构造非线性发展方程的无穷序列复合型类孤子新解*

套格图桑

(内蒙古师范大学数学科学学院, 呼和浩特 010022)

(2012 年 11 月 25 日 收到; 2012 年 12 月 2 日 收到修改稿)

为了构造非线性发展方程的无穷序列复合型类孤子新解, 进一步研究了 $\frac{G'(\xi)}{G(\xi)}$ 展开法. 首先, 给出一种函数变换, 把常系数二阶齐次线性常微分方程的求解问题转化为一元二次方程和 Riccati 方程的求解问题. 然后, 利用 Riccati 方程解的非线性叠加公式, 获得了常系数二阶齐次线性常微分方程的无穷序列复合型新解. 在此基础上, 借助符号计算系统 Mathematica, 构造了改进的 (2+1) 维色散水波系统和 (2+1) 维色散长波方程的无穷序列复合型类孤子新精确解.

关键词: $\frac{G'(\xi)}{G(\xi)}$ 展开法, 非线性叠加公式, 非线性发展方程, 复合型类孤子新解

PACS: 02.30.Ik, 02.30.Jr **DOI:** 10.7498/aps.62.070202

1 引 言

构造非线性发展方程的类孤子精确解在孤立子理论的研究内容中占据非常重要的地位. 文献 [1—15] 利用辅助方程法, 构造了一些高维非线性发展方程的类孤子解等新精确解. 文献 [11—14] 给出 $\frac{G'(\xi)}{G(\xi)}$ 展开法, 获得了非线性发展方程 (组) 的新解.

实际上 $\frac{G'(\xi)}{G(\xi)}$ 展开法是二阶常系数齐次线性常微分方程 (1) 为辅助方程的非线性发展方程的一种求解方法. 在该方法中只是利用解 (2), (3), 构造了非线性发展方程的精确解.

$$G''(\xi)+pG'(\xi)+qG(\xi)=0, \tag{1}$$

$$\begin{aligned}G(\xi)=&C_1\exp\left(\frac{-p+\sqrt{p^2-4q}}{2}\xi\right)\\&+C_2\exp\left(\frac{-p-\sqrt{p^2-4q}}{2}\xi\right),\\&(p^2-4q>0),\end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned}G(\xi)=&\left[C_1\sin\left(\frac{\sqrt{-p^2+4q}}{2}\xi\right)\right.\\&\left.+C_2\cos\left(\frac{\sqrt{-p^2+4q}}{2}\xi\right)\right]\\&\times\exp\left(-\frac{p}{2}\xi\right),\quad(p^2-4q<0),\end{aligned} \tag{3}$$

其中 C_1, C_2 是任意常数.

文献 [1—14] 获得了非线性发展方程的由双曲函数、三角函数和有理函数单独构成的单函数型有限多个新精确解, 未能获得无穷序列精确解. 但是, 理论上有 "非线性发展方程存在无穷多个解" 的结论. 因此, 本文以文献 [15, 16] 为基础, 进一步研究 $\frac{G'(\xi)}{G(\xi)}$ 展开法, 获得了新的结论.

人们在通常情况下对方程 (1) 进行函数变换 (4), 获得常微分方程 (1) 的形如 (2), (3) 的解.

$$G(\xi)=\exp(\lambda\xi), \tag{4}$$

这里 λ 是待定常数. 本文首先, 对函数变换 (4) 进行了改进. 在改进的函数变换下, 将二阶常系数齐次线性常微分方程的求解问题转化为一元二次代数方程与 Riccati 方程的求解问题. 然后, 利用 Riccati

* 国家自然科学基金 (批准号: 10862003)、内蒙古自治区高等学校科学研究基金 (批准号: NJZY12031) 和内蒙古自治区自然科学基金 (批准号: 2010MS0111) 资助的课题.

† 通讯作者. E-mail: tgts@imnu.edu.cn

方程的 Bäcklund 变换和解的非线性叠加公式, 获得二阶常系数齐次线性常微分方程的无穷序列复合型新解. 在此基础上, 借助符号计算系统 Mathematica, 构造了改进的 (2+1) 维色散水波系统和 (2+1) 维色散长波方程的无穷序列复合型类孤子新精确解. 这些解包括了指数函数、三角函数和有理函数通过几种形式而构成的复合型新精确解.

2 二阶常系数齐次线性常微分方程的复合型新解

本文给出函数变换 (5), 获得了二阶常系数齐次线性常微分方程 (6) 的无穷序列复合型新精确解.

$$G(\xi)=\exp(\lambda\xi)+\exp\left(\int z(\xi)\,\mathrm{d}\xi\right). \tag{5}$$

这里 λ 是待定的常数, $z(\xi)$ 是 Riccati 方程的解.

$$aG''(\xi)+bG'(\xi)+cG(\xi)=0, \tag{6}$$

其中 a,b,c 是常数.

把函数变换 (5) 代入常微分方程 (6), 并令 $\exp(\lambda\xi)$ 和 $\exp\left(\int z(\xi)\,\mathrm{d}\xi\right)$ 的系数为零后得到如下一元二次代数方程和 Riccati 方程:

$$a\lambda^2+b\lambda+c=0, \tag{7}$$

$$a\left(z'(\xi)+z^2(\xi)\right)+bz(\xi)+c=0. \tag{8}$$

经计算获得了二阶常系数齐次线性常微分方程 (6) 的如下形式的解:

$$\begin{aligned}G(\xi)=&C_1\exp\left(\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\xi\right)\\&+C_2\exp\left(\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\xi\right)\\&+\exp\left(\int z(\xi)\,\mathrm{d}\xi\right),\quad(b^2-4ac>0),\end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned}G(\xi)=&\left(C_1+C_2\xi\right)\exp\left(\frac{-b}{2a}\xi\right)\\&+\exp\left(\int z(\xi)\,\mathrm{d}\xi\right),\quad(b^2-4ac=0),\end{aligned} \tag{10}$$

$$\begin{aligned}G(\xi)=&\left[C_1\cos\left(\frac{\sqrt{-b^2+4ac}}{2a}\xi\right)\right.\\&\left.+C_2\sin\left(\frac{\sqrt{-b^2+4ac}}{2a}\xi\right)\right]\exp\left(\frac{-b}{2a}\xi\right)\\&+\exp\left(\int z(\xi)\,\mathrm{d}\xi\right),\quad(b^2-4ac<0).\end{aligned} \tag{11}$$

在解 (9)—(11) 中 $z(\xi)$ 为 Riccati 方程 (8) 来确定. 根据文献 [16] 给出的结论, 获得了 Riccati 方程 (8) 的下列几种结论.

结论1 Riccati 方程 (8) 的解.

$$z(\xi)=\frac{1}{2a}\left[-b+a\sqrt{\frac{b^2-4ac}{a^2}}\tanh\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{b^2-4ac}{a^2}}\xi\right)\right],\quad(b^2-4ac>0), \tag{12}$$

$$z(\xi)=\frac{1}{2a}\left[-b+a\sqrt{\frac{b^2-4ac}{a^2}}\coth\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{b^2-4ac}{a^2}}\xi\right)\right],\quad(b^2-4ac>0), \tag{13}$$

$$z(\xi)=\frac{1}{2a}\left[-b-a\sqrt{\frac{-b^2+4ac}{a^2}}\tan\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{-b^2+4ac}{a^2}}\xi\right)\right],\quad(b^2-4ac<0), \tag{14}$$

$$z(\xi)=\frac{1}{2a}\left[-b+a\sqrt{\frac{-b^2+4ac}{a^2}}\cot\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{-b^2+4ac}{a^2}}\xi\right)\right],\quad(b^2-4ac<0), \tag{15}$$

$$z(\xi)=\frac{2c\left[d_1\exp\left(\sqrt{\frac{b^2-4ac}{a^2}}\xi\right)+d_2\right]}{a\sqrt{\frac{b^2-4ac}{a^2}}\left[d_1\exp\left(\sqrt{\frac{b^2-4ac}{a^2}}\xi\right)-d_2\right]+b\left[d_1\exp\left(\sqrt{\frac{b^2-4ac}{a^2}}\xi\right)\right]+d_2},\quad(b^2-4ac>0), \tag{16}$$

$$z(\xi)=\frac{2c\left[d_1\cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{-b^2+4ac}{a^2}}\xi\right)+d_2\sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{-b^2+4ac}{a^2}}\xi\right)\right]}{a\left[D_1\cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{-b^2+4ac}{a^2}}\xi\right)+D_2\sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{-b^2+4ac}{a^2}}\xi\right)\right]},\quad(b^2-4ac<0), \tag{17}$$

$$z(\xi)=-\frac{b^2(d_1+d_2\xi)}{2a[2ad_2+b(d_1+d_2\xi)]},\quad(b^2-4ac=0). \tag{18}$$

这里 $D_1=-\frac{b}{a}d_1-d_2\sqrt{-\frac{b^2}{a^2}+\frac{4c}{a}}$, $D_2=d_1\sqrt{-\frac{b^2}{a^2}+\frac{4c}{a}}-\frac{b}{a}d_2$; d_1,d_2 是不全为零的任意常数.

结论2 Riccati 方程 (8) 的 Bäcklund 变换.

若 $z(\xi)$ 是 Riccati 方程 (8) 的解, 则下面给出的 $\bar{z}(\xi)$ 也是 Riccati 方程 (8) 的解.

$$\bar{z}(\xi)=\frac{cB-anz(\xi)}{-bB-an-aBz(\xi)}, \tag{19}$$

$$\bar{z}(\xi)=-\frac{b}{a}+\frac{bA}{aA+amz(\xi)-bBz^2(\xi)}. \tag{20}$$

结论3 Riccati 方程 (8) 解的非线性叠加公式.

若 $z_1(\xi),z_2(\xi),z_3(\xi)$ 是 Riccati 方程 (8) 的三个解, 则下面给出的 $\bar{z}(\xi)$ 也是 Riccati 方程 (8) 的解.

$$\bar{z}(\xi)=\frac{-cNz_3(\xi)+[c(L+N)+(cn+bN)z_2(\xi)+(cl+bL)z_3(\xi)]z_1(\xi)+a\gamma(\xi)z_2(\xi)}{-cnz_3(\xi)+[c(l+n)-aNz_2(\xi)-aLz_3(\xi)]z_1(\xi)+[-cl+a(L+N)z_3(\xi)]z_2(\xi)}. \tag{21}$$

在 (20), (21) 中 $\gamma(\xi)=-\frac{c}{a}L-\left[\frac{c}{a}(l+n)+\frac{b}{a}(L+N)\right]z_3(\xi)$, a,b,c,N,L,m,n,l,A,B 是任意常数.

结论4 计算 $\exp\left(\int z(\xi)\mathrm{d}\xi\right)$ 的几种结果.

利用解 (12)—(18) 与 Bäcklund 变换 (20) 和解的非线性叠加公式 (21), 可以获得 Riccati 方程 (8) 的无穷序列新精确解. 把得到的解分别代入 $\exp\left(\int z(\xi)\mathrm{d}\xi\right)$ 后得到相应的结果. 这些解在构造非线性发展方程的无穷序列复合型新精确解方面发挥非常重要作用. 下面列出将 Bäcklund 变换 (20) 代入 $\exp\left(\int z(\xi)\mathrm{d}\xi\right)$ 后得到的几种结果.

$$\exp\left(\int z(\xi)\mathrm{d}\xi\right)=\exp\left(-\frac{b}{c}\int\left[1-\frac{Ac}{Ac+cmz(\xi)-bBz^2(\xi)}\right]\mathrm{d}\xi\right), \tag{22}$$

$$\exp\left(\int z(\xi)\mathrm{d}\xi\right)=\exp\left(\frac{4a}{b}\int\left[-1+\frac{Ab}{Ab+bmz(\xi)-4aBz^2(\xi)}\right]\mathrm{d}\xi\right),\quad (b^2-4ac=0). \tag{23}$$

3 无穷序列类孤子新精确解

下面利用以上得到的结论与符号计算系统 Mathematica, 构造改进的 (2+1) 维色散水波系统和 (2+1) 维色散长波方程的无穷序列复合型类孤子新精确解.

例1 改进的 (2+1) 维色散水波系统 [9,10] 的无穷序列复合型新精确解.

$$u_{yt}+u_{xxy}-2v_{xx}-(u^2)_{xy}=0, \tag{24}$$

$$v_t-v_{xx}-2(uv)_x=0. \tag{25}$$

将下列变换 (26) 代入微分方程 (24), (25) 后得到微分方程 (27).

$$v=u_y. \tag{26}$$

$$u_{yt}-u_{xxy}-(u^2)_{xy}=0. \tag{27}$$

微分方程 (27) 经对 y 积分一次后变成为如下方程:

$$u_t-u_{xx}-2uu_x=\alpha(x,t). \tag{28}$$

这里 $\alpha(x,t)$ 是 x,t 的任意函数.

在构造非线性发展方程的精确解方面辅助方程法已获得了诸多成果. 这些成果中选择了非线性发展方程的比较复杂的形式解, 获得了新精确解. 本文借助以上得到的结论, 选择了非线性发展方程的比较简单的形式解, 构造了无穷序列类孤子新精确解. 假设微分方程 (28) 的形式解如下:

$$u(x,y,t)=g_0(y)+g_1(t)+\frac{g_2(y)G'[xp(y)+q(y,t)]}{G[xp(y)+q(y,t)]}. \tag{29}$$

将 (29) 式和常微分方程 (6) 一起代入微分方程 (28), 并令 $G^3(\xi)$, $G^2(\xi)G'(\xi)$, $G(\xi)\left(G'(\xi)\right)^2$, $\left(G'(\xi)\right)^3(\xi=xp(y)+q(y,t))$ 的系数为零后得到一个 $g_0(y),g_1(t),g_2(y),p(y),q(y,t)$ 为未知量的超定微分方程组 (未列出). 用符号计算系统 Mathematica 求出该方程组的如下解:

$$q(y,t)=\int\frac{1}{acg_2(y)}\left[-bcg_2^3(y)+2cag_2^2(y)\times[g_0(y)+g_1(t)]\right]\mathrm{d}t+F_1(x,y),$$

$$p(y)=g_2(y),\quad g_1(t)=\int\alpha(x,t)\mathrm{d}t+F_2(x,y); \tag{30}$$

$$\begin{aligned}q(y,t)=&\int\frac{1}{a}\big[-bg_2^2(y)+2ag_2(y)g_0(y)\\&+2ag_1(t)g_2(y)\big]\,\mathrm{d}t+F_3(x,y),\\p(y)=&g_2(y),\quad g_1(t)=\int\alpha(x,t)\,\mathrm{d}t+F_2(x,y);\end{aligned}\tag{31}$$

$$\begin{aligned}q(y,t)=&\int\frac{1}{4bc^2g_2(y)}\big[-16c^3g_2^3(y)\\&+8bc^2g_2^2(y)[g_0(y)+g_1(t)]\big]\,\mathrm{d}t+F_4(x,y),\\p(y)=&g_2(y),\quad g_1(t)=\int\alpha(x,t)\,\mathrm{d}t+F_2(x,y),\\a=&\frac{b^2}{4c};\end{aligned}\tag{32}$$

$$\begin{aligned}q(y,t)=&\int\frac{2}{b}\big[-2cg_2^2(y)+bg_2(y)g_0(y)\\&+bg_2(y)g_1(t)\big]\,\mathrm{d}t+F_5(x,y),\\p(y)=&g_2(y),\quad g_1(t)=\int\alpha(x,t)\,\mathrm{d}t+F_2(x,y),\\a=&\frac{b^2}{4c}.\end{aligned}\tag{33}$$

这里 $F_j(x,y)(j=1,2,3,4,5)$ 是 x,y 的任意函数,$p(y)$ 和 $g_2(y)$ 是 y 的任意函数.

将 (30)—(33) 式分别代入 (29) 式后得到改进的 (2+1) 维色散水波系统的如下形式的精确解.

$$\begin{aligned}u_1(x,y,t)=&g_0(y)+\int\alpha(x,t)\,\mathrm{d}t+F_2(x,y)\\&+\frac{g_2(y)G'[xp(y)+q(y,t)]}{G[xp(y)+q(y,t)]},\\v_1(x,y,t)=&\frac{\partial u_1(x,y,t)}{\partial y},\\q(y,t)=&\int\frac{1}{acg_2(y)}\big[-bcg_2^3(y)+2cag_2^2(y)\\&\times[g_0(y)+g_1(t)]\big]\,\mathrm{d}t+F_1(x,y);\end{aligned}\tag{34}$$

$$\begin{aligned}u_2(x,y,t)=&g_0(y)+\int\alpha(x,t)\,\mathrm{d}t+F_2(x,y)\\&+\frac{g_2(y)G'[xp(y)+q(y,t)]}{G[xp(y)+q(y,t)]},\\v_2(x,y,t)=&\frac{\partial u_2(x,y,t)}{\partial y},\\q(y,t)=&\int\frac{1}{a}\big[-bg_2^2(y)+2ag_2(y)g_0(y)\\&+2ag_1(t)g_2(y)\big]\,\mathrm{d}t+F_3(x,y);\end{aligned}\tag{35}$$

$$\begin{aligned}u_3(x,y,t)=&g_0(y)+\int\alpha(x,t)\,\mathrm{d}t+F_2(x,y)\\&+\frac{g_2(y)G'[xp(y)+q(y,t)]}{G[xp(y)+q(y,t)]},\\v_3(x,y,t)=&\frac{\partial u_3(x,y,t)}{\partial y},\\q(y,t)=&\int\frac{1}{4bc^2g_2(y)}\big[-16c^3g_2^3(y)+8bc^2g_2^2(y)\\&\times[g_0(y)+g_1(t)]\big]\,\mathrm{d}t+F_4(x,y),\\a=&\frac{b^2}{4c};\end{aligned}\tag{36}$$

$$\begin{aligned}u_4(x,y,t)=&g_0(y)+\int\alpha(x,t)\,\mathrm{d}t+F_2(x,y)\\&+\frac{g_2(y)G'[xp(y)+q(y,t)]}{G[xp(y)+q(y,t)]},\\v_4(x,y,t)=&\frac{\partial u_4(x,y,t)}{\partial y},\\q(y,t)=&\int\frac{2}{b}\big[-2cg_2^2(y)+bg_2(y)g_0(y)\\&+bg_2(y)g_1(t)\big]\,\mathrm{d}t+F_5(x,y),\\a=&\frac{b^2}{4c}.\end{aligned}\tag{37}$$

下面构造改进的 (2+1) 维色散水波系统的类孤子新精确解.

情况1 (2+1) 维色散水波系统的指数函数型无穷序列类孤子新精确解.

把下列 (38) 和 (39) 式分别代入 (34) 和 (35) 式后可以获得改进的 (2+1) 维色散水波系统的指数函数型无穷序列类孤子新精确解.

$$\begin{aligned}&G_n(\xi)=C_1\exp\left(\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\xi\right)+C_2\exp\left(\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\xi\right)+\exp(\int z_n(\xi)\,\mathrm{d}\xi),\\&\exp\left(\int z_n(\xi)\,\mathrm{d}\xi\right)=\exp\left[-\frac{b}{c}\int\left[1-\frac{Ac}{Ac+cmz_{n-1}(\xi)-bBz_{n-1}^2(\xi)}\right]\mathrm{d}\xi\right],\\&z_0(\xi)=\frac{1}{2a}\left[-b+a\sqrt{\frac{b^2-4ac}{a^2}}\tanh\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{b^2-4ac}{a^2}}\xi\right)\right],\quad(b^2-4ac>0,n=1,2,\cdots);\end{aligned}\tag{38}$$

$$G_n(\xi)=C_1\exp\left(\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\xi\right)+C_2\exp\left(\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\xi\right)+\exp\left(\int z_n(\xi)\,\mathrm{d}\xi\right),$$

$$\exp\left(\int z_n(\xi)\mathrm{d}\xi\right)=\exp\left(-\frac{b}{c}\int\left[1-\frac{Ac}{Ac+cmz_{n-1}(\xi)-bBz_{n-1}^2(\xi)}\right]\mathrm{d}\xi\right),$$

$$z_0(\xi)=\frac{1}{2a}\left[-b+a\sqrt{\frac{b^2-4ac}{a^2}}\coth\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{b^2-4ac}{a^2}}\xi\right)\right],\quad (b^2-4ac>0, n=1,2,\cdots). \tag{39}$$

情况2 (2+1) 维色散水波系统的三角函数与指数函数复合的无穷序列类孤子新精确解.

把下列 (40), (41) 式分别代入 (34) 和 (35) 式后可以获得改进的 (2+1) 维色散水波系统的三角函数与指数函数复合的类孤子新精确解.

$$G_n(\xi)=\left(C_1\cos\left(\frac{\sqrt{-b^2+4ac}}{2a}\xi\right)+C_2\sin\left(\frac{\sqrt{-b^2+4ac}}{2a}\xi\right)\right)\exp\left(\frac{-b}{2a}\xi\right)+\exp\left(\int z_n(\xi)\mathrm{d}\xi\right),$$

$$\exp\left(\int z_n(\xi)\mathrm{d}\xi\right)=\exp\left(-\frac{b}{c}\int\left[1-\frac{Ac}{Ac+cmz_{n-1}(\xi)-bBz_{n-1}^2(\xi)}\right]\mathrm{d}\xi\right),$$

$$z_0(\xi)=\frac{1}{2a}\left[-b-a\sqrt{\frac{-b^2+4ac}{a^2}}\tan\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{-b^2+4ac}{a^2}}\xi\right)\right],\quad (b^2-4ac<0, n=1,2,\cdots); \tag{40}$$

$$G_n(\xi)=\left(C_1\cos\left(\frac{\sqrt{-b^2+4ac}}{2a}\xi\right)+C_2\sin\left(\frac{\sqrt{-b^2+4ac}}{2a}\xi\right)\right)\exp\left(\frac{-b}{2a}\xi\right)+\exp\left(\int z_n(\xi)\mathrm{d}\xi\right),$$

$$\exp\left(\int z_n(\xi)\mathrm{d}\xi\right)=\exp\left(-\frac{b}{c}\int\left[1-\frac{Ac}{Ac+cmz_{n-1}(\xi)-bBz_{n-1}^2(\xi)}\right]\mathrm{d}\xi\right),$$

$$z_0(\xi)=\frac{1}{2a}\left[-b+a\sqrt{\frac{-b^2+4ac}{a^2}}\cot\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{-b^2+4ac}{a^2}}\xi\right)\right],\quad (b^2-4ac<0, n=1,2,\cdots). \tag{41}$$

情况3 (2+1) 维色散水波系统的指数函数与有理函数复合的无穷序列类孤子新精确解.

把下列 (42) 式代入 (36) 和 (37) 式后可以获得改进的 (2+1) 维色散水波系统的指数函数与有理函数复合的无穷序列类孤子新精确解.

$$G_n(\xi)=(C_1+C_2\xi)\exp\left(\frac{-b}{2a}\xi\right)+\exp\left(\int z_n(\xi)\mathrm{d}\xi\right),$$

$$\exp\left(\int z_n(\xi)\mathrm{d}\xi\right)=\exp\left(\frac{4a}{b}\int\left[-1+\frac{Ab}{Ab+bmz_{n-1}(\xi)-4aBz_{n-1}^2(\xi)}\right]\mathrm{d}\xi\right),$$

$$z_0(\xi)=-\frac{b^2(d_1+d_2\xi)}{2a[2ad_2+b(d_1+d_2\xi)]},\quad (b^2-4ac=0, n=1,2,\cdots). \tag{42}$$

例2 (2+1) 维色散长波方程 [9,10] 的无穷序列复合型新精确解.

$$u_{yt}+\eta_{xx}+u_xu_y+uu_{xy}=0, \tag{43}$$

$$\eta_t+u_x+\eta u_x+u\eta_x+u_{xxy}=0. \tag{44}$$

将下列变换 (45) 代入方程 (43) 和 (44), 后得到微分方程 (46).

$$\eta=u_y-1, \tag{45}$$

$$u_{yt}+u_yu_x+uu_{xy}+u_{xxy}=0. \tag{46}$$

选择微分方程 (46) 的解为如下:

$$u(x,y,t)=g_0(y)+g_1(t)+\frac{g_2(y)G'[xp(y)+q(y,t)]}{G[xp(y)+q(y,t)]}. \tag{47}$$

将 (47) 式和方程 (6) 一起代入微分方程 (46), 并令 $G^4(\xi)$, $x^sG(\xi)\left(G'(\xi)\right)^3$, $x^sG^2(\xi)\left(G'(\xi)\right)^2$, $x^sG^3(\xi)G'(\xi)(s=0,1,\xi=p(y)x+q(y,t))$ 的系数为零后得到一个 $g_0(y)$, $g_1(t)$, $g_2(y)$, $p(y)$, $q(y,t)$ 为未知量的超定微分方程组 (未列出). 用符号计算系统 Mathematica 求出该方程组的如下解:

$$q(y,t)=-\int\frac{1}{2b}\left[cg_2^2(y)+bg_2(y)g_0(y)+bg_2(y)g_1(t)\right]\mathrm{d}t+H_1(x,y),$$

$$p(y)=\frac{1}{2}g_2(y),\quad a=-\frac{b^2}{2c}; \tag{48}$$

$$
\begin{aligned}
q(y,t) &= \int \frac{1}{4a}\left[bg_2^2(y) - 2ag_2(y)[g_0(y) + g_1(t)]\right]\mathrm{d}t + H_2(x,y),\\
p(y) &= \frac{1}{2}g_2(y);
\end{aligned} \tag{49}
$$

$$
\begin{aligned}
q(y,t) &= \int \frac{1}{2b}\left[2cg_2^2(y) - bg_2(y)g_0(y) - bg_1(t)g_2(y)\right]\mathrm{d}t + H_3(x,y),\\
p(y) &= \frac{1}{2}g_2(y), \quad a = \frac{b^2}{4c},\\
g_0(y) &= \int \frac{1}{bg_2(y)}\left[-b[g_0(y)+g_1(t)]g_2'(y) + [4cg_2'(y) + bg_1'(t)]g_2(y)\right]\mathrm{d}y + H_4(x,t).
\end{aligned} \tag{50}
$$

在这里 $H_j(x,y)(j=1,2,3)$ 是 x,y 的任意函数,$H_4(x,t)$ 是 x,t 的任意函数.

把 (48)—(50) 分别代入 (47) 后得到 (2+1) 维色散长波方程的如下形式的精确解:

$$
\begin{aligned}
u_1(x,y,t) &= g_0(y) + g_1(t) + \frac{g_2(y)G'\left[\frac{1}{2}g_2(y)x + q(y,t)\right]}{G\left[\frac{1}{2}g_2(y)x + q(y,t)\right]},\\
\eta_1(x,y,t) &= \frac{\partial u_1(x,y,t)}{\partial y} - 1,\\
q(y,t) &= -\int \frac{1}{2b}\left[cg_2^2(y) + bg_2(y)g_0(y) + bg_2(y)g_1(t)\right]dt + H_1(x,y),\\
a &= -\frac{b^2}{2c};
\end{aligned} \tag{51}
$$

$$
\begin{aligned}
u_2(x,y,t) &= g_0(y) + g_1(t) + \frac{g_2(y)G'\left[\frac{1}{2}g_2(y)x + q(y,t)\right]}{G\left[\frac{1}{2}g_2(y)x + q(y,t)\right]},\\
\eta_2(x,y,t) &= \frac{\partial u_2(x,y,t)}{\partial y} - 1,\\
q(y,t) &= \int \frac{1}{4a}\left[bg_2^2(y) - 2ag_2(y)[g_0(y) + g_1(t)]\right]\mathrm{d}t + H_2(x,y),\\
p(y) &= \frac{1}{2}g_2(y);
\end{aligned} \tag{52}
$$

$$
\begin{aligned}
u_3(x,y,t) &= g_0(y) + g_1(t) + \frac{g_2(y)G'\left[\frac{1}{2}g_2(y)x + q(y,t)\right]}{G\left[\frac{1}{2}g_2(y)x + q(y,t)\right]},\\
\eta_3(x,y,t) &= \frac{\partial u_3(x,y,t)}{\partial y} - 1,\\
g_0(y) &= \int \frac{1}{bg_2(y)}\left[-b[g_0(y)+g_1(t)]g_2'(y) + [4cg_2'(y) + bg_1'(t)]g_2(y)\right]\mathrm{d}y + H_4(x,t),\\
q(y,t) &= \int \frac{1}{2b}\left[2cg_2^2(y) - bg_2(y)g_0(y) - bg_1(t)g_2(y)\right]\mathrm{d}t + H_3(x,y),\\
a &= \frac{b^2}{4c}.
\end{aligned} \tag{53}
$$

仿照例 1 的方法, 在几种情况下可以获得 (2+1) 维色散长波方程的无穷序列复合型类孤子新精确解 (这里未列出).

4 结 论

提出和发展求解一类非线性发展方程有效且系统的方法, 是孤立子理论的重要研究内容之一. 辅助方程法是结合计算机代数系统的一种比较有效的求解方法. 该方法已获得了非线性发展方程的类孤子解等许多新精确解. 但是获得无穷序列新精确解的文献并不多见.

本文为了获得非线性发展方程的无穷序列复合型类孤子新精确解, 进一步研究了 $\frac{G'(\xi)}{G(\xi)}$ 展开法. 根据辅助方程法的构造性, 给出一种函数变换 (5), 把二阶常系数齐次线性常微分方程的求解问题转化为一元二次方程和 Riccati 方程的求解问题. 在此基础上, 利用 Riccati 方程的 Bäcklund 变换和解的非线性叠加公式, 获得了二阶常系数齐次线性常微分方程的无穷序列复合型新解. 这些解在符号计算系统 Mathematica 的帮助下, 可以构造非线性发展方程的无穷序列复合型新精确解. 为了验证该方法的有效性, 又用改进的 (2+1) 维色散水波系统和 (2+1) 维色散长波方程作为应用实例, 构造了无穷序列复合型类孤子新精确解. 这里包括了指数函数、三角函数和有理函数通过几种形式复合的新解.

[1] Chen Y, Li B, Zhang H Q 2003 *Chin. Phys.* **12** 940
[2] Ma S H, Fang J P 2012 *Acta. Phys. Sin.* **61** 180505 (in Chinese) [马松华, 方建平 2012 物理学报 **61** 180505]
[3] Ma Z Y, Ma S H, Yang Y 2012 *Acta. Phys. Sin.* **61** 190508 (in Chinese) [马正义, 马松华, 杨毅 2012 物理学报 **61** 190508]
[4] Chen H T, Zhang H Q 2004 *Commun. Theor. Phys.* (Beijing) **42** 497
[5] Chen Y, Li B, Zhang H Q 2003 *Commun. Theor. Phys.* (Beijing) **40** 137
[6] Lü Z S, Zhang H Q 2003 *Commun. Theor. Phys.* (Beijing) **39** 405
[7] Ma S H, Fang J P, Zhu H P 2007 *Acta. Phys. Sin.* **56** 4319 (in Chinese) [马松华, 方建平, 朱海平 2007 物理学报 **56** 4319]
[8] Xie F D, Chen J, Lü Z S 2005 *Commun. Theor. Phys.* (Beijing) **43** 585
[9] Li D S, Zhang H Q 2004 *Chin. Phys.* **13** 984
[10] Li D S, Zhang H Q 2003 *Commun. Theor. Phys.* (Beijing) **40** 143
[11] Ma Y L, Li B Q, Sun J Z 2009 *Acta. Phys. Sin.* **58** 7403 (in Chinese) [马玉兰, 李帮庆, 孙践知 2009 物理学报 **58** 7403]
[12] Li B Q, Ma Y L, Xu M P 2010 *Acta. Phys. Sin.* **59** 1409 (in Chinese) [李帮庆, 马玉兰, 徐美萍 2010 物理学报 **59** 1409]
[13] Li B Q, Ma Y L 2009 *Acta. Phys. Sin.* **58** 4373 (in Chinese) [李帮庆, 马玉兰 2009 物理学报 **58** 4373]
[14] Wang M L, Li X Z, Zhang J L 2008 *Phys. Lett.* **A372** 417
[15] Taogetusang, Sirendaoerji, Li S M 2011 *Commun. Theor. Phys.* (Beijing) **55** 949
[16] Taogetusang, Sirendaoerji, Li S M 2010 *Chin. Phys.* B **19** 080303

Construction of new infinite sequence complexion soliton-like solutions of nonlinear evolution equations*

Taogetusang†

(*College of Mathematical Science, Inner Mongolia Normal University, Huhhot* 010022)

(Received 25 November 2012; revised manuscript received 2 December 2012)

Abstract

The $\dfrac{G'(\xi)}{G(\xi)}$ expansion method is further studied for constructing new infinite sequence complexion soliton-like solutions of nonlinear evolution equations. First, to solve a linear ordinary differential equation with constant coefficients of second order is changed into the solving of one unknown quadratic equation and Riccati equation by a function transformation. Then a nonlinear superposition formula of the solutions to Riccati equation is presented to seek new infinite sequence complexion solutions of a second order linear ordinary differential equation with constant coefficients. Based on this, the new infinite sequence complexion soliton-like solutions to (2+1)-dimensional modified dispersive water wave system and (2+1)-dimensional dispersive long-wave equation are obtained with the help of symbolic computation system Mathematica.

Keywords: the $\dfrac{G'(\xi)}{G(\xi)}$ expansion method, nonlinear superposition formula, nonlinear evolution equation, new complexion soliton-like solution

PACS: 02.30.Ik, 02.30.Jr

DOI: 10.7498/aps.62.070202

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 10862003), the Science Research Foundation of Institution of Higher Education of Inner Mongolia Autonomous Region, China (Grant No. NJZY12031), and the Natural Science Foundation of Inner Mongolia Autonomous Region, China (Grant No. 2010MS0111).

† Corresponding author. E-mail: tgts@imnu.edu.cn