

# 任意磁化方向铁氧体电磁散射时域有限差分 分析的 Z 变换方法\*

王飞<sup>†</sup> 魏兵

(西安电子科技大学物理系, 西安 710071)

(2012年11月26日收到; 2013年1月22日收到修改稿)

利用坐标系转换矩阵给出实验室系中饱和磁化铁氧体的频域磁化率张量, 采用部分分式展开方法通过 Z 变换得到磁化率张量的 Z 域形式, 给出了任意磁化方向铁氧体电磁散射的 Z 变换 - 时域有限差分算法. 计算了饱和磁化铁氧体球的同极化和交叉极化后向雷达散射截面, 结果表明了算法的正确有效性.

**关键词:** Z 变换, 饱和磁化铁氧体, 电磁散射, 时域有限差分方法

**PACS:** 41.20.Jb

**DOI:** 10.7498/aps.62.084106

## 1 引言

铁氧体材料为磁色散介质, 在有外加磁场时又是磁各向异性介质. 近年来, 对其物理特性的研究已成为热点之一, 如文献 [1, 2] 分别研究了磁化铁氧体材料的自旋电流及自旋极化电流的影响和作用. 磁化铁氧体材料的磁导系数是频率的张量函数, 对含有磁化铁氧体目标的电磁散射进行严格三维分析是非常困难的. 本文主要研究应用于磁各向异性色散介质的电磁散射的时域有限差分 (finite difference time domain, FDTD) 算法. 文献中处理各向同性色散介质电磁问题的 FDTD 方法有: 递归卷积 (recursive convolution, RC) 法 [3]、分段线性递归卷积 (piecewise linear recursive convolution, PLRC) 法 [4]、电流密度卷积 (current density convolution, JEC) 法 [5]、分段线性电流密度递归卷积 (piecewise linear current density recursive convolution, PLJERC) 法 [6,7]、辅助方程 (auxiliary differential equation, ADE) 法 [8,9]、Z 变换 (Z-transform, ZT) 法 [10-12]、移位算子 (shift operator, SO) 法 [13] 和半解析递推卷积 (semianalytical recursive convolution, SARC)

法 [14] 等. 外加磁场时铁氧体介质具有磁各向异性色散特性, 因此对磁化铁氧体问题, 需要将上述算法进行推广. Chen 等 [15,16] 计算分析了处于自由空间和波导内的饱和磁化铁氧体目标的环流特征. 杨利霞等分别采用 Padé-FDTD 法 [17], RC-FDTD 法 [18] 和直接差分法 [19] 计算了饱和磁化铁氧体球的电磁散射.

Z 变换法是数字信号处理中处理离散信号的一种常用的变换方法 [20]. 在 FDTD 法中运用 Z 变换的优点是将与频率相关的媒质的介电常数由频域变换到 Z 域, 把时域中的卷积积分转化为 Z 域内的乘法, 可以方便地求出媒质的差分方程, 避免了时域卷积运算. 本文根据饱和磁化铁氧体介质电磁特性, 将 Z 变换法推广应用于任意磁化方向的铁氧体目标 FDTD 分析. 考虑到在实验室参照系中饱和磁化铁氧体磁导系数张量的形式和磁化方向密切相关, 首先利用坐标系转换矩阵给出实验室系中饱和磁化铁氧体的频域磁化率张量, 再采用部分分式展开方法通过 Z 变换得到磁化率张量的 Z 域形式, 最后将饱和磁化铁氧体的频域磁本构关系转换到 Z 域再根据移位定理转换到离散时域, 从而实现电磁场量  $\mathbf{B} \rightarrow \mathbf{H}$  的迭代计算. 该方法对于

\* 国家高技术研究发展计划 (批准号: 2012AA01A308) 和西安电子科技大学基本科研业务费 (批准号: K50511070007) 资助的课题.

<sup>†</sup> 通讯作者. E-mail: wfei1021@yahoo.com.cn

研究铁氧体目标处于任意方向外磁场情况下的电磁散射问题具有应用价值. 作为验证, 计算了饱和磁化铁氧体球的后向雷达散射截面 (radar scattering cross-section, RCS), 所得结果与文献 [21] 结果一致. 理论推导及算例表明该方法是正确有效的. 文中时谐因子取  $\exp(j\omega t)$ .

## 2 饱和磁化铁氧体 Maxwell 旋度方程和频域本构关系

饱和磁化铁氧体介质的 Maxwell 旋度方程及频域本构关系为

$$\partial \mathbf{E} / \partial t = (\nabla \times \mathbf{H}) / \epsilon_0, \quad (1)$$

$$\partial \mathbf{B} / \partial t = -\nabla \times \mathbf{E}, \quad (2)$$

$$\mathbf{B}(\omega) = \mu_0 \mu_r(\omega) \cdot \mathbf{H}(\omega), \quad (3)$$

其中  $\mu_r(\omega)$  是饱和磁化铁氧体相对磁导系数张量的频域形式. 按标准 Yee 元胞 [22] 对旋度方程 (1) 和 (2) 式差分离散便可实现  $\mathbf{H} \rightarrow \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{B}$  的 FDTD 迭代计算, 而要实现  $\mathbf{B} \rightarrow \mathbf{H}$  的迭代计算则需要对频域本构关系 (3) 式进行特殊处理. (3) 式可以写为另一种形式 [23]

$$\mathbf{B}(\omega) = \mu_0 \mu_\infty \mathbf{H}(\omega) + \mu_0 \mathbf{M}(\omega), \quad (4)$$

其中  $\mu_\infty$  是无限大频率时的相对磁导系数张量,  $\mathbf{M}$  为磁化矢量

$$\mathbf{M}(\omega) = \chi_m(\omega) \mathbf{H}(\omega), \quad (5)$$

其中  $\chi_m(\omega)$  为频域磁化率张量, 设  $\chi_{m\alpha\beta}(\omega)$  是  $\chi_m(\omega)$  的元素 ( $\alpha, \beta = x, y, z$ ), 有

$$\chi_m(\omega) = \begin{bmatrix} \chi_{mxx}(\omega) & \chi_{mxy}(\omega) & \chi_{mxz}(\omega) \\ \chi_{myy}(\omega) & \chi_{myy}(\omega) & \chi_{myz}(\omega) \\ \chi_{mzx}(\omega) & \chi_{mzy}(\omega) & \chi_{mzz}(\omega) \end{bmatrix}. \quad (6)$$

由 (3)—(5) 式可知

$$\mu_r(\omega) = \mu_\infty + \chi_m(\omega). \quad (7)$$

## 3 频域磁化率张量从外磁场坐标系到实验室坐标系的转换

各向异性介质的本构参数与所选取的坐标系有关. 饱和磁化铁氧体的磁化率张量在外磁场坐标

系 (设为  $x'y'z'$  系) 中有简单的表达式, 而电磁测量往往在实验室坐标系 (设为  $xyz$  系) 下进行. 下面根据外磁场系和实验室系的转换矩阵以及外磁场系中饱和磁化铁氧体的相对磁导系数张量, 得到实验室系中磁化率张量的表达式.

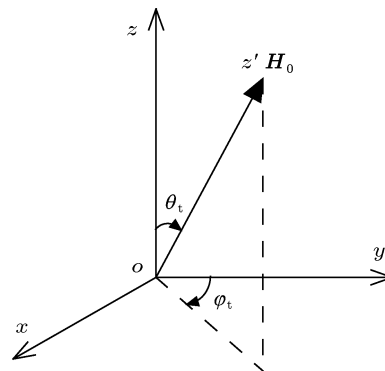


图 1 外磁场 ( $x'y'z'$  系) 和实验室 ( $xyz$  系)

建立外磁场直角坐标系:  $x'y'z'$  系, 并令外磁场  $\mathbf{H}_0$  方向为  $z'$  轴正向, 即  $\mathbf{H}_0 = \hat{z}' H_0$ ,  $\hat{z}'$  为  $z'$  轴正向单位矢,  $H_0$  是  $\mathbf{H}_0$  的大小. 设外磁场  $\mathbf{H}_0$  在实验室直角坐标系 ( $xyz$  系) 中的方向角为  $\theta_t, \phi_t$ , 如图 1 所示.

设  $x'y'z'$  系中, 饱和磁化铁氧体的相对磁导系数张量为  $\mu_r'(\omega)$ , 根据文献 [23] 有

$$\begin{aligned} \mu_r'(\omega) &= \begin{bmatrix} \mu_{x'x'}(\omega) & \mu_{x'y'}(\omega) & \mu_{x'z'}(\omega) \\ \mu_{y'x'}(\omega) & \mu_{y'y'}(\omega) & \mu_{y'z'}(\omega) \\ \mu_{z'x'}(\omega) & \mu_{z'y'}(\omega) & \mu_{z'z'}(\omega) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mu_r & \mu_{rg} & 0 \\ -\mu_{rg} & \mu_r & 0 \\ 0 & 0 & \mu_{rz} \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (8)$$

式中

$$\begin{aligned} \mu_r &= 1 + \frac{(\omega_0 + j\omega\alpha) \omega_m}{(\omega_0 + j\omega\alpha)^2 - \omega^2}, \\ \mu_{rg} &= \frac{j\omega\omega_m}{(\omega_0 + j\omega\alpha)^2 - \omega^2}, \\ \mu_{rz} &= 1, \end{aligned} \quad (9)$$

上式中  $\omega_0 = \gamma H_0$ ,  $\gamma = 1.76 \times 10^7$  rad/Oe · s 为旋磁比,  $\omega_m = \gamma 4\pi M_s$ ,  $M_s$  为饱和磁化率,  $\alpha$  为阻尼因子.

设  $\mu_\infty'$  和  $\chi_m'(\omega)$  分别是  $x'y'z'$  系中无限大频率时的相对磁导系数张量和频域磁化率张量, 由 (7)

式可知

$$\boldsymbol{\mu}'_r(\omega) = \boldsymbol{\mu}'_\infty + \boldsymbol{\chi}'_m(\omega). \quad (10)$$

设  $\boldsymbol{\mu}'_\infty$  为单位矩阵, 即

$$\boldsymbol{\mu}'_\infty = \boldsymbol{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (11)$$

由 (8)—(11) 式可得到  $x'y'z'$  系中

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\chi}'_m(\omega) &= \begin{bmatrix} \chi_{mx'x'}(\omega) & \chi_{mx'y'}(\omega) & \chi_{mx'z'}(\omega) \\ \chi_{my'x'}(\omega) & \chi_{my'y'}(\omega) & \chi_{my'z'}(\omega) \\ \chi_{mz'x'}(\omega) & \chi_{mz'y'}(\omega) & \chi_{mz'z'}(\omega) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \chi_{mr} & \chi_{mrg} & 0 \\ -\chi_{mrg} & \chi_{mr} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (12)$$

其中

$$\begin{aligned} \chi_{mr}(\omega) &= \frac{(\omega_0 + j\omega\alpha)\omega_m}{(\omega_0 + j\omega\alpha)^2 - \omega^2}, \\ \chi_{mrg}(\omega) &= \frac{j\omega\omega_m}{(\omega_0 + j\omega\alpha)^2 - \omega^2}. \end{aligned} \quad (13)$$

可以证明 (12) 式中

$$\begin{aligned} \chi_{mx'x'}(\omega) = \chi_{my'y'}(\omega) &= \frac{\sum_{n=0}^2 p_n(j\omega)^n}{\sum_{n=0}^2 q_n(j\omega)^n}, \\ \chi_{mx'y'}(\omega) = -\chi_{my'x'}(\omega) &= \frac{\sum_{n=0}^2 p_{x'y'n}(j\omega)^n}{\sum_{n=0}^2 q_n(j\omega)^n}, \end{aligned} \quad (14)$$

其中

$$\begin{aligned} p_0 &= \omega_0\omega_m, & p_1 &= \alpha\omega_m, & p_2 &= 0, \\ p_{x'y'0} &= 0, & p_{x'y'1} &= \omega_m, & p_{x'y'2} &= 0, \\ q_0 &= \omega_0^2, & q_1 &= 2\alpha\omega_0, & q_2 &= \alpha^2 + 1. \end{aligned} \quad (15)$$

$xyz$  系中的  $\boldsymbol{\mu}_r(\omega)$  可由  $x'y'z'$  系中的  $\boldsymbol{\mu}'_r(\omega)$  通过转换计算得到<sup>[24]</sup>

$$\boldsymbol{\mu}_r(\omega) = \boldsymbol{U}^T \cdot \boldsymbol{\mu}'_r(\omega) \cdot \boldsymbol{U}, \quad (16)$$

$\boldsymbol{U}$  为  $x'y'z'$  系到  $xyz$  系的转换矩阵,  $\boldsymbol{U}^T$  是  $\boldsymbol{U}$  的转置矩阵, 且

$$\boldsymbol{U} = \begin{bmatrix} \cos\varphi_t & -\sin\varphi_t & 0 \\ \cos\theta_t \sin\varphi_t & \cos\theta_t \cos\varphi_t & -\sin\theta_t \\ \sin\theta_t \sin\varphi_t & \sin\theta_t \cos\varphi_t & \cos\theta_t \end{bmatrix}. \quad (17)$$

将 (10) 式代入 (16) 式有

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\mu}_r(\omega) &= \boldsymbol{\mu}_\infty + \boldsymbol{\chi}_m(\omega) = \boldsymbol{U}^T \cdot [\boldsymbol{\mu}'_\infty + \boldsymbol{\chi}'_m(\omega)] \cdot \boldsymbol{U} \\ &= \boldsymbol{U}^T \cdot \boldsymbol{\mu}'_\infty \cdot \boldsymbol{U} + \boldsymbol{U}^T \cdot \boldsymbol{\chi}'_m(\omega) \cdot \boldsymbol{U}, \end{aligned} \quad (18)$$

即有

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\mu}_\infty &= \boldsymbol{U}^T \cdot \boldsymbol{\mu}'_\infty \cdot \boldsymbol{U} = \boldsymbol{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \\ \boldsymbol{\chi}_m(\omega) &= \begin{bmatrix} \chi_{mxx}(\omega) & \chi_{mxy}(\omega) & \chi_{mzx}(\omega) \\ \chi_{myx}(\omega) & \chi_{myy}(\omega) & \chi_{myz}(\omega) \\ \chi_{mzx}(\omega) & \chi_{mzy}(\omega) & \chi_{mzz}(\omega) \end{bmatrix} \\ &= \boldsymbol{U}^T \cdot \boldsymbol{\chi}'_m(\omega) \cdot \boldsymbol{U}. \end{aligned} \quad (19)$$

根据 (12), (14), (16) 式可知,  $\boldsymbol{\chi}_m(\omega)$  的各元素也可写成  $j\omega$  的有理分数形式

$$\chi_{m\alpha\beta}(\omega) = \frac{\sum_{n=0}^2 p_{\alpha\beta n}(j\omega)^n}{\sum_{n=0}^2 q_n(j\omega)^n} \quad (\alpha, \beta = x, y, z), \quad (20)$$

其中  $q_n$  的值见 (15) 式,  $p_{\alpha\beta n}$  的值可由 (15) 和 (19) 式计算得到, 即

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} p_{xxn} & p_{xyn} & p_{xzn} \\ p_{yxn} & p_{yy n} & p_{yzn} \\ p_{zxn} & p_{zyn} & p_{zzn} \end{bmatrix} \\ &= \boldsymbol{U}^T \cdot \begin{bmatrix} p_n & p_{x'y'n} & 0 \\ -p_{x'y'n} & p_n & 0 \\ 0 & 0 & p_{z'n} \end{bmatrix} \cdot \boldsymbol{U} \\ &(n = 0, 1, 2). \end{aligned} \quad (21)$$

#### 4 实验室系中极化率张量的 Z 域形式

由上可知,  $\boldsymbol{\chi}_m(\omega)$  各个元素  $\chi_{m\alpha\beta}(\omega)$  可写成  $j\omega$  的有理分式的真分式, 可采用部分分式展开法展开为部分分式进而转换到 Z 域. 令

$$\chi_{m\alpha\beta}(\omega) = \frac{1}{\alpha^2 + 1} \frac{B_{\alpha\beta}(j\omega)}{A(j\omega)}, \quad (22)$$

由 (15), (20) 式知  $A(j\omega)$  有两个共轭复数单根 (2 单极点), 即  $A(j\omega)$  可写为

$$A(j\omega) = (j\omega - a_0)(j\omega - a_1), \quad (23)$$

2 个共轭复数单根为

$$a_1^* = a_0 = \frac{-\alpha\omega_0}{\alpha^2+1} - j\frac{\omega_0}{\alpha^2+1}. \quad (24)$$

根据部分分式展开法,  $\chi_{m\alpha\beta}(\omega)$  可展开为部分分式

$$\chi_{m\alpha\beta}(\omega) = \frac{1}{\alpha^2+1} \left[ \frac{K_{\alpha\beta 0}}{(j\omega - a_0)} + \frac{K_{\alpha\beta 1}}{(j\omega - a_1)} \right], \quad (25)$$

其中系数

$$K_{\alpha\beta 1}^* = K_{\alpha\beta 0} = (j\omega - a_0)\chi_{m\alpha\beta}(\omega)|_{j\omega=a_0}. \quad (26)$$

令

$$K_{\alpha\beta 0} = |K_{\alpha\beta 0}| \exp(j\varphi_{\alpha\beta}), \quad (27)$$

$|K_{\alpha\beta 0}|$  和  $\varphi_{\alpha\beta}$  分别为  $K_{\alpha\beta 0}$  的模和相角, 从而有

$$\chi_{m\alpha\beta}(\omega) = \frac{2|K_{\alpha\beta 0}|}{\alpha^2+1} \times \left[ \frac{\cos(\varphi_{\alpha\beta}) \cdot [(j\omega) - \text{Re}(a_0)] - \sin(\varphi_{\alpha\beta}) \cdot \text{Im}(a_0)}{[\text{Re}(a_0)]^2 + [\text{Im}(a_0)]^2 - 2(j\omega)[\text{Re}(a_0)] - \omega^2} \right]. \quad (28)$$

上式的 Z 域形式为

$$\begin{aligned} \chi_{m\alpha\beta}(z) &= \frac{2}{\alpha^2+1} (\chi_{1\alpha\beta} + \chi_{2\alpha\beta} \cdot z^{-1}) \\ &\times \left[ 1 - 2 \exp\left(-\frac{\alpha\omega_0}{\alpha^2+1}\Delta t\right) \cos\left(\frac{\omega_0}{\alpha^2+1}\Delta t\right) z^{-1} \right. \\ &\left. + \exp\left(-2\frac{\alpha\omega_0}{\alpha^2+1}\Delta t\right) z^{-2} \right]^{-1}. \end{aligned} \quad (29)$$

其中

$$\begin{aligned} \chi_{1\alpha\beta} &= \text{Re}(K_{\alpha\beta 0}), \\ \chi_{2\alpha\beta} &= \left[ \text{Im}(K_{\alpha\beta 0}) \sin\left(\frac{\omega_0}{\alpha^2+1}\Delta t\right) \right. \\ &\left. - \text{Re}(K_{\alpha\beta 0}) \cos\left(\frac{\omega_0}{\alpha^2+1}\Delta t\right) \right] \\ &\times \exp\left(-\frac{\alpha\omega_0}{\alpha^2+1}\Delta t\right), \end{aligned} \quad (30)$$

设其为张量  $\chi_1$  和  $\chi_2$  的元素, 在 (29), (30) 式中同时考虑了 (24) 式.

### 5 饱和磁化铁氧体的 Z 变换 —— FDTD 方法

饱和磁化铁氧体频域本构关系 (4) 式和磁化矢量 (5) 式的 Z 域形式为

$$B(z) = \mu_0 [H(z) + M(z)], \quad (31)$$

$$M(z) = \Delta t \chi_m(z) \cdot H(z). \quad (32)$$

将 (29), (30) 式代入 (32) 式并整理得

$$\begin{aligned} M(z) &= 2 \exp\left(-\frac{\alpha\omega_0}{\alpha^2+1}\Delta t\right) \cos\left(\frac{\omega_0}{\alpha^2+1}\Delta t\right) z^{-1} M(z) \\ &- \exp\left(-2\frac{\alpha\omega_0}{\alpha^2+1}\Delta t\right) z^{-2} M(z) \\ &+ \frac{2\Delta t}{\alpha^2+1} [\chi_1 \cdot H(z) + \chi_2 \cdot z^{-1} H(z)]. \end{aligned} \quad (33)$$

将 (33) 式代入 (31) 式并整理得

$$\begin{aligned} &\left( I + \frac{2\Delta t}{\alpha^2+1} \chi_1 \right) \cdot H(z) \\ &= \frac{B(z)}{\mu_0} - 2 \exp\left(-\frac{\alpha\omega_0}{\alpha^2+1}\Delta t\right) \\ &\times \cos\left(\frac{\omega_0}{\alpha^2+1}\Delta t\right) z^{-1} M(z) \\ &+ \exp\left(-2\frac{\alpha\omega_0}{\alpha^2+1}\Delta t\right) z^{-2} M(z) \\ &- \frac{2\Delta t}{\alpha^2+1} \chi_2 \cdot z^{-1} H(z). \end{aligned} \quad (34)$$

根据 Z 域和离散时域对应关系和移位定理<sup>[22]</sup>, 可以将以上 Z 域关系式过渡到离散时域, 于是得到 (33), (34) 式对应的离散时域形式为

$$\begin{aligned} M^{n+1/2}(t) &= 2 \exp\left(-\frac{\alpha\omega_0}{\alpha^2+1}\Delta t\right) \cos\left(\frac{\omega_0}{\alpha^2+1}\Delta t\right) M^{n-1/2}(t) \\ &- \exp\left(-2\frac{\alpha\omega_0}{\alpha^2+1}\Delta t\right) M^{n-1-1/2}(t) \\ &+ \frac{2\Delta t}{\alpha^2+1} [\chi_1 \cdot H^{n+1/2}(t) + \chi_2 \cdot H^{n-1/2}(t)], \end{aligned} \quad (35)$$

$$\begin{aligned} H^{n+1/2}(t) &= \left( I + \frac{2\Delta t}{\alpha^2+1} \chi_1 \right)^{-1} \left\{ \frac{B^{n+1/2}(t)}{\mu_0} \right. \\ &- 2 \exp\left(-\frac{\alpha\omega_0}{\alpha^2+1}\Delta t\right) \cos\left(\frac{\omega_0}{\alpha^2+1}\Delta t\right) M^{n-1/2}(t) \\ &+ \exp\left(-2\frac{\alpha\omega_0}{\alpha^2+1}\Delta t\right) M^{n-1-1/2}(t) \\ &\left. - \frac{2\Delta t}{\alpha^2+1} \chi_2 \cdot H^{n-1/2}(t) \right\}, \end{aligned} \quad (36)$$

其中  $\left( I + \frac{2\Delta t}{\alpha^2+1} \chi_1 \right)^{-1}$  表示  $\left( I + \frac{2\Delta t}{\alpha^2+1} \chi_1 \right)$  的逆矩阵.

综上所述, 可以得到饱和磁化铁氧体的 ZT-FDTD 计算步骤:

- 1) 由  $B, M \rightarrow H$ , 用 (36) 式计算;

- 2) 由  $\mathbf{H} \rightarrow \mathbf{M}$ , 用 (35) 式计算;
- 3) 由  $\mathbf{H} \rightarrow \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{B}$ , 用旋度方程 (1), (2) 式的差分离散式计算;
- 4) 回到步骤 1).

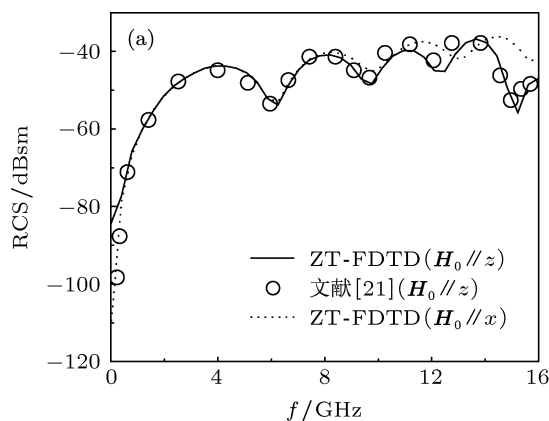
## 6 算例验证及数值结果

饱和磁化铁氧体球半径为  $d = 1.5 \text{ cm}$ , 参数为

$$\begin{aligned} \omega_0 &= 2\pi \times 20 \times 10^9 \text{ rad/s}, \\ \omega_m &= 2\pi \times 10^{10} \text{ rad/s}, \\ \alpha &= 0.1. \end{aligned} \quad (37)$$

设  $x$  方向极化的平面高斯脉冲

$$E_x(t) = \exp\left[-\frac{4\pi(t-t_0)^2}{\tau^2}\right]$$



沿  $z$  方向入射, 其中  $\tau = 34\Delta t$  和  $t_0 = 0.8\tau$ .

图 2(a) 和 (b) 分别为该饱和磁化铁氧体球的同极化和交叉极化后向 RCS. 图中实线表示当外加磁场沿  $z$  轴正向 ( $\theta_t = 0, \varphi_t = 0$ ) 时, 本文方法的计算结果, 作为对比, 图中同时给出了文献 [21] 的计算结果, 在图中用圆圈表示. 由图可见, 两者符合得非常好.

在图 2 中同时给出了当外加磁场沿  $x$  轴正向 ( $\theta_t = 90^\circ, \varphi_t = 90^\circ$ ) 时该球的后向 RCS, 在图 2 中用虚线表示. 由图 2(a) 可见, 两种外磁场方向情形下, 该铁氧体球的同极化后向 RCS 在频率小于 12GHz 时几乎无差别, 在更高频率时将略有不同; 而又由图 2(b) 所示, 该铁氧体球的交叉极化后向 RCS 对外磁场方向非常敏感, 在该算例的两种外磁场方向情形下, 其差别很大.

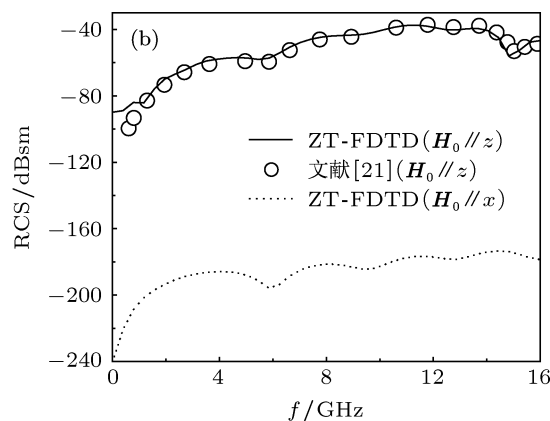


图 2 饱和磁化铁氧体球的后向雷达散射截面 (a) 同极化, (b) 交叉极化

## 7 结论

利用坐标系转换矩阵给出实验室系中饱和磁化铁氧体的频域磁化率张量, 并采用部分分式展开方法通过  $Z$  变换得到磁化率张量的  $Z$  域形式, 以  $Z$  变换为桥梁将饱和磁化铁氧体的频域磁本构关系转换到离散时域, 实现了电磁场量  $\mathbf{B} \rightarrow \mathbf{H}$  的迭代

计算. 从而给出了任意磁化方向铁氧体电磁散射的 ZT-FDTD 算法, 该方法对于研究铁氧体目标处于任意方向外磁场情况下的电磁散射问题具有应用价值. 作为验证, 计算了饱和磁化铁氧体球的后向 RCS, 所得结果与文献结果一致. 理论推导及算例表明该方法正确可行, 推导简单, 概念简明.

[1] He P B, Liu W M 2005 *Phys. Rev. B* **72** 064410  
 [2] Li Z D, Liang J Q, Li L, Liu W M 2004 *Phys. Rev. E* **69** 066611  
 [3] Luebbers R J, Hunsberger F, Kunz K S 1991 *IEEE Trans. Antennas Propag.* **39** 29  
 [4] Kelley D F, Lubbers R J 1996 *IEEE Trans. Antenn. Propag.* **44** 792  
 [5] Chen Q, Katsurai M, Aoyagi P H 1998 *IEEE Trans. Antenn. Propag.* **46** 1739

[6] Liu S B, Mo J J, Yuan N C 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 778 (in Chinese)  
 [刘少斌, 莫锦军, 袁乃昌 2004 物理学报 **53** 778]  
 [7] Xu L J, Yuan N C 2005 *IEEE Microw. Wirel. Compon. Lett.* **15** 277  
 [8] Nickisch L J, Franke P M 1992 *IEEE Antennas Propagat. Mag.* **34** 33  
 [9] Takayama Y, Klaus W 1994 *IEEE Microw. Wirel. Compon. Lett.* **12** 102  
 [10] Sullivan D M 1992 *IEEE Trans. Antenn. Propag.* **40** 1223

- [11] Sullivan D M 1995 *IEEE Trans. Antenn. Propag.* **43** 676
- [12] Sullivan D M 1996 *IEEE Trans. Antenn. Propag.* **44** 28
- [13] Ge D B, Wu Y L, Zhu X Q 2003 *Chin. J. Radio Sci.* **18** 359 (in Chinese) [葛德彪, 吴跃丽, 朱湘琴 2003 电波科学学报 **18** 359]
- [14] Zhang Y Q, Ge D B 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 4573 (in Chinese) [张玉强, 葛德彪 2009 物理学报 **58** 4573]
- [15] Chen R S, Edward K N Yung, Xie Z M, Wang Y 1998 *International Journal of Infrared and Millimeter Waves* **19** 329
- [16] Edward K N Yung, Chen R S, Wu K 1998 *IEE Proc. H* **145** 433
- [17] Yang L X, Ge D B 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 1751 (in Chinese) [杨利霞, 葛德彪 2006 物理学报 **55** 1751]
- [18] Yang L X, Ge D B, Wang G, Yan S 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 6937 (in Chinese) [杨利霞, 葛德彪, 王刚, 阎述 2007 物理学报 **56** 6937]
- [19] Yang L X, Ge D B, Zhao Y H, Wang G, Yan S 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 2936 (in Chinese) [杨利霞, 葛德彪, 赵跃华, 王刚, 阎述 2008 物理学报 **57** 2936]
- [20] Ludeman L C 1986 *Fundamentals of Digital Signal Processing* (New York: Harper and Row Publishers)
- [21] Schuster J, Lubbers R 1996 *IEEE Antenn. Propag. Soc. AP-S Int. Symp. (Digest)* **3** 1648
- [22] Ge D B, Yan Y B 2011 *Finite-Difference Time-Domain Method for Electromagnetic Waves* (3th Ed.) (Xi'an: Xidian University Press) p11, 272 (in Chinese) [葛德彪, 闫玉波 2011 电磁波时域有限差分法 (第三版) (西安: 西安电子科技大学出版社) 第 11, 272 页]
- [23] Bi D X 1985 *Electromagnetic Field Theory* (Beijing: Publishing House of Electronics Industry) (in Chinese) [毕德显 1985 电磁场理论 (北京: 电子工业出版社)]
- [24] Kong J A 2002 *Electromagnetic Wave Theory EMW Publishing* (Beijing: Higher Education Press)

# Z-transform algorithm in the finite-difference time domain analysis of ferrite subject to an arbitrary direction of external magnetic field\*

Wang Fei<sup>†</sup> Wei Bing

(Department of Physics, Xidian University, Xi'an 710071, China)

(Received 26 November 2012; revised manuscript received 22 January 2013)

## Abstract

The susceptibility tensor of saturated magnetized ferrite in frequency domain in laboratory coordinate system is gained by using the transfer matrix between the principal and the laboratory system, and then its form in Z-domain is derived by Z-transform (ZT). The ZT-finite-difference time domain method applied to the ferrite subject to an arbitrary direction of external dc magnetic field is obtained. The co-polarized and cross-polarized backward radar scattering cross-section for a saturated magnetized ferrite sphere are obtained by the presented algorithm. The computed results indicate the correctness and feasibility of the method.

**Keywords:** Z-transform, saturated magnetized ferrite, electromagnetic scattering, finite-difference time-domain method

**PACS:** 41.20.Jb

**DOI:** 10.7498/aps.62.084106

\* Project supported by the National High Technique Research and Development Program of China (Grant No. 2012AA01A308) and the Basic Science Research Fund in Xidian University, China (Grant No. K50511070007).

<sup>†</sup> Corresponding author. E-mail: wfei1021@yahoo.com.cn