

椭圆响应强非局域非线性介质中的二维异步分数傅里叶变换及光束传输特性*

陆大全 胡巍†

(华南师范大学信息光电子科技学院, 广东省微纳光子功能材料与器件重点实验室, 广州 510631)

(2012年11月26日收到; 2012年12月18日收到修改稿)

研究了椭圆响应强非局域非线性介质中的光束传输问题. 结果表明: 任意光束在这类介质中传输时均遵守二维异步分数傅里叶变换的传输规律. 基于二维异步分数傅里叶变换这一数学工具, 可很方便地对光束的传输进行解析求解并分析其性质. 利用二维异步分数傅里叶变换的性质, 讨论了一般光束的传输性质; 分析了孤子和二维异步呼吸子的形成条件; 得出了孤子/呼吸子的相互作用规律.

关键词: 椭圆响应, 强非局域非线性, 孤子, 呼吸子

PACS: 42.65.Tg, 42.65.Jx

DOI: 10.7498/aps.62.084211

1 引言

十几年前, Snyder 与 Mitchell 在《Science》杂志上提出了强非局域非线性物理模型^[1]. 强非局域非线性介质的主要特征是: 当光束在此介质中传输时, 光束某点所感受到的非线性折射率不仅对该点的光强有响应, 也对其他位置的光强有响应, 并且响应的特征宽度远大于光束宽度. 正是此特征使得相应的数学模型可进行线性化处理, 得到线性化的方程. 此方程使得解析求解光束的传输问题得到了简化, 掀起了新一轮非线性光传输问题(特别是孤子问题)的研究热潮. 强非局域非线性介质的响应函数有两类, 其一是圆对称的响应函数, 其二是椭圆对称的响应函数. 由于圆对称情形下方程的求解相对简单, 得到了较多的研究. 在过去十几年里已经求得了许多孤子结构的解析解^[2-17], 如涡旋孤子^[3]、多极孤子^[4]、旋转孤子^[7,8]、椭圆孤子等^[13], 并且其中一些结构已得到了实验验证^[18-21]. 对于椭圆响应的强非局域介质中的光传输研究则相对较少, 就我们所知, 只有文献^[22, 23]中分别报道过此条件下的基模椭圆高斯孤子的理论和实验

结果.

本文致力于求得椭圆响应的强非局域介质中的光束传输一般规律, 由传输方程的本征稳态解着手, 证明任意光束在椭圆响应非局域非线性介质中传输时均遵守二维异步分数傅里叶变换的传输规律. 而分数傅里叶变换是一个成熟且应用普遍的数学工具, 我们将在此基础上讨论一般光束的传输性质, 分析孤子和二维异步呼吸子的形成条件, 并得出孤子/呼吸子的相互作用规律.

2 椭圆响应强非局域非线性介质中的二维异步分数傅里叶变换效应

对于复振幅为 A 的光束在椭圆响应强非局域非线性介质中传输, 可用非局域非线性薛定谔方程描述^[1,13,22]:

$$2ikn_0\partial_z A + n_0(\partial_{xx} + \partial_{yy})A + 2k^2\Delta n A = 0, \quad (1)$$

其中 k 为波数, n_0 为线性折射率,

$$\Delta n = n_2 \iint R(x-x', y-y') |A(x', y')|^2 dx' dy' \quad (2)$$

为非局域非线性导致的折射率, n_2 为非线性系数, R

* 国家自然科学基金(批准号: 10804033, 11174090, 11174091)和高等学校博士学科点专项科研基金(批准号: 200805740002)资助的课题.

† 通讯作者. E-mail: huwei@scnu.edu.cn

为介质的响应函数. 对于强非局域非线性介质, 响应函数比激光的特征宽度大得多, 因此将 Δn 展开到 x, y 的二阶项, 可将方程 (1) 线性化为

$$2ik\partial_z A + (\partial_{xx} + \partial_{yy})A - (\gamma_x^2 x^2 + \gamma_y^2 y^2)k^2 P_0 A = 0, \quad (3)$$

其中

$$\gamma_x = \sqrt{-n_2 R^{(2,0)}(0,0)/n_0},$$

$$\gamma_y = \sqrt{-n_2 R^{(0,2)}(0,0)/n_0},$$

$P_0 = \int |A|^2 d^2 \mathbf{r}$ 为光功率.

由 (3) 式可知, 在椭圆强非局域非线性介质中, 形成了曲率与激光功率成正比的波导. 并且由于 x 和 y 方向的非线性响应不同, 导致两个方向折射率曲率的不同, 进而导致了对光束约束能力的差异.

为研究椭圆强非局域非线性介质中光束传输的规律, 先求方程 (3) 的本征解. 假设方程的本征解为

$$A^{(mn)} = A_x^{(m)}(x, z) A_y^{(n)}(y, z), \quad (4)$$

则通过分离变量可得 $A_x^{(m)}(x, z)$ 和 $A_y^{(n)}(y, z)$ 各自的方程

$$2ik\partial_z A_x^{(m)} + \partial_{xx} A_x^{(m)} - \gamma_x^2 x^2 k^2 P_0 A_x^{(m)} = 0, \quad (5)$$

$$2ik\partial_z A_y^{(n)} + \partial_{yy} A_y^{(n)} - \gamma_y^2 y^2 k^2 P_0 A_y^{(n)} = 0. \quad (6)$$

进而设本征解具有形式

$$A_x^{(m)}(x, z) = a_x^{(m)}(x) \exp(-i\beta_x^{(m)} z), \quad (7)$$

$$A_y^{(n)}(y, z) = a_y^{(n)}(y) \exp(-i\beta_y^{(n)} z), \quad (8)$$

则方程 (5) 和 (6) 可分别简化为

$$\partial_{xx} a_x^{(m)} + (2\beta^{(m)}k - k^2 \gamma_x^2 P_0 x^2) a_x^{(m)} = 0, \quad (9)$$

$$\partial_{yy} a_y^{(n)} + (2\beta^{(n)}k - k^2 \gamma_y^2 P_0 y^2) a_y^{(n)} = 0. \quad (10)$$

以上两式具有形式一致性. 借鉴量子力学中的谐振子本征态求解方法 (此处不赘述), 可得上两式的分立本征解为

$$a_x^{(m)} = c^{(m)} H_m \left(\frac{x}{w_c^{(x)}} \right) e^{-\left(\frac{x}{\sqrt{2}w_c^{(x)}}\right)^2},$$

$$\beta_x^{(m)} = \left(m + \frac{1}{2}\right) \beta_0^{(x)}, \quad (11)$$

$$a_y^{(n)} = c^{(n)} H_n \left(\frac{y}{w_c^{(y)}} \right) e^{-\left(\frac{y}{\sqrt{2}w_c^{(y)}}\right)^2},$$

$$\beta_y^{(n)} = \left(n + \frac{1}{2}\right) \beta_0^{(y)}, \quad (12)$$

上式中, $m, n = 0, 1, 2, \dots$ 为 x, y 方向本征解的阶数, $c^{(m)}, c^{(n)}$ 为满足 $\int |A^{(mn)}|^2 d^2 \mathbf{r} = P_0$ 的系数, $w_c^{(x)} = (k^2 \gamma_x^2 P_0)^{-1/4}$ 和 $w_c^{(y)} = (k^2 \gamma_y^2 P_0)^{-1/4}$ 分别为 x 和 y 方向的临界束宽, $H_m(\cdot)$ 为厄米多项式, $\beta_0^{(x)} = \sqrt{P_0} \gamma_x = 1/k(w_c^{(x)})^2$, $\beta_0^{(y)} = \sqrt{P_0} \gamma_y = 1/k(w_c^{(y)})^2$.

在数学上, 函数 $A_x^{(m)}(x, z)$ 和 $A_y^{(n)}(y, z)$ 同时也是分数傅里叶变换

$$\mathbf{F}_{w_c^{(\alpha)}}^{(\alpha)} \{g(x_1)\}(x_2) = \left\{ \frac{\exp[i(\alpha - \pi/2)]}{2\pi w_c^2 \sin \alpha} \right\}^{1/2} \exp\left(\frac{ix_2^2}{2w_c^2 \tan \alpha}\right) \times \int \exp\left(\frac{ix_1^2}{2w_c^2 \tan \alpha} - \frac{ix_1 x_2}{w_c^2 \sin \alpha}\right) g(x_1) dx_1, \quad (13)$$

的本征函数, 即

$$\mathbf{F}_{w_c^{(\alpha_x)}}^{(\alpha_x)} \{A_x^{(m)}(x_1)\} = A_x^{(m)}(x_2) e^{-i\alpha_x z}, \quad (14)$$

$$\mathbf{F}_{w_c^{(\alpha_y)}}^{(\alpha_y)} \{A_y^{(n)}(y_1)\} = A_y^{(n)}(y_2) e^{-i\alpha_y z}, \quad (15)$$

其中

$$\alpha_x = \beta_0^{(x)} z = \sqrt{P_0} \gamma_x z, \quad (16)$$

$$\alpha_y = \beta_0^{(y)} z = \sqrt{P_0} \gamma_y z \quad (17)$$

表示两个方向上分数傅里叶变换的阶数, $w_c^{(x)}$ 和 $w_c^{(y)}$ 为两个方向上分数傅里叶变换的变换核.

实际上, 由于厄米高斯函数在数学上的正交完备性, 任意二维输入函数均可分解为二维厄米高斯函数的线性叠加, 即 $A(x, y, 0) = \sum_{m,n} c_{mn} A_x^{(m)}(x, 0) A_y^{(n)}(y, 0)$, 其中 c_{mn} 为权重系数. 由于方程 (3) 和分数傅里叶变换是线性的, 故任意光束在椭圆强非局域非线性介质中的传输均可用分数傅里叶变换来表示:

$$A(x, y, z) = \mathbf{F}_{w_c^{(\alpha_x)}}^{(\alpha_x)} \left\{ \mathbf{F}_{w_c^{(\alpha_y)}}^{(\alpha_y)} \{A(x, y, 0)\} \right\} \times \exp\left(-i \frac{\alpha_x + \alpha_y}{2} z\right). \quad (18)$$

从 (18) 式中可看出, 当光束传输某一距离 z 时, 可看作是光束在 x 和 y 两个方向上做异步分数傅里叶变换 (即两个方向上的阶数以及变换核不同). 正是由于这个特点, 导致光束传输过程中出现有趣的现象, 下面我们将基于二维异步分数傅里叶变换来讨论光束的传输性质.

3 基于二维异步分数傅里叶变换的光束传输特性分析

3.1 一般光束的传输特性

由方程 (18) 知, 任意光束在椭圆响应强非局域非线性介质中传输时均遵守二维异步分数傅里叶变换的传输规律. 其机制如下: 由于非局域非线性效应, 导致介质中形成折射率分布曲率与功率成正比的平方率非线性波导, 使光束传输过程中在两个方向上都感受到分数傅里叶变换效应. 由于在 x 和 y 方向上的非线性响应系数不同, 导致波导在两个方向的折射率曲率不同; 传输某一距离时, 光束在这两个方向上感受到的分数傅里叶变换阶数和变换核都不相同, 从而形成二维异步分数傅里叶变换效应. 对于既定的椭圆非局域非线性介质, 光束传输的阶数不但与距离有关, 而且和功率有关, 因此输出面的光场分布可用功率进行调节.

分数傅里叶变换的重要特征是随着变换阶数的增加能将信号在实域和谱域间连续地变换; 具有周期性 (周期 $\Delta\alpha = 2\pi$), 且后半周期是前半周期的反转; 在 $\alpha = (2n + 1/2)\pi$ 时, 退化为输入场的标准傅里叶变换, 即

$$\Phi(x_2, z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}w_c} \int \Phi(x_1, 0) \times \exp\left(-\frac{ix_1x_2}{w_c^2}\right) dx_1. \quad (19)$$

对于二维同步分数傅里叶变换, 其二维光斑的图样演化同样遵循上述规律.

但对于二维异步的分数傅里叶变换而言, 由于在两个维度上的变换阶数不同步, 其演化规律与二维同步分数傅里叶变换有显著的不同. 首先在演化的周期性方面, 只有 x 和 y 方向的变换阶数可以分别同时达到 $2m\pi$ 和 $2n\pi$ ($m \neq n$) 时, 才具有二维整体周期性, 否则光斑在二维整体看来将不具备周期性. 因此, 在椭圆响应非局域非线性介质中的光束传输具有周期性的条件是 x 和 y 方向的非线性响应系数之比为有理数, 即

$$\frac{\gamma_x}{\gamma_y} = \frac{m}{n} \quad (\text{其中 } m, n \text{ 互质}). \quad (20)$$

其次, 即使对于满足周期性条件的椭圆响应强非局域非线性介质, 在一个周期内光束传输的规律也和具有二维同步分数傅里叶变换的圆型响应强非局域非线性介质情形明显不同 (例如: 当 $\gamma_x/\gamma_y = 2/1$

时, 在 $1/4$ 周期处的光斑为输入场在 y 方向的傅里叶变换关于 y 轴的镜像, 而不是二维标准傅里叶变换).

3.2 孤子与呼吸子

由于二维椭圆厄米高斯函数是椭圆响应强非局域非线性薛定谔方程的本征解, 因此当 x, y 方向上的光强分布为厄米高斯分布, 即

$$A = c_{mn} H_m\left(\frac{x}{w_0^{(x)}}\right) H_n\left(\frac{y}{w_0^{(y)}}\right) \times \exp\left[-\left(\frac{x}{\sqrt{2}w_0^{(x)}}\right)^2 - \left(\frac{y}{\sqrt{2}w_0^{(y)}}\right)^2\right], \quad (21)$$

且束宽参数 $w_0^{(x)} = w_c^{(x)} = (k^2\gamma_x^2 P_0)^{-1/4}$, $w_0^{(y)} = w_c^{(y)} = (k^2\gamma_y^2 P_0)^{-1/4}$ 时, 光束在两个方向上的自由衍射和非线性波导聚焦效应刚好可以维持平衡. 在传输过程中光束将保持形状和大小不变, 只有相位随着传输距离的线性变化, 即形成孤子传输 (图 1 第 1 行). 这类孤子是本征孤子解. 孤子在 x, y 方向的二阶矩宽度分别为 $\sqrt{2m+1}w_0^{(x)}$ 和 $\sqrt{2n+1}w_0^{(y)}$. 由于椭圆非局域效应, 即使两个方向上的厄米函数阶数是相同的, 其二阶矩束宽也不同.

另外, 由方程 (3) 知, 非线性波导的折射率分布曲率由输入光功率决定, 因此在同样输入功率条件下, 可由本征孤子进行组合而得到新的光孤子. 若将本征孤子解叠加, 且满足: 1) 输入功率以及由此导致的非线性折射率波导与本征孤子传输时保持一致; 2) 在传输过程中各本征孤子间的相位差保持“锁定”状态, 则其叠加的解也将在传输过程中保持形状大小的恒定, 即形成新的孤子. 例如两个本征孤子的叠加 $A = c_1 A_x^{(m1)}(x, z) A_y^{(n1)}(y, z) + c_2 A_x^{(m2)}(x, z) A_y^{(n2)}(y, z)$ 要满足形成新孤子的条件为: 1) $\int |A|^2 d^2r = P_0$; 2) $(m_1 + 1/2)\beta_0^{(x)} + (n_1 + 1/2)\beta_0^{(y)} = (m_2 + 1/2)\beta_0^{(x)} + (n_2 + 1/2)\beta_0^{(y)}$, 即

$$\frac{m_1 - m_2}{n_2 - n_1} = \frac{\gamma_y}{\gamma_x}. \quad (22)$$

因此 γ_x/γ_y 为有理数是形成此类孤子的必要非充分条件. 由于这类孤子可以在上述条件下由本征孤子组合而来, 我们称之为积木型孤子.

若本征/积木型孤子满足束宽比和相位锁定, 但宽度与临界宽度不匹配, 即 $w_0^{(x)} \neq w_c^{(x)}$, $w_0^{(y)} \neq w_c^{(y)}$, 则衍射效应和自聚焦效应将不能平衡. 具体而言, 当输入束宽大于 (小于) 临界束宽时, 输

入位置处光束自聚焦效应将强(弱)于衍射效应, 光束将首先汇聚(发散); 当汇聚(发散)到一定程度后, 光束自聚焦效应将弱(强)于衍射效应, 光束会发生发散(汇聚); 当发散(汇聚)之后, 又将再次汇聚(发散); 如此循环下去, 光束束宽发生周期性变化, 形成

二维异步的本征/积木型呼吸子(图 1 第 2, 3 行).

二维异步呼吸子的演化过程同样遵循分数傅里叶变换规律. 如对于二维异步本征呼吸子, 对入场做二维异步分数傅里叶变换可得表达式

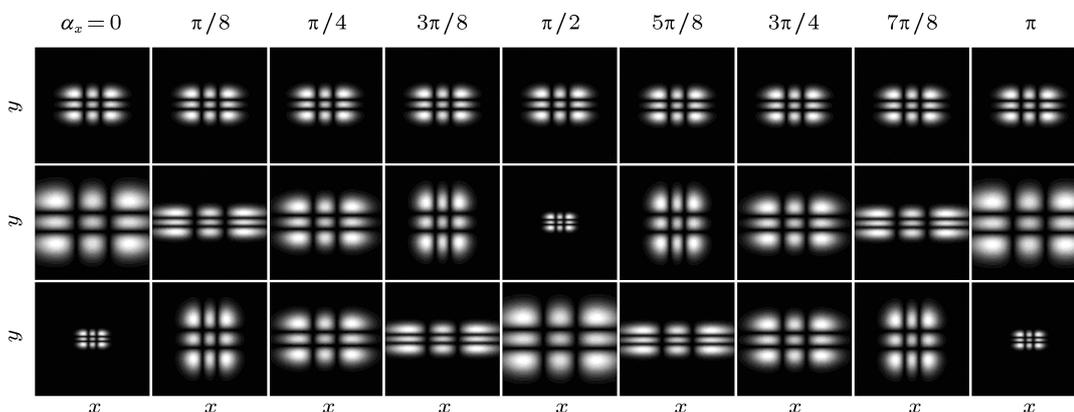


图 1 椭圆响应强非局域非线性介质 ($\gamma_x/\gamma_y = 1/3$) 中的 (2, 2) 模厄米高斯本征孤子 (第 1 行) 和二维异步呼吸子 (第 2, 3 行) 的传输性质 第 1 行, $w_0^{(x)} = w_c^{(x)}, w_0^{(y)} = w_c^{(y)}$; 第 2 行, $w_0^{(x)} = 2w_c^{(x)}, w_0^{(y)} = 2w_c^{(y)}$; 第 3 行, $w_0^{(x)} = w_c^{(x)}/2, w_0^{(y)} = w_c^{(y)}/2$

$$A = c_{mn} H_m \left(\frac{x}{w_z^{(x)}} \right) H_n \left(\frac{y}{w_z^{(y)}} \right) \times \exp \left[- \left(\frac{x}{\sqrt{2}w_z^{(x)}} \right)^2 - \left(\frac{y}{\sqrt{2}w_z^{(y)}} \right)^2 \right] \times \exp \left(\frac{ikx^2}{2R_x} + \frac{iky^2}{2R_y} - i\psi \right), \quad (23)$$

其中

$$w_z^{(x)} = \sqrt{\left[\frac{(w_c^{(x)})^2}{w_0^{(x)}} \sin(\alpha_x) \right]^2 + \left[w_0^{(x)} \cos(\alpha_x) \right]^2},$$

$$w_z^{(y)} = \sqrt{\left[\frac{(w_c^{(y)})^2}{w_0^{(y)}} \sin(\alpha_y) \right]^2 + \left[w_0^{(y)} \cos(\alpha_y) \right]^2},$$

$$R_x = \frac{k (w_c^{(x)})^2 \left[(w_0^{(x)})^4 \cot(\alpha_x) + (w_c^{(x)})^4 \tan(\alpha_x) \right]}{(w_c^{(x)})^4 - (w_0^{(x)})^4},$$

$$R_y = \frac{k (w_c^{(y)})^2 \left[(w_0^{(y)})^4 \cot(\alpha_y) + (w_c^{(y)})^4 \tan(\alpha_y) \right]}{(w_c^{(y)})^4 - (w_0^{(y)})^4},$$

$$\psi = \arctan \left[\left(\frac{w_c^{(x)}}{w_0^{(x)}} \right)^2 \tan(\alpha_x) \right] + \arctan \left[\left(\frac{w_c^{(y)}}{w_0^{(y)}} \right)^2 \tan(\alpha_y) \right]. \quad (24)$$

积木型的二维异步呼吸子同理, 不赘述.

由 (24) 式中的参数知, 二维异步呼吸子的分数傅里叶变换后半周期和前半个周期具有相同的演化过程; x 和 y 方向的呼吸周期也就相应地变为分数傅里叶变换周期的一半, 即 $\Delta\alpha_x = \pi, \Delta\alpha_y = \pi$.

对于传统圆形响应强非局域非线性介质中的同步呼吸子而言, 在两个维度上的呼吸是同步的, 因此呼吸子的形状在传输过程中保持不变, 只改变大小 [15]. 但对于此处的二维异步呼吸子而言有显著不同: 由于在 x 和 y 方向上有不同的呼吸周期, 导致光束在 x 和 y 方向交替变扁. 并且, 只有当满足 (20) 式中的条件才可在二维整体周期处恢复输入时的形状和大小, 否则光束将不能演化成与输入面一致的光斑分布.

另外, 为衡量呼吸子呼吸效应的强弱, 定义呼吸强度系数为

$$\Lambda_x = \frac{w_z^{(x)}|_{\max}}{w_z^{(x)}|_{\min}}, \quad \Lambda_y = \frac{w_z^{(y)}|_{\max}}{w_z^{(y)}|_{\min}}. \quad (25)$$

由 (24) 式可得, 当束宽大于(小于)临界束宽时, 入射位置处在 x 和 y 方向的束宽为最大(最小)束宽 $w_0^{(x)}, w_0^{(y)}$, 而在半个呼吸周期处 ($\alpha = \pi/2$) 束宽为最小(最大)束宽 $(w_c^{(x)})^2/w_0^{(x)}, (w_c^{(y)})^2/w_0^{(y)}$. 因此, 当输入束宽为 $w_0^{(x)}, w_0^{(y)}$ 或 $(w_c^{(x)})^2/w_0^{(x)}, (w_c^{(y)})^2/w_0^{(y)}$ 时, 有同样大小的呼吸强度. 这实际上可用分数傅里叶变换的性质来解释, 最小束宽处和最大束宽处刚好相差 $\pi/2$ 的阶数, 故此两处的光场互为传统傅里叶变换; 对于厄米高斯函数而言, x 和 y 方向变换前后

的束宽因子乘积刚好分别等于 $(w_c^{(x)})^2$ 和 $(w_c^{(y)})^2$, 因此呼吸强度相同.

3.3 孤子/呼吸子的相互作用

在椭圆响应强非局域非线性介质中, 若输入面光场空间分布为相互作用的多个孤子/呼吸子, 则在数学上可表述为

$$A = \sum_p A'_p = \sum_p A_p(x - s_0^{(x)}, y - s_0^{(y)}, 0) \times \exp [i(h_0^{(x)}(x - s_0^{(x)}) + h_0^{(y)}(y - s_0^{(y)}))], \quad (26)$$

其中 $A_p(x, y, 0)$ 表示第 p 个相互作用的孤子/呼吸子的输入光场, $s_0^{(x)}$ 和 $s_0^{(y)}$ 分别表示其在 x, y 方向偏离非线性波导中心轴的距离, $h_0^{(x)}$ 和 $h_0^{(y)}$ 分别代表 x, y 方向的倾斜.

在传输过程中各孤子/呼吸子将表现出两方面的演化特征, 其一是孤子/呼吸子本身呼吸特性的演化; 其二是轨迹的相互影响. 呼吸特性的演化可由

$$A_p(x, y, z) = F_{w_t^{(x)}}^{(\alpha_x^{(t)})} \left\{ F_{w_t^{(y)}}^{(\alpha_y^{(t)})} \{A_p(x, y, 0)\} \right\} \times \exp \left(-i \frac{\alpha_x + \alpha_y}{2} \right) \quad (27)$$

得到, 上式中 $w_t^{(x)}$ 和 $w_t^{(y)}$ 为所有相互作用光束的总功率导致的临界束宽, $\alpha_x^{(t)}$ 和 $\alpha_y^{(t)}$ 为对应的分数傅里叶变换阶数. 由 (27) 式知, 孤子/呼吸子相互作用时, 呼吸效应的变化主要取决于总功率对分数傅里叶变换的变换核以及变换阶数的影响; 当满足 $w_0^{(x)} = w_t^{(x)}$, $w_0^{(y)} = w_t^{(y)}$ 时为椭圆孤子形式, 而当此条件不满足时则为二维异步呼吸子, 其机制在 3.2 节中已讨论, 不再赘述. 本小节主要讨论轨迹的相互影响.

孤子/呼吸子相互作用下轨迹的规律可通过对 (26) 式作分数傅里叶变换而得到. 由 (27) 式并应用分数傅里叶变换的平移定理和指数定理, 可得

$$\begin{aligned} & A'_p(x, y, z) \\ &= F_{w_t^{(x)}}^{(\alpha_x^{(t)})} \left\{ F_{w_t^{(y)}}^{(\alpha_y^{(t)})} \{A'_p(x, y, 0)\} \right\} \\ & \quad \times \exp \left(-i \frac{\alpha_x + \alpha_y}{2} \right) \\ &= A_p \left(x - s_z^{(x)}, y - s_z^{(y)}, z \right) \exp \left[i \left(h_z^{(x)}(x - s_z^{(x)}) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + h_z^{(y)}(y - s_z^{(y)}) - \varphi(z) \right) \right], \quad (28) \end{aligned}$$

其中

$$s_z^{(x)} = \sqrt{(s_0^{(x)})^2 + (w_t^{(x)})^4 (h_0^{(x)})^2} \cos(\delta_x - \alpha_x^{(t)}),$$

$$\begin{aligned} s_z^{(y)} &= \sqrt{(s_0^{(y)})^2 + (w_t^{(y)})^4 (h_0^{(y)})^2} \cos(\delta_y - \alpha_y^{(t)}), \\ h_z^{(x)} &= \frac{\sqrt{(s_0^{(x)})^2 + (w_t^{(x)})^4 (h_0^{(x)})^2}}{(w_t^{(x)})^2} \cos\left(\delta_x - \alpha_x^{(t)} - \frac{\pi}{2}\right), \\ h_z^{(y)} &= \frac{\sqrt{(s_0^{(y)})^2 + (w_t^{(y)})^4 (h_0^{(y)})^2}}{(w_t^{(y)})^2} \cos\left(\delta_y - \alpha_y^{(t)} - \frac{\pi}{2}\right), \\ \psi &= \left(s_0^{(x)} h_0^{(x)} + s_0^{(y)} h_0^{(y)} \right) \sin^2(\alpha) \\ & \quad + \frac{1}{4} \left[\left(\frac{s_0^{(x)}}{w_t^{(x)}} \right)^2 + \left(\frac{s_0^{(y)}}{w_t^{(y)}} \right)^2 - (w_t^{(x)} h_0^{(x)})^2 \right. \\ & \quad \left. - (w_t^{(y)} h_0^{(y)})^2 \right] \sin(2\alpha), \quad (29) \end{aligned}$$

δ_x 满足 $\cos(\delta_x) = s_0^{(x)} / [(s_0^{(x)})^2 + (w_t^{(x)})^4 (h_0^{(x)})^2]^{1/2}$, $\sin(\delta_x) = (w_t^{(x)})^2 h_0^{(x)} / [(s_0^{(x)})^2 + (w_t^{(x)})^4 (h_0^{(x)})^2]^{1/2}$; δ_y 亦同理.

由 (29) 式知, 各相互作用孤子/呼吸子在 x 和 y 方向的轨迹和倾斜因子均做余弦形式的演变, 且轨迹和倾斜量的变化相位相差 $\pi/2$, 即其一达到最大值时, 另一个量达到最小值, 并且两者满足转换关系 $s_z^{(x)}|_{\max} = (w_t^{(x)})^2 h_z^{(x)}|_{\max}$, $s_z^{(y)}|_{\max} = (w_t^{(y)})^2 h_z^{(y)}|_{\max}$. 这类似于二维谐振子分别在 x 和 y 方向的动能和势能转换. 但需注意的是两个方向上的转换周期是不同的.

轨迹在 x 和 y 两个方向上有各自的振荡强度、初始相位和演化周期. 从 (29) 式可知, 振荡强度和初始相位由各自的初始离轴量和初始倾斜量共同决定. 这两个正交方向的异步余弦振荡在 xy 平面内的投影构成了李萨如图形. 初始离轴量和初始倾斜量的变化会影响两个方向的振荡强度比和初始相位差, 进而形成丰富多彩的轨迹演化图形. 图 2 中显示了几种轨迹图形, 读者可结合 (29) 式并参阅李萨如图形的相关资料得出更多的轨迹图形.

4 结论

在椭圆强非局域非线性介质中, 形成了曲率与激光功率成正比的非线性二次折射率波导. 由于 x 和 y 方向的非线性响应不同, 导致两个方向折射率曲率的不同, 进而导致了对光束约束能力的差异. 任意光束在椭圆响应非局域非线性介质中传输时均遵守二维异步分数傅里叶变换的传输规律. 基于二维异步分数傅里叶变换的性质, 可很方便地对光束 (包括孤子、呼吸子及其相互作用) 的传输进行

解析求解并分析其性质. 由于在两个维度上的变换阶数不同步, 光束传输时只有当 x 和 y 方向的非线性响应系数之比为有理数时才具有二维整体周期性, 并且即使是周期性演变, 在一个周期内的演化过程也迥异于二维同步傅里叶变换. 若输入光束为椭圆厄米高斯光束且在 x 和 y 两个方向的束宽参量与临界束宽参量一致, 光束在两个方向上的自由衍射和非线性波导聚焦效应刚好可以维持平衡, 从而形成本征孤子. 若将本征孤子解叠加, 且满足: 1) 输入功率以及由此导致的非线性折射率波导与本

征孤子传输时保持一致; 2) 在传输过程中各本征孤子间的相位差保持“锁定”状态, 则其叠加的解也将在传输过程中保持形状大小的恒定, 即形成新的积木型孤子. 如果本征/积木型孤子的输入束宽参量与临界束宽参量不一致, 光束束宽将发生周期性变化, 形成二维异步的本征/积木型呼吸子. 由于在 x 和 y 方向上有不同的呼吸周期, 导致光束在 x 和 y 方向交替变扁, 这与只改变大小不改变形状的常规呼吸子显著不同.

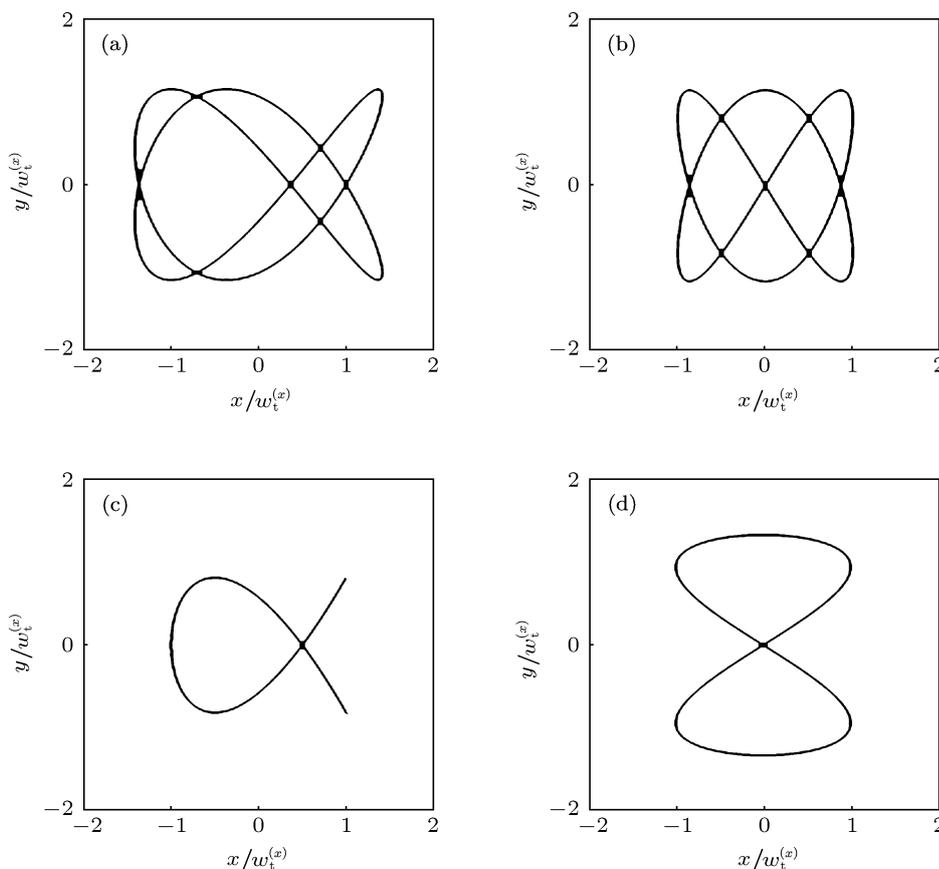


图2 不同参数条件下椭圆响应强非局域介质中孤子/呼吸子相互作用时的轨迹演化在 xy 平面的投影 (a) $\gamma_x/\gamma_y = 2/3, s_0^{(x)} = w_t^{(x)}, s_0^{(y)} = w_t^{(y)}, h_0^{(x)} = s_0^{(x)}/(w_t^{(x)})^2, h_0^{(y)} = s_0^{(y)}/(w_t^{(y)})^2$; (b) $\gamma_x/\gamma_y = 2/3, s_0^{(x)} = w_t^{(x)}, s_0^{(y)} = w_t^{(y)}, h_0^{(x)} = 0, h_0^{(y)} = s_0^{(y)}/(w_t^{(y)})^2$; (c) $\gamma_x/\gamma_y = 2/3, s_0^{(x)} = w_t^{(x)}, s_0^{(y)} = w_t^{(y)}, h_0^{(x)} = 0, h_0^{(y)} = 0$; (d) $\gamma_x/\gamma_y = 2/1, s_0^{(x)} = w_t^{(x)}, s_0^{(y)} = w_t^{(y)}, h_0^{(x)} = 0, h_0^{(y)} = s_0^{(y)}/(w_t^{(y)})^2$

在孤子/呼吸子相互作用的过程中, 各孤子/呼吸子的轨迹演化规律可通过对输入场作分数傅里叶变换并应用分数傅里叶变换的平移定理和指数定理而得到. 结果表明, 轨迹在 x 和 y 两个方向上有各自的振荡强度、初始相位和演化周期; 振荡强度和初始相位由各自的初始离轴量和初始倾斜量

共同决定, 演化周期则由介质本身决定. 这两个正交方向的异步余弦振荡在 xy 平面内的投影构成了李萨如图形. 随着初始离轴量和初始倾斜量的变化会影响两个方向的振荡强度比和初始相位差, 进而形成丰富多彩的轨迹演化图形.

- [1] Snyder A W, Mitchell D J 1997 *Science* **276** 1538
- [2] Yakimenko A I, Lashkin V M, Prikhodko O O 2006 *Phys. Rev. E* **73** 066605
- [3] Buccoliero D, Desyatnikov A S, Królikowski W, Kivshar Y S 2008 *Opt. Lett.* **33** 198
- [4] Buccoliero D, Desyatnikov A S, Królikowski W, Kivshar Y S 2007 *Phys. Rev. Lett.* **98** 053901
- [5] Zhong W P, Lin Y 2007 *Phys. Rev. A* **75** 061801
- [6] Peccianti M, Conti C, Assanto G, Luca A D, Umetsu C 2002 *Appl. Phys. Lett.* **81** 3335
- [7] Lopez-Aguayo S, Desyatnikov A S, Kivshar Y S 2006 *Opt. Express* **14** 7903
- [8] Wang Y Q, Guo Q 2008 *Chin. Phys. B* **17** 2527
- [9] Królikowski W, Bang O 2000 *Phys. Rev. E* **63** 016610
- [10] Deng D M, Guo Q 2007 *Opt. Lett.* **32** 3206
- [11] Mamaev A V, Zozulya A A, Mezentsev V K, Anderson D Z, Saffman M 1997 *Phys. Rev. A* **56** R1110
- [12] Nikolov N I, Neshev D, Królikowski W, Bang O, Rasmussen J J, Christiansen P L 2004 *Opt. Lett.* **29** 286
- [13] Lopez-Aguayo S, Gutiérrez-Vega J C 2007 *Opt. Express* **15** 18326
- [14] Ouyang S G, Hu W, Guo Q 2007 *Phys. Rev. A* **76** 053832
- [15] Guo Q, Luo B, Yi F, Chi S, Xie Y 2004 *Phys. Rev. E* **69** 016602
- [16] Guo Q, Zhang X P, Hu W, Shou Q 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 1832 (in Chinese) [郭旗, 张霞萍, 胡巍, 寿倩 2006 物理学报 **55** 1832]
- [17] Bai Z Y, Deng D M, Guo Q 2012 *Chin. Phys. B* **21** 64218
- [18] Conti C, Peccianti M, Assanto G 2004 *Phys. Rev. Lett.* **92** 113902
- [19] Peccianti M, Brzdukiewicz K A, Assanto G 2002 *Opt. Lett.* **27** 1460
- [20] Rotschild C, Segev M, Xu Z Y, Kartashov Y V, Torner L, Cohen O 2006 *Opt. Lett.* **31** 3312
- [21] Dreischuh A, Neshev D N, Petersen D E, Bang O, Królikowski W 2006 *Phys. Rev. Lett.* **96** 043901
- [22] Qin X J, Guo Q, Hu W, Lan S 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 1237 (in Chinese) [秦晓娟, 郭旗, 胡巍, 兰胜 2006 物理学报 **55** 1237]
- [23] Rotschild C, Cohen O, Manela O, Segev M, Carmon T 2005 *Phys. Rev. Lett.* **95** 213904

Two-dimensional asynchronous fractional Fourier transform and propagation properties of beams in strongly nonlocal nonlinear medium with an elliptically symmetric response*

Lu Da-Quan Hu Wei[†]

(Key Laboratory of Nanophotonic Functional Materials and Devices, School of Information and Optoelectronic Science and Engineering, South China Normal University, Guangzhou 510631, China)

(Received 26 November 2012; revised manuscript received 18 December 2012)

Abstract

Propagation of beams in strongly nonlocal nonlinear medium with an elliptically symmetric response is investigated. The result shows that the propagation of beams in this type of medium can be regarded as two-dimensional asynchronous fractional Fourier transform. With this powerful mathematical tool, the analytical solution and the propagation properties of beams can be conveniently obtained. Based on the properties of the two-dimensional asynchronous fractional Fourier transform, the general propagation properties of beams are discussed, the formation conditions of solitons and two-dimensional asynchronous breathers are analyzed, and the law for interaction among solitons and/or breathers is obtained.

Keywords: elliptically symmetric response, strongly nonlocal nonlinearity, soliton, breather

PACS: 42.65.Tg, 42.65.Jx

DOI: 10.7498/aps.62.084211

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 10804033, 11174090, 1174091) and the Specialized Research Fund for the Doctoral Program of Higher Education of China (Grant No. 200805740002).

[†] Corresponding author. E-mail: huwei@scnu.edu.cn