac{2(\beta_2 - 2d_1)[m_4(\Omega + \Theta) - m_3\beta_1] + m_8(\Omega + \Theta) - \beta_1m_7}{2[\beta_1^2 + (\Omega + \Theta)^2]} \right\} \\
 & -\frac{4R}{\beta_2 - \beta_1} \left\{ \frac{2(\beta_1 - 2d_1)[m_4(\Omega + \Theta) - m_3\beta_2] + m_8(\Omega + \Theta) - \beta_2m_7}{2[\beta_2^2 + (\Omega + \Theta)^2]} \right\}, \\
 m_{12} = & \frac{4R}{\beta_2 - \beta_1} \left\{ \frac{2(\beta_1 - 2d_1)[m_3(\Omega + \Theta) + m_4\beta_2] + m_7(\Omega + \Theta) + \beta_2m_8}{2[\beta_2^2 + (\Omega + \Theta)^2]} \right\} \\
 & -\frac{4R}{\beta_2 - \beta_1} \left\{ \frac{2(\beta_2 - 2d_1)[m_3(\Omega + \Theta) + m_4\beta_1] + m_7(\Omega + \Theta) + \beta_1m_8}{2[\beta_1^2 + (\Omega + \Theta)^2]} \right\}, \\
 m_{13} = & \frac{4R}{\beta_2 - \beta_1} \left\{ \frac{2(\beta_2 - 2d_1)[m_4(\Omega - \Theta) + m_3\beta_1] + m_8(\Omega - \Theta) + \beta_1m_7}{2[\beta_1^2 + (\Omega - \Theta)^2]} \right\} \\
 & -\frac{4R}{\beta_2 - \beta_1} \left\{ \frac{2(\beta_1 - 2d_1)[m_4(\Omega - \Theta) + m_3\beta_2] + m_8(\Omega - \Theta) + \beta_2m_7}{2[\beta_2^2 + (\Omega - \Theta)^2]} \right\}, \\
 m_{14} = & \frac{4R}{\beta_2 - \beta_1} \left\{ \frac{2(\beta_2 - 2d_1)[m_3(\Omega - \Theta) - m_4\beta_1] + m_7(\Omega - \Theta) - \beta_1m_8}{2[\beta_1^2 + (\Omega - \Theta)^2]} \right\} \\
 & -\frac{4R}{\beta_2 - \beta_1} \left\{ \frac{2(\beta_1 - 2d_1)[m_3(\Omega - \Theta) - m_4\beta_2] + m_7(\Omega - \Theta) - \beta_2m_8}{2[\beta_2^2 + (\Omega - \Theta)^2]} \right\}, \\
 m_{15} = & \frac{2Rm_2(2d_1 - \beta_1 - \beta_2) - 4Rm_6}{2\beta_2\beta_1}, \\
 \beta_1 = & \frac{-(4\omega_0^2 + \lambda_\xi + 2b) + \sqrt{(\lambda_\xi + 2b)^2 + 16c}}{2}, \\
 \beta_2 = & \frac{-(4\omega_0^2 + \lambda_\xi + 2b) - \sqrt{(\lambda_\xi + 2b)^2 + 16c}}{2}.
 \end{aligned}$$

在一个周期内对  $\langle x^2(t) \rangle$  取平均可得稳态表达式:

1) 当  $\Theta = \Omega$  时, 有

$$\langle x^2(t) \rangle_{st} = m_{14} + m_{15}. \quad (15)$$

2) 当  $\Theta = N\Omega$ ,  $N$  为整数且  $N \neq 1$  时, 有

$$\langle x^2(t) \rangle_{st} = m_{15}. \quad (16)$$

3) 当  $\Theta \neq N\Omega$ ,  $N$  为整数时, 有

$$\begin{aligned}
 \langle x^2(t) \rangle_{st} = & \frac{m_{12}\Omega}{2\pi(\Omega + \Theta)} \sin\left(\frac{2\pi\Theta}{\Omega}\right) \\
 & -\frac{m_{11}\Omega}{2\pi(\Omega + \Theta)} \left[ \cos\left(\frac{2\pi\Theta}{\Omega}\right) - 1 \right] \\
 & -\frac{m_{13}\Omega}{2\pi(\Omega - \Theta)} \left[ \cos\left(\frac{2\pi\Theta}{\Omega}\right) - 1 \right] \\
 & -\frac{m_{14}\Omega}{2\pi(\Omega - \Theta)} \left[ \sin\left(\frac{2\pi\Theta}{\Omega}\right) \right] + m_{15}.
 \end{aligned} \quad (17)$$

### 3.3 系统响应的相关函数

方程 (1) 的解的一般形式可写为

$$\begin{aligned}
 x(t + \tau) = & x(t)g(\tau) \exp(-\omega_0^2\tau) \\
 & + R \int_0^\tau \exp(-\omega_0^2v)g(v) \cos[\Omega(t + \tau - v)]dv \\
 & + \int_0^\tau \exp(-\omega_0^2v)h(v)dv, \quad (18)
 \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}
 g(v) = & \left\langle \exp\left[-\int_0^v \xi(u)du\right] \right\rangle, \\
 h(t - v) = & \left\langle \eta(v) \exp\left[-\int_v^t \xi(u)du\right] \right\rangle.
 \end{aligned}$$

结合 (2) 式, 将  $g(v)$  和  $h(t - v)$  展开成级数的形式并

经过计算可得<sup>[32]</sup>

$$g(v) = \frac{N_1}{N_1 - N_2} \exp[-N_2 v] - \frac{N_2}{N_1 - N_2} \exp[-N_1 v], \quad (19)$$

$$h(t - v) = 0, \quad (20)$$

其中

$$N_{1,2} = \frac{d_1 - d_2}{2} \pm \sqrt{\frac{(d_1 - d_2)^2}{4} + c}.$$

由 (18), (19) 和 (20) 式, 可得相关函数的渐近表达式

$$\begin{aligned} \langle x(t + \tau)x(t) \rangle &= \langle x^2(t) \rangle g(\tau) \exp(-\omega_0^2 \tau) \\ &+ \frac{R \langle x(t) \rangle}{N_1 - N_2} [f_1 \cos(\Omega t) + f_2 \sin(\Omega t)], \end{aligned} \quad (21)$$

其中

$$\begin{aligned} f_1 &= a_1 \cos(\Omega \tau) + a_2 \sin(\Omega \tau) \\ &+ a_3 \exp(-b_1 \tau) + a_4 \exp(-b_2 \tau), \\ f_2 &= c_1 \cos(\Omega \tau) + c_2 \sin(\Omega \tau) \\ &+ c_3 \exp(-b_1 \tau) + c_4 \exp(-b_2 \tau), \\ a_1 &= \frac{N_1 b_2}{b_2^2 + \Omega^2} - \frac{N_2 b_1}{b_1^2 + \Omega^2}, \\ a_2 &= \frac{N_1 \Omega}{b_2^2 + \Omega^2} - \frac{N_2 \Omega}{b_1^2 + \Omega^2}, \\ a_3 &= \frac{N_2 b_1}{b_1^2 + \Omega^2}, \\ a_4 &= -\frac{N_1 b_2}{b_2^2 + \Omega^2}, \\ c_1 &= a_2, \quad c_2 = -a_1, \quad c_3 = \frac{N_2 \Omega}{b_1^2 + \Omega^2}, \\ c_4 &= -\frac{N_1 \Omega}{b_2^2 + \Omega^2}, \quad b_{1,2} = \omega_0^2 + N_{1,2}. \end{aligned}$$

在一个周期内对  $\langle x(t + \tau)x(t) \rangle$  取平均可得稳态表达式:

1) 当  $\Theta = \Omega$  时, 有

$$\begin{aligned} \langle x(t + \tau)x(t) \rangle_{st} &= (m_{14} + m_{15})g(\tau) \exp(-\omega_0^2 \tau) \\ &+ \frac{R\Omega}{4\pi(N_1 - N_2)} (m_1 f_2 + m_2 f_1 \\ &+ m_3 f_2 + m_4 f_1). \end{aligned} \quad (22)$$

2) 当  $\Theta = N\Omega$ ,  $N$  为整数且  $N \neq 1$  时, 有

$$\begin{aligned} \langle x(t + \tau)x(t) \rangle_{st} &= m_{15}g(\tau) \exp(-\omega_0^2 \tau) \\ &+ \frac{R\Omega}{4\pi(N_1 - N_2)} (m_1 f_2 + m_2 f_1). \end{aligned} \quad (23)$$

3) 当  $\Theta \neq N\Omega$ ,  $N$  为整数时, 有

$$\begin{aligned} \langle x(t + \tau)x(t) \rangle_{st} &= \frac{R\Omega M_1 \cos(\Omega \tau)}{2\pi(N_1 - N_2)} + \frac{R\Omega M_2 \sin(\Omega \tau)}{2\pi(N_1 - N_2)} \\ &+ \left[ \frac{R\Omega M_3}{2\pi(N_1 - N_2)} - \frac{N_2 \langle x^2(t) \rangle_{st}}{N_1 - N_2} \right] \\ &\times \exp(-b_1 \tau) \\ &+ \left[ \frac{R\Omega M_4}{2\pi(N_1 - N_2)} + \frac{N_1 \langle x^2(t) \rangle_{st}}{N_1 - N_2} \right] \\ &\times \exp(-b_2 \tau), \end{aligned} \quad (24)$$

其中  $\langle x^2(t) \rangle_{st}$  如 (17) 式所示,

$$\begin{aligned} M_{i(i=1,2,3,4)} &= \frac{1}{2} m_2 a_i + \frac{1}{2} m_1 c_i - \frac{m_3 a_i}{2(\Omega + \Theta)} \left[ \cos\left(\frac{2\pi\Theta}{\Omega}\right) - 1 \right] \\ &+ \frac{m_3 a_i}{2(\Omega - \Theta)} \left[ \cos\left(\frac{2\pi\Theta}{\Omega}\right) - 1 \right] \\ &- \frac{m_3 c_i}{2(\Theta + \Omega)} \sin\left(\frac{2\pi\Theta}{\Omega}\right) \\ &- \frac{m_3 c_i}{2(\Omega - \Theta)} \sin\left(\frac{2\pi\Theta}{\Omega}\right) + \frac{m_4 a_i}{2(\Omega + \Theta)} \sin\left(\frac{2\pi\Theta}{\Omega}\right) \\ &- \frac{m_4 a_i}{2(\Omega - \Theta)} \sin\left(\frac{2\pi\Theta}{\Omega}\right) \\ &- \frac{m_4 c_i}{2(\Omega + \Theta)} \left[ \cos\left(\frac{2\pi\Theta}{\Omega}\right) - 1 \right] \\ &- \frac{m_4 c_i}{2(\Omega - \Theta)} \left[ \cos\left(\frac{2\pi\Theta}{\Omega}\right) - 1 \right]. \end{aligned}$$

### 3.4 系统响应的信噪比

1) 当  $\Theta = \Omega$  时, 对 (22) 式进行傅里叶变换, 得到功率谱为

$$\begin{aligned} S(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \langle x(t + \tau)x(t) \rangle_{st} \exp(-j\omega\tau) d\tau \\ &= S_1(\omega) + S_2(\omega), \end{aligned} \quad (25)$$

其中

$$S_1(\omega) = \frac{R\Omega(m_1 c_1 + m_2 a_1 + m_3 c_1 + m_4 a_1)}{2(N_1 - N_2)} \delta(\omega - \Omega),$$

$$S_2(\omega) = \frac{2b_1}{b_1^2 + \omega^2} \left[ \frac{R\Omega(m_1c_3 + m_2a_3 + m_3c_3 + m_4a_3)}{2(N_1 - N_2)\pi} - \frac{N_2}{N_1 - N_2}(m_{14} + m_{15}) \right] + \frac{2b_2}{b_2^2 + \omega^2} \left[ \frac{R\Omega(m_1c_4 + m_2a_4 + m_3c_4 + m_4a_4)}{2(N_1 - N_2)\pi} - \frac{N_1}{N_1 - N_2}(m_{14} + m_{15}) \right].$$

2) 当  $\Theta = N\Omega$ ,  $N$  为整数且  $N \neq 1$  时, 对 (23) 式进行傅里叶变换, 得到功率谱为

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \langle x(t + \tau)x(t) \rangle_{st} \exp(-j\omega\tau) d\tau = S_1(\omega) + S_2(\omega), \quad (26)$$

其中

$$S_1(\omega) = \frac{R\Omega(m_1c_1 + m_2a_1)}{2(N_1 - N_2)} \delta(\omega - \Omega),$$

$$S_2(\omega) = \frac{2b_1}{b_1^2 + \omega^2} \left[ \frac{R\Omega(m_1c_3 + m_2a_3)}{2(N_1 - N_2)\pi} - \frac{m_{15}N_2}{N_1 - N_2} \right] + \frac{2b_2}{b_2^2 + \omega^2} \left[ \frac{R\Omega(m_1c_4 + m_2a_4)}{2(N_1 - N_2)\pi} - \frac{m_{15}N_1}{N_1 - N_2} \right].$$

3) 当  $\Theta \neq N\Omega$ ,  $N$  为整数时, 对 (24) 式进行傅里叶变换, 得到功率谱为

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \langle x(t + \tau)x(t) \rangle_{st} \exp(-j\omega\tau) d\tau = S_1(\omega) + S_2(\omega), \quad (27)$$

其中  $\langle x^2(t) \rangle_{st}$  如 (17) 式所示,

$$S_1(\omega) = \frac{R\Omega M_1}{2(N_1 - N_2)} \delta(\omega - \Omega),$$

$$S_2(\omega) = \frac{2b_1}{b_1^2 + \omega^2} \left[ \frac{R\Omega M_3}{2(N_1 - N_2)\pi} - \frac{N_2 \langle x^2(t) \rangle_{st}}{N_1 - N_2} \right] + \frac{2b_2}{b_2^2 + \omega^2} \left[ \frac{R\Omega M_4}{2(N_1 - N_2)\pi} - \frac{N_1 \langle x^2(t) \rangle_{st}}{N_1 - N_2} \right].$$

(25), (26), (27) 式中的  $S_1(\omega)$  来源于输出信号,  $S_2(\omega)$  来源于输出噪声. 信噪比被定义为输出信号的总功率与  $\omega = \Omega$  处的单位噪声谱的平均功率之比

$$\text{SNR} = \frac{\int_0^{\infty} S_1(\omega) d\omega}{S_2(\omega = \Omega)}. \quad (28)$$

### 4 数值讨论

图 1 绘制了系统响应的信噪比 SNR 作为噪声交叉关联调制频率  $\Theta$  的函数在  $\phi, k_0$  取不同值时的曲线. 其他各参数的取值为  $\omega_0 = 0.05, D_\xi = 2, \lambda_\xi = 5, \Lambda_\xi = 0, D_\eta = 0.05, \Omega = 6, R = 1$ . 可以看到: SNR 曲线随  $\Theta$  的变化表现出周期振荡型随机共振现象; 在  $\phi, k_0$  取不同值时主要表现为三种周期振

荡型共振: 单主峰共振、单主谷共振、单主峰主谷共振. 当  $\phi = \frac{\pi}{2}, k_0 = -1$  时, SNR 曲线出现单主峰共振, 随着  $\Theta$  的变化会出现一个振幅较大的共振峰 (主峰), 当远离该主峰位时, 振荡的振幅快速下降, 最后趋于稳定值; 当  $\phi = \frac{\pi}{2}, k_0 = 1$  时, SNR 曲线出现单主谷共振, 随着  $\Theta$  的变化会出现一个振幅较大的抑制谷 (主谷), 当远离该主谷位时, 振荡的振幅快速下降, 最后趋于稳定值. 当  $\phi = 0, k_0 = -1$  时, SNR 曲线出现单主峰主谷共振, 随着  $\Theta$  的变化会出现相邻的振幅较大的抑制谷 (主谷) 和共振峰 (主峰), 当远离主谷主峰时, 振荡的振幅快速下降, 最后趋于稳定值.

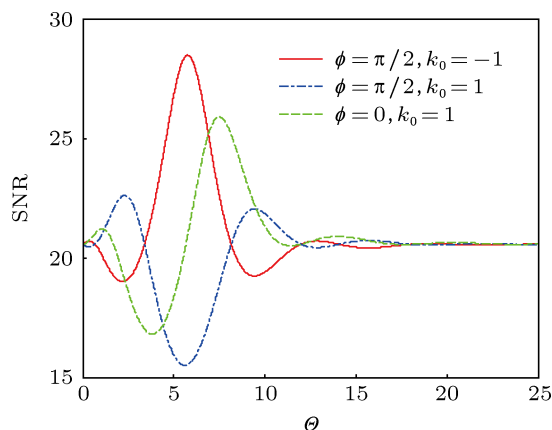


图 1 SNR 作为  $\Theta$  的函数在  $\phi, k_0$  取不同值时的曲线

图 2(a), (b) 分别绘制了当  $k_0 = -1$  和  $k_0 = 1$  时系统响应的信噪比 SNR 作为噪声交叉关联调制频率  $\Theta$  的函数, 随不同的调制初相位  $\phi$  变化的曲线. 其他各参数的取值为  $\Omega = 5, \omega_0 = 0.15, D_\xi = 2, \lambda_\xi = 2, \Lambda_\xi = 0, R = 1, D_\eta = 0.04$ . 可以看到: 当  $k_0 = -1$  时, 随着相位  $\phi$  在  $[0, \pi)$  中增大, 主峰位置左移, 主峰值先增大后减小; 当  $\phi = \frac{\pi}{2}$  时, 主峰位在  $\Theta = \Omega$  处, 且主峰值最大, 出现单主峰共振. 当  $k_0 = 1$  时, 随着相位  $\phi$  在  $[0, \pi)$  中增大, 主谷位置左移, 主谷值先减小后增大; 当  $\phi = \frac{\pi}{2}$  时, 主谷位在  $\Theta = \Omega$  处, 且主谷值最小, 出现单主谷共振.

图 3(a), (b) 分别绘制了当  $\phi = \frac{\pi}{2}$  和  $\phi = 0$  时系统响应的信噪比 SNR 作为噪声交叉关联调制频率

$\Theta$  的函数, 随不同的调制系数  $k_0$  变化的曲线. 其他各参数的取值为  $\Omega = 6, \omega_0 = 0.15, D_\xi = 2, \lambda_\xi = 2, \Lambda_\xi = 0, D_\eta = 0.04, R = 1$ .  $k_0 = 0$  意味着加性白噪声与乘性色噪声互不相关. 可以看到: 当  $\phi = \frac{\pi}{2}$  时, 若  $k_0 > 0$ , SNR 曲线为单主谷共振, 若  $k_0 < 0$ , SNR 曲线为单主峰共振, 且主峰位和主谷位相同, 都在  $\Theta = \Omega$  处;  $|k_0|$  越大, 主峰值就越大或主谷值就越小; 随着  $\Theta$  远离  $\Omega$ , SNR 曲线趋于  $k_0 = 0$  时的情形. 当  $\phi = 0$  时, 若  $k_0 > 0$ , SNR 曲线为单主峰主谷共振, 先主峰后主谷, 若  $k_0 < 0$ , SNR 曲线仍为单主峰主谷共振, 先主谷后主峰, 且主共振位置不变;  $|k_0|$  越大, 主峰值就越大或主谷值就越小; 随着  $\Theta$  远离  $\Omega$ , SNR 曲线趋于  $k_0 = 0$  时的情形.

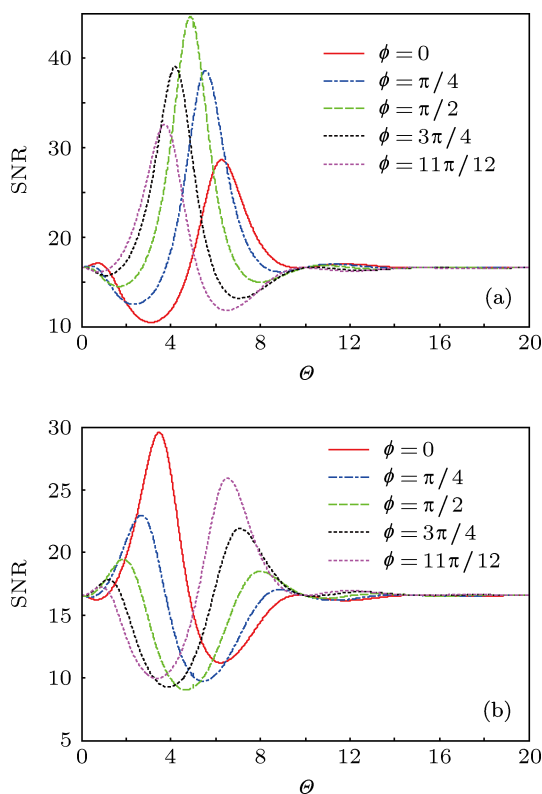


图2 SNR 作为  $\Theta$  的函数随着  $\phi$  变化的曲线 (a)  $k_0 = -1$ ; (b)  $k_0 = 1$

图4绘制了系统响应的信噪比 SNR 作为噪声交叉关联调制频率  $\Theta$  的函数, 随着不同的驱动周期信号的振幅  $R$  变化的曲线. 其他各参数的取值为  $\Omega = 5, \omega_0 = 0.15, D_\xi = 2, \lambda_\xi = 2, \Lambda_\xi = 0, D_\eta = 0.04, \phi = \frac{\pi}{2}$ . 可以看到: SNR 曲线的周期振荡型共振类型、主峰位或主谷位以及稳定值都不受驱动周期信号的振幅  $R$  的影响; 驱动周期信号的振幅  $R$  越小, 主峰值越大或主谷值越小, 即在主共振处对信噪比增强或抑制的作用加剧. 同样, 加性噪声强度

$D_\eta$  只影响主峰值和主谷值,  $D_\eta$  越大, 主峰值就越大或主谷值就越小, 即在主共振处对信噪比增强或抑制的作用加剧.

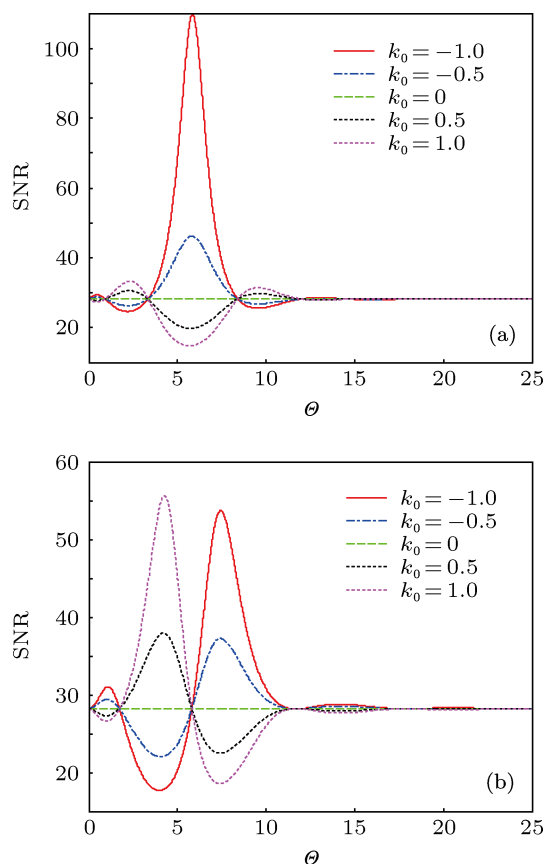


图3 SNR 作为  $\Theta$  的函数随着  $k_0$  变化的曲线 (a)  $\phi = \frac{\pi}{2}$ ; (b)  $\phi = 0$

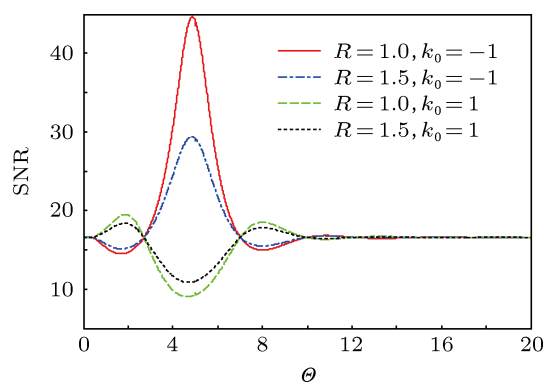


图4 SNR 作为  $\Theta$  的函数随着  $R$  变化的曲线

图5绘制了系统响应的信噪比 SNR 作为噪声交叉关联调制频率  $\Theta$  的函数, 随着不同的乘性噪声非对称性  $\Lambda_\xi$  变化的曲线. 其他各参数的取值为  $\Omega = 6, \omega_0 = 0.15, D_\xi = 2, \lambda_\xi = 5, D_\eta = 0.04, \phi = \frac{\pi}{2}, R = 1, k_0 = -1$ . 可以看到: SNR 曲线形状不受乘性噪声非对称性  $\Lambda_\xi$  的影响; 乘性噪声非对称性  $\Lambda_\xi$  越

大, 整条曲线位置越上移, 稳定值越大. 同时系统频率  $\omega_0$ 、乘性噪声强度  $D_\xi$  和乘性噪声相关率  $\lambda_\xi$  也仅影响稳定值, 不影响 SNR 曲线形状.

图 1—5 表明: 相较于噪声互不相关或噪声交叉关联强度是常数的情况, 噪声交叉关联强度受到时间周期调制时会产生丰富的现象, 系统响应的信噪比 SNR 随着噪声交叉关联调制频率  $\Theta$  的变化出现了周期振荡型随机共振现象. 这是在线性系统中还未见被报告过的现象.

随机共振是噪声在系统具有某种内秉动力指向性时其随机性对特定性质信号所产生的定向加强作用, 以及同时对其他性质信号所产生的抑制作用. 这些作用自然与噪声和信号的周期性质密切相关.

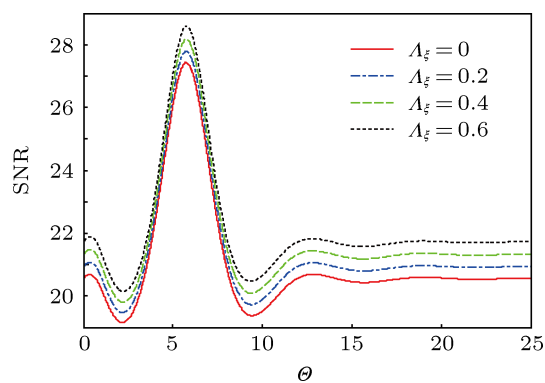


图 5 SNR 作为  $\Theta$  的函数随着  $A_\xi$  变化的曲线

在本文所讨论的情况中, 噪声交叉关联调制频率直接影响噪声的周期性质, 其周期或拟周期与信号周期之间的交叉耦合作用受二者相差、频差甚至幅差的直接影响, 因此, 上述共振现象的出现及其性质也就与交叉关联调制频率  $\Theta$ 、调制初相位  $\phi$  和调制系数  $k_0$  直接关联. 例如,  $\phi$  影响着主共振

位置;  $\phi$  和  $k_0$  的联合作用共同影响着 SNR 曲线的相图, 即单主峰共振、单主谷共振、单主峰主谷共振, 等等.

由此可知, 通过改变噪声交叉关联参数便可对随机共振现象实施有效控制, 亦即噪声交叉关联强度的时间周期调制的引入为随机共振现象在微弱周期信号检测及频率估计方面的应用提供了指导意义. 在相同的系统结构参数下, 可以通过调节噪声交叉关联强度  $k_0 \cos(\Theta t + \phi)$  的参数, 获得比噪声互不相关时 ( $k_0 = 0$ ) 更高的系统响应的信噪比, 提高对微弱周期信号检测的灵敏度. 同时, 当  $\phi = \frac{\pi}{2}$  时, SNR 曲线出现单主峰或单主谷共振, 主峰或主谷的位置出现在噪声交叉关联调制频率与驱动周期信号频率相等处, 这就意味着可以通过调节噪声交叉关联强度  $k_0 \cos(\Theta t + \phi)$  的参数来估计周期信号的频率, 这是在线性系统和非线性系统中还未见被报告过的现象, 也是随机共振在周期信号频率估计方面的应用.

## 5 结论

本文将噪声交叉关联强度的时间周期调制引入线性系统, 通过分析由加性、乘性噪声和周期信号共同作用的线性过阻尼系统后发现, 在适当参数下系统响应的信噪比随噪声交叉关联调制频率的变化出现了周期振荡型随机共振现象, 噪声交叉关联参数导致了随机共振现象的多样化. 通过调节噪声交叉关联参数, 可以在一定范围内实现对线性过阻尼系统随机共振的有效控制, 提高对微弱周期信号检测的灵敏度和实现对周期信号的频率估计, 进一步拓宽了随机共振现象在物理学和工程中的应用范围.

- [1] Benzi R, Sutera A, Vulpiani A 1981 *J. phys. A: Math. Gen.* **14** L453
- [2] Gitterman M 2005 *Physica A* **352** 309
- [3] Fulinski A, Telejko T 1991 *Phys. Lett. A* **152** 11
- [4] Jia Y, Li J R 1997 *Phys. Rev. Lett.* **78** 994
- [5] Denisov S I, Vitrenko A N, Horsthemke W 2003 *Phys. Rev. E* **67** 046132
- [6] Ai B Q, Wang X J, Liu G T, Liu L G 2003 *Phys. Rev. E* **67** 022903
- [7] Mei D C, Xie G Z, Cao L, Wu D J 1999 *Phys. Rev. E* **59** 3880
- [8] Jin Y F, Xu W 2005 *Chaos, Solitons Fractals* **23** 275
- [9] Wang B, Wu X Q, Shao J H 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 1391 (in Chinese) [王兵, 吴秀清, 邵继红 2009 物理学报 **58** 1391]
- [10] Wang B, Yan S P, Wu X Q 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 5191 (in Chinese) [王兵, 严少平, 吴秀清 2009 物理学报 **58** 5191]
- [11] Yang J H, Liu X B 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 3727 (in Chinese) [杨建华, 刘先斌 2010 物理学报 **59** 3727]
- [12] Yang L J, Dai Z C 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 100509 (in Chinese) [杨林静, 戴祖诚 2012 物理学报 **61** 100509]
- [13] Ning L J, Xu W, Yao M L 2008 *Chin. Phys. B* **17** 486
- [14] Guo F, Zhou Y R, Jiang S Q, Gu T X 2006 *Chin. Phys.* **15** 947
- [15] Du L C, Mei D C 2009 *Chin. Phys. B* **18** 946
- [16] Xu W, Jin Y F, Xu M, Li W 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 5027 (in Chinese) [徐伟, 靳艳飞, 徐猛, 李伟 2005 物理学报 **54** 5027]



- [17] Yang M, Li X L, Wu D J 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 160502 (in Chinese) [杨明, 李香莲, 吴大进 2012 物理学报 **61** 160502]
- [18] Zhou Y R 2011 *Chin. Phys. B* **20** 010501
- [19] Zhang L, Liu L, Cao L 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 1494 (in Chinese) [张莉, 刘立, 曹力 2010 物理学报 **59** 1494]
- [20] Lu Z X, Cao L 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 110501 (in Chinese) [陆志新, 曹力 2011 物理学报 **60** 110501]
- [21] Zhang L, Zhong S C, Peng H, Luo M K 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 130503 (in Chinese) [张路, 钟苏川, 彭皓, 罗懋康 2012 物理学报 **61** 130503]
- [22] Zhang X Y, Xu W, Zhou B C 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 060514 (in Chinese) [张晓燕, 徐伟, 周丙常 2011 物理学报 **60** 060514]
- [23] Chen D Y, Wang Z L 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 3333 (in Chinese) [陈德彝, 王忠龙 2008 物理学报 **57** 3333]
- [24] Chen D Y, Wang Z L 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 2907 (in Chinese) [陈德彝, 王忠龙 2009 物理学报 **58** 2907]
- [25] Chen D Y, Wang Z L 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 1403 (in Chinese) [陈德彝, 王忠龙 2009 物理学报 **58** 1403]
- [26] Chen D Y, Zhang L 2009 *Chin. Phys. B* **18** 1755
- [27] Tessone C J, Wio H S 1998 *Mod. Phys. Lett. B* **12** 1195
- [28] Tessone C J, Wio H S, Hänggi P 2000 *Phys. Rev. E* **62** 4623
- [29] Shapiro J H, Logginov V M 1978 *Physica A* **91** 563
- [30] Fulinski A 1995 *Acta Phys. Pol. B* **26** 1131
- [31] Gardiner C W 1983 *Handbook of Stochastic Processes* (Berlin: Springer) p86
- [32] Kubo R, Toda M, Hashitsume N 1986 *Nonequilibrium statistical mechanics Part 2* (Berlin: Springer)

# Effects of time-periodic modulation of cross-correlation intensity between noises on stochastic resonance of over-damped linear system\*

Tian Yan Huang Li Luo Mao-Kang<sup>†</sup>

(College of Mathematics, Sichuan University, Chengdu 610065, China)

(Received 15 September 2012; revised manuscript received 23 October 2012)

## Abstract

For an over-damped linear system subjected to correlated additive and multiplicative noise and a periodic signal, when the cross-correlation intensity between noises is a time-periodic function, the analytical expression of the output signal-to-noise ratio (SNR) is derived by means of the stochastic averaging method. It is found that this system has richer dynamic behaviors than the linear systems in which cross-correlation intensity between noises is constant, that the evolution of the output SNR with the cross-correlation modulation frequency presents periodic oscillation, and that the parameters of cross-correlation intensity between noises diversify the stochastic resonance phenomena. The time-periodic modulation of cross-correlation intensity between noises is conducive to enhancing the sensitivity to weak periodic signal detection and implementing the frequency estimation of weak periodic signal.

**Keywords:** stochastic resonance, periodic oscillation, cross-correlation intensity between noises, signal-to-noise ratio

**PACS:** 05.40.-a, 05.40.Ca, 02.50.-r

**DOI:** 10.7498/aps.62.050502

\* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 11171238).

<sup>†</sup> Corresponding author. E-mail: makaluo@scu.edu.cn